جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الدراسي الثاني 1435/1434هـ
كلية العلوم	في المقرر 431 ريض	الزمن: ثلاث ساعات

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

السؤال 1 : (11 درجة)

أ) أثبت أن عدد الدوال الشاملة من مجموعة عدد عناصرها m إلى مجموعة عدد عناصرها n ، حيث $n \geq m$ ، يساوي $n!\,S(m,n)$ (3 درجات)

ب) جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث : $1 \leq x \leq 400$, 3 لا يقسم x , 4 لا يقسم x , 10 لا يقسم x . (3 درجات)

ج) لتكن المجموعة $X = \{1, 2, ..., 2n\}$ ، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح.

(i) أوجد عدد تباديل المجموعة X التي تثبت بالضبط n عنصراً. (درجة و نصف)

(ii) أوجد عدد التباديل f للمجموعة X بحيث f تترك كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي و $f(1) = 3$. (درجة و نصف)

د) أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة التالية، حيث $n \geq 3$ عدد صحيح .

$$\binom{4n}{3} = 2\binom{n}{3} + \binom{2n}{3} + 6n\binom{n}{2} + 2n\binom{2n}{2} + 2n^3 \quad \text{(درجتان)}$$

السؤال 2: (8 درجات) (درجتان لكل سؤال)

أ) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$ بحيث:

$$x_1 \geq 5 \;,\quad x_2 \geq -3 \;,\quad x_3 > 5 \;,\quad x_4 > 8$$

ب) أو جد صيغة مختصرة للدالة المولدة العادية لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة:

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = r$ بحيث $x_i \geq i$ لكل $i \in \{1, 2, 3\}$.

ج) باستخدام دالة مولدة أسية، أو جد عدد المتتاليات من الطول r ، المأخوذة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ و التي يظهر فيها كل من 1 و 2 مرة واحدة على الأقل.

د) أوجد حل المسألة : $a_n - 5a_{n-1} = -4n^2 + 2n - 7$ لكل $n \geq 1$ ، حيث $a_0 = -6$.

السؤال 3: (8 درجات)

أ) لتكن المتتالية $S = (4,3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1)$

i) أثبت أن المتتالية S رسمية وجد تجسيدا لها. (درجتان)

ii) هل يوجد تجسيد مترابط للمتتالية S ؟. (درجة وأحدة)

ب) إذا كان G رسما بحيث $\delta(G) \geq 2$ ، فأثبت أن G يحتوي على دورة . (درجتان)

ج) i) أثبت أن عدد الرؤوس التي درجتها 1 في شجرة ذات رأسين أو أكثر يساوي $2 + \sum_{\deg(v_i)\geq 3} (\deg(v_i) - 2)$. (درجة و نصف)

ii) جد متتالية الدرجات لشجرة عدد رؤوسها 13، لها رأسان بالضبط من الدرجة 4 و رأس واحد من الدرجة 3 و درجة كل من بقية رؤوسها تساوي 1 أو 2 . (درجة و نصف)

السؤال 4: (7 درجات)

أ) إذا كان G رسما مستويا مترابطا عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e و طول أقصر دورة فيه يساوي k ، فأثبت أن $e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$. (3 درجات)

ب) هل يوجد رسم مستو، عدد رؤوسه 80 و عدد أضلاعه 93 وعدد أوجهه 14 ؟ (درجتان)

ج) إذا كان G رسما منتظما من النوع 13 و عدد رؤوسه n، بحيث $n \geq 28$، فأثبت أن الرسم $\overline{G}$ هاملتوني. (درجتان)

السؤال 5: (6 درجات)

أ) ينظم قسم الرياضيات الاختبارات النهائية لسبعة مقررات مرقمة من 1 إلى 7 .
لكل زوج من الأزواج التالية فقط يوجد على الأقل طالب مسجل في المقررين:

$\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,5\}$, $\{4,5\}$, $\{1,7\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$,
$\{3,7\}$, $\{3,4\}$, $\{4,6\}$, $\{5,7\}$, $\{5,6\}$.

أنشيء جدولا لهاته الاختبارات بأقل عدد ممكن من الحصص. (3 درجات)

ب) ليكن G رسما رتبته n .

i) أثبت أن $\chi(G).\chi(\overline{G}) \geq n$ (درجة و نصف)

ii) استنتج أن $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{n}$ (درجة و نصف)