ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

أجب عن كل من الأسئلة التالية:

السؤال 1:

أ) (درجتان) إذا كان $G=(X,Y,E)$ رسماً ثنائي التجزئة، فأثبت أن:

$$|E| = \sum_{x\in X} \deg(x) = \sum_{y\in Y} \deg(y)$$

ب) (درجتان) إذا كانت F غابة عدد رؤوسها n و عدد مركباتها k ، فأثبت أن عدد أضلاعها يساوي n-k.

ج) (4 درجات) إذا كان G رسما مترابطا مستويا، فأثبت أنه يوجد في G رأس x بحيث : $\deg(x) \le 5$.

السؤال 2: (درجتان و نصف لكل سؤال).

أ) أثبت أن المتتالية $S=(9,9,8,5,5,4,3,3,2,2)$ ليست رسمية .

ب) إذا كان $\delta(G) \ge k$ ، فأثبت أن الرسم G يحتوي على ممر طوله على الأقل k .

ج) جد جميع الأشجار T ، غير المتماثلة، التي هي رسوم منتظمة.

د) لتكن T شجرة بحيث $1 \le \deg(x) \le 4$ ، لكل رأس x .
إذا كان للشجرة T رأس وحيد درجته 3 و رأسان بالضبط درجة كل منهما 4، فأثبت أن عدد الرؤوس التي درجتها 1 يساوي 7.

السؤال 3:

أ) ليكن G رسما منتظما من النوع 7 و عدد رؤوسه n، بحيث $n \ge 8$.

(i) أثبت أنه إذا كان $n \le 14$ ، فإن الرسم G هاملتوني. (درجة ونصف)
(ii) أثبت أن $n \ne 15$. (درجة واحدة)
(iii) أثبت أنه إذا كان $n \ge 16$ ، فإن الرسم $\overline{G}$ هاملتوني. (درجة و نصف)

ب) هل يوجد رسم مستو، عدد رؤوسه 85 و عدد أضلاعه 95 وعدد أوجهه 11 ؟ (درجتان)

السؤال 4: (4 درجات) أثبت أن عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A=\{ a_1 , a_2 , \ldots , a_m \}$ إلى المجموعة $B=\{ b_1 , b_2 , \ldots , b_n \}$، حيث $m \geq n$ ، يساوي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

السؤال 5:

أ) جد عدد تباديل حروف الكلمة CORRESPONDENCE بحيث :

(i) E لا يجاور E . (درجة واحدة)

(ii) لا يظهر E على يسار O و لا يظهر O على يسار R . (درجة واحدة)

ب) (درجتان) جد عدد تباديل $1, 2, \ldots, n$ التي تترك بالضبط k عددا في أماكنها الطبيعية.

ج) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ بحيث:

(i) (درجتـــان) $x_1 \geq 2 \quad , \quad x_2 > -2 \quad , \quad x_3 > 5$

(ii) (درجتـــان) $0 \leq x_1 \leq 10 \quad , \quad 0 \leq x_2 \leq 9 \quad , \quad 0 \leq x_3 \leq 6$

السؤال 6:

أ) (3 درجات) إذا كانت C_{11} دورة في رسم ما، وإذا عنونت رؤوسها عشوائيا بالأعداد $1, 2, \ldots, 10, 11$، فأثبت أنه توجد ثلاثة رؤوس متعاقبة مجموع عناوينها أكبر من أو يساوي 18.

ب) (درجة واحدة) أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة: $\binom{n+5}{2} = \binom{n}{2} + \binom{5}{2} + 5n$ ،

حيث $n \geq 2$ عدد صحيح .