جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**الفصل الثاني 1437/1436هـ**
كلية العلوم- قسم الرياضيات	**في المقرر 431 ريض**	**الزمن: ثلاث ساعات**

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

السؤال الأول : (12 درجة)

(1) (أ) أثبت أنه إذا كانت T شجرة عدد رؤوسها n ، فإن عدد أضلاعها يساوي $n-1$. (درجتان)

(ب) أثبت أنه إذا كانت F غابة عدد رؤوسها n و عدد مركباتها k ، فإن عدد أضلاعها يساوي $n-k$. (درجة واحدة)

(ج) أثبت أنه إذا كان G رسما عدد رؤوسه n ، عدد أضلاعه e ، و عدد مركباته k ، فإن $e \geq n-k$. (درجة واحدة)

(2) أوجد جميع قيم العدد الصحيح الموجب n لكل من الحالات التالية:

(أ) يكون الرسم K_n أويلريا . (درجة واحدة) **(ب)** يكون الرسم $K_{n,2n}$ أويلريا . (درجة واحدة)

(ج) يكون الرسم $\overline{C_n}$ هاملتونيا. (درجة واحدة) **(د)** يكون الرسم $K_{n,n}$ مستويا (درجة واحدة)

(3) ليكن G رسما عدد رؤوسه v ، حيث $v \geq 1$.

(أ) أثبت أن $\chi(G).\chi(\overline{G}) \geq v$. (درجة واحدة)

(ب) استنتج أن $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{v}$. (درجة واحدة)

(ج) أثبت أن $k^7-4k^6+3k^5-2k^4+3k^3-k^2$ ليست كثيرة حدود لونية. (درجتان)

السؤال الثاني : (8 درجات)

(1) ليكن G رسما مستويا ، عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e ، و طول أقصر دورة فيه يساوي k ، حيث $k \geq 3$.

(أ) أثبت أنه إذا كان الرسم G مترابطا، فإن $e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$. (درجتان)

(ب) استنتج أن $e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$. (درجة واحدة)

(ج) استنتج أن الرسم $K_{3,3}$ و رسم بيترسن غير مستويين. (درجتان)

(2) ليكن H رسما مستويا لا يحتوي على مثلثات، عدد رؤوسه p ، حيث $p \geq 3$ ، و عدد أضلاعه m .

(أ) باستخدام (1) أثبت أن $m \leq 2p-4$. (درجة واحدة)

(ب) أثبت أنه إذا كان $p \geq 9$ ، فإن متمم الرسم H غير مستو. (درجتان)

السؤال الثالث : (10 درجات)

(1) (أ) أثبت أن $S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$ ، حيث n و k عددان صحيحان موجبان . (درجتان)

(ب) أثبت أن $S(n,2)=2^{n-1}-1$ ، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح . (درجة واحدة)

(2) أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة: $\binom{7n}{2}=\binom{5n}{2}+\binom{2n}{2}+10n^2$ ، حيث n عدد صحيح موجب. (درجتان)

(3) (درجتان) أوجد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $x_1+x_2+x_3=19$ بحيث:

$0\le x_1\le 3,\quad 0\le x_2\le 5\ ,0\le x_3\le 7$

(4) لتكن المجموعة $A=\{1,2,...,4n\}$ ، حيث n عدد صحيح موجب.

(أ) أوجد عدد طرق تجزئة المجموعة A إلى n مجموعة تتكون كل منها من 4 عناصر. (درجة واحدة)

(ب) أوجد عدد التباديل f للمجموعة A بحيث : $f(\{n,4n\})=\{n,4n\}$ ، $f(1)=2n$ ، $f(2n)=1$ و f تترك بالضبط $2n$ عددا في أماكنها الطبيعية. (درجتان)

السؤال الرابع : (10 درجات)

(1) باستخدام دالة مولدة أسية، أو جد عدد المتتاليات من الطول r ، المأخوذة من المجموعة *{1, 2,3,4 ,5 }* و التي يظهر فيها كل من 2 و 4 مرة واحدة على الأقل . (درجتان)

(2) **(أ)** أو جد صيغة مختصرة للدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) حيث $a_n=4^n$ لكل $n\ge 0$. (درجة واحدة)

(ب) أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة العادية للمتتالية (b_n) حيث $b_n=n^2 4^n$ لكل $n\ge 0$. (درجتان)

(ج) استنتج صيغة مختصرة للدالة المولدة العادية للمتتالية (s_n) حيث $s_n=\sum_{k=0}^{k=n} k^2 4^k$ لكل $n\ge 0$. (درجة واحدة)

(3) استخدم دالة مولدة عادية لحل المسألة التالية: $a_n=4a_{n-1}+3.2^n\,(\forall n\ge 1)$ ، حيث $a_0=1$. (درجتان)

(4) إذا كانت C_{12} دورة في رسم ما، و إذا عنونت رؤوسها عشوائيا بالأعداد: 1, 2, … , 12 ، فلثبت أنه توجد 3 رؤوس متعاقبة مجموع عناوينها أكبر من أو يساوي 20. (درجتان)

نموذج لحل الاختبار النهائي

(الفصل الثاني 36/37 ص)

السؤال الأول /

(1) (أ) المطلوب هو إثبات المبرهنة (2.2) (الصفحة 36).

ب) المطلوب هو إثبات النتيجة (2.1) (الصفحة 37)

(2) ليكن $G=(V,E)$ رسماً عدد رؤوسه n، عدد أضلاعه e، وعدد مركباته k، ولتكن $G_i=(V_i,E_i)$ هي مركبات G.

لاحظ أنه لكل $1\le i\le k$، $|E_i|\ge|V_i|-1$ لأن لـ G_i شجرة مولدة.

إذاً

$$e=|E|=\sum_{i=1}^{k}|E_i|\ge\sum_{i=1}^{k}(|V_i|-1)=n-k$$

(3) (أ) K_n مترابط وغير صفري لكل $n\ge 2$، وهو رسم منتظم من النوع $(n-1)$.

إذاً يكون K_n أويلرياً إذا وفقط إذا كان $(n-1)$ عدداً زوجياً.

إذاً يكون K_n أويلرياً إذا وفقط إذا كان n عدداً فردياً بحيث $n\ge 3$. ///

N.B) نستبعد حالة $n=1$.

ب) ليكن $n\ge 1$ عدداً صحيحاً.

من الواضح أن الرسم $K_{n,2n}$ مترابط وغير صفري

ولنا:

$$\{\deg u : u\in V(K_{n,2n})\}=\{n,2n\}$$

إذاً يكون $K_{n,2n}$ أويلرياً إذا وفقط إذا كان n زوجياً لأن $2n$ زوجي دائماً. ///

(ج) ليكن $n\geq 3$ عددا صحيحا.

* الرسمان $\overline{C}_3$ و C_4 غير مترابطين وبالتالي فإنهما غير هاملتونيين.
* $C_5 \cong \overline{C}_5$ وعليه $\overline{C}_5$ رسم هاملتوني.
* إذا كان $n\geq 6$، فإنه لكل رأس u لدينا:

$$\deg_{\overline{C}_n} u = n-1-2 = n-3$$

(لأن $\deg_{C_n} u = 2$)

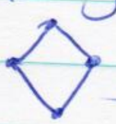
وبما أن $n\geq 6$، فإن: $\left((n-3)-\frac{n}{2} = \frac{n-6}{2}\geq 0\right)$

وبالتالي فإن الرسم $\overline{C}_n$ هاملتوني.

إذا: يكون $\overline{C}_n$ رسما هاملتونيا إذا وفقط إذا كان $n\geq 5$.

(د) ليكن الرسم $K_{n,n}$ حيث $n\geq 2$.

إذا كان $n\in\{1,2\}$ فإن $K_{n,n}$ رسم مستو

لأن: $K_{1,1}\cong$  و $K_{2,2}\cong$ 

أما إذا كان $n\geq 3$ فإن الرسم $K_{n,n}$ يحتوي رسما جزئيا يماثل الرسم $K_{3,3}$ وبالتالي فإن الرسم $K_{n,n}$ غير مستو.

إذا: يكون الرسم $K_{n,n}$ مستويا إذا وفقط إذا كان $n\in\{1,2\}$.

(3) ليكن G رسما عدد رؤوسه r حيث $r\geq 1$.

(أ) ليكن $k=\chi(G)$, $\bar{k}=\chi(\overline{G})$

بما أن $\chi(G)=k$ فإنه يوجد تجزيء $\{V_1,V_2,\dots,V_k\}$ للمجموعة $V(G)$، متكون من k مجموعة مستقلة في G

ليكن $1 \le i \le k$.

وبما أن V_i مجموعة مستقلة في G فإن الرسم الجزئي $G[V_i]$ المحدث بـ V_i، هو رسم تام، وبالتالي، فإن: $\bar{k} = \chi(\bar{G}) \ge |V_i|$.

إذاً $v = |V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \le \sum_{i=1}^{k} \bar{k}$

ومنه $v \le k\bar{k}$

وبالتالي: $\boxed{\chi(G)\cdot\chi(\bar{G}) \ge v}$

ب) لإثبات أن $\chi(G)+\chi(\bar{G}) \ge 2\sqrt{v}$، (أي $k+\bar{k} \ge 2\sqrt{v}$)، يكفي أن نثبت أن: $(k+\bar{k})^2 \ge 4v$.

وبما أن $v \le k\bar{k}$ (من الفقرة (أ)) فإن: $4v \le 4k\bar{k}$.

إذاً لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أن: $4k\bar{k} \le (k+\bar{k})^2$، وهذا طبعاً متحقق،

إذاً: $(k+\bar{k})^2 - 4k\bar{k} = k^2+\bar{k}^2 - 2k\bar{k} = (k-\bar{k})^2 \ge 0$.

2) لتكن كثيرة الحدود:

$$P(k) = k^7 - 4k^6 + 3k^5 - 2k^4 + 3k^3 - k^2$$

لنفرض بالتناقض أن $P(k)$ كثيرة حدود لونية، وليكن G رسماً يحتمل $P(k)$.

إذاً G له بالضبط مركبتان و $e(G)=4$ و $v(G)=7$.

إذاً $e(G)=4$, $v(G)-2 = 7-2 = 5$

ومنه فإن $e(G) < v(G)-k$ حيث k هو عدد مركبات الرسم G، وهذا يتناقض مع الفقرة (2) من السؤال (1) .

السؤال الثاني :-

(1) ليكن G رسما مستويا، عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e، وطول أقصر دورة فيه يساوي k، حيث $k\geq 3$،

أ) يمكن إثبات المطلوب بتعديل بسيط في برهان النتيجة (4,2) (الصفحة 88)، وذلك كما يلي:
نأخذ نفس الرسم $H=(X,Y,E')$.
لكل وجه y لنا: $\deg_H(y)\geq k$ ولكل ضلع x لنا: $\deg_H x \leq 2$. إذا، $|E'| = \sum_{i=1}^{e}\deg(x_i) = \sum_{j=1}^{f}\deg(y_j)$،
وعليه، $2e \geq |E'| \geq kf$.
بما أن G رسم مستو ومترابط، فمن صيغة أويلر لنا: $v-e+f=2$ ومنه، $kv-ke+kf=2k$،
وبالتالي فإن: $2k \leq kv-ke+2e$
لأن $kf\leq 2e$،
إذاً، $(k-2)e \leq k(v-2)$ ومنه، $\boxed{e\leq \frac{k}{k-2}(v-2)}$

ب) - إذا كان G مترابطا، فالمطلوب متحقق من (أ).
- إذا كان G غير مترابط، لتكن: $G_1=(V_1,E_1),\ldots,G_k=(V_k,E_k)$ مركبات G، حيث $k\geq 2$، ممثلة تمثيلا مستويا.
- لكل $1\leq i\leq k$: ليكن $v_i\in V_i$.
- ليكن الرسم $\tilde G=(V(G),E(\tilde G))$ حيث:

$$E(\tilde G)=E(G)\sqcup\{v_iv_{i+1};\ 1\leq i<k\}$$

من الواضح أن التمثيل المستوي للرسم G، الذي اشتققناه، يعطينا تمثيلا مستويا للرسم $\tilde G$.

إذا الرسم $\tilde{G}$ هو رسم مستوٍ ومترابط وطول أقصر دورة فيه يساوي k ، وبالتالي ، فإنه من الفقرة (أ) ، لدينا:

$e(\tilde{G}) \le \frac{k}{k-2}(v-2)$ ، وبالتالي فإن: $e(G) \le \frac{k}{k-2}(v-2)$

(لأن $e(G) \le e(\tilde{G})$) ،

(ب) * الرسم $K_{3,3}$ مترابط ، عدد رؤوسه $v=6$ ، وعدد أضلاعه $e=9$ ، وطول أقصر دورة فيه هو $k=4$.

إذاً $\frac{k}{k-2}(v-2)=8$ ومنه ، فإن: $e > \frac{k}{k-2}(v-2)$ ، وبالتالي فإن الرسم $K_{3,3}$ غير مستوٍ من الفقرة (أ) .

* رسم بيترسن هو رسم مترابط عدد رؤوسه $v=10$ ، عدد أضلاعه هو $e=15$ (أي مترابط من النوع 3) وطول أقصر دورة فيه هو $k=5$.

نستنتج: $\frac{k}{k-2}(v-2)=\frac{40}{3}$ ، فإن: $e > \frac{k}{k-2}(v-2)$ ، وبالتالي فإن رسم بيترسن غير مستوٍ من الفقرة (أ) .

(2) ليكن H رسما مستويا لا يحتوي على مثلثات، على رؤوسه p، حيث $p \geq 3$، وعلى أضلاعه m.

(1) ـ لنفرض أولا أن H ليس به دورات.

إذا، H غابة وبالتالي فإن $m = p - q$ حيث $q \geq 1$ هو عدد مركبات H (من الفقرة (ب) من (1) من السؤال الأول).

إذا، $(2p-4) - m = 2p - 4 - p + q = p + (q-4)$

ومنه، $(2p-4) - m \geq p - 3 \geq 0$ (لأن $q \geq 1$)،

وبالتالي فإن، $\boxed{m \leq 2p - 4}$.

ـ لنفرض الآن أن H ليس غابة، وليكن k، طول أقصر دورة في الرسم H.

لنا إذا $k \geq 4$ (لأن H يخلو من مثلثات).

من الفقرة (ب) من (1) لنا إذا $m \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$.

لكن الدالة f المعرفة على $]2, \infty)$ كما يلي:

$f(x) = \frac{x}{x-2}$، قابلة للاشتقاق في $(2, \infty)$،

وتحقق: $f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$،

لكل $x \in (2, \infty)$، وبالتالي فإن:

$f(k) \leq f(4) = 2$ لأن $k \geq 4$.

إذا، $m \leq f(k)(p-2) \leq 2(p-2)$

ومنه، $\boxed{m \leq 2p - 4}$.

(ب) لنفرض بالتناقض أن $p \geq 9$ وأن الرسم $\bar{H}$ رسم مستوٍ.

نعرف من النتيجة (4.2) (الصفحة (88)) وتعميمها للرسوم المستوية على المترابطة) أنه إذا كان ؛

$e(\bar{H}) \geq 3$، فإن: $e(\bar{H}) \leq 3p-6$

N.B لاحظ أنه يمكن إثبات ذلك من خلال السؤال (1).

- لكن، إذا كان $e(\bar{H})<3$ فإنه لنا أيضا:

$e(\bar{H}) \leq 3p-6$ (لأن $3p-6 \geq 21$)

- إذا لنا:

$$\begin{cases} e(H) \leq 2p-4 \\ e(\bar{H}) \leq 3p-6 \end{cases}$$

وبالتالي فإن: $e(H)+e(\bar{H}) \leq 5p-10$

وبما أن $e(H)+e(\bar{H})=\binom{p}{2}$، فإن:

$\frac{p(p-1)}{2} \leq 5p-10$ ومنه؛

$$\boxed{p^2-11p+20 \leq 0} \quad (*)$$

لنبحث عن جذور $f(x)=x^2-11x+20$

$\Delta = 11^2-80=121-80=41>0$

لنا جذران حقيقيان: $x_1=\frac{11-\sqrt{41}}{2}$ ، $x_2=\frac{11+\sqrt{41}}{2}$

إذا:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2-11x+20$		+	0	−	0	+	

لكن، $x_2 = \frac{11+\sqrt{41}}{2} < \frac{11+7}{2} = 9$ ،

وبالتالي فإن: $x^2-11x+20>0$

لكل عدد حقيقي $x \in [9, \infty)$ ، وبالتالي:

فإن: $p^2-11p+20>0$ (لأن $p \geq 9$)

وهذا يتناقض مع المتباينة (*).

السؤال الثالث:

(1) (أ) المطلوب إثبات نص المبرهنة (1.10) (بالصفحة 31)

(ب) نستخدم الاستقراء الرياضي على n.

- إذا كان $n=2$ ، فإن:

$S(n,2)=S(2,2)=1$ وبما أن $2^{2-1}-1=1$ ، فإن التقرير $P(2)$ صائب حيث $P(k)$ هو: "$S(k,2)=2^{k-1}-1$"

- لنفرض أن $P(k)$ صائب، حيث $k\geq 2$.

من السؤال (1)، لنا:

$$S(k+1,2)=S(k,1)+2S(k,2)$$

من فرضية الاستقراء نعرف أن: $S(k,2)=2^{k-1}-1$ ،

ومن ناحية أخرى، لنا: $S(k,1)=1$.

إذًا، $S(k+1,2)=1+2(2^{k-1}-1)=2^k-1$

وبالتالي فإن $P(k+1)$ صائب.

(2) نعتبر أن لدينا صندوق يحوي $7n$ كرة، حيث $5n$ كرة من اللون الأبيض و $2n$ كرة من اللون الأحمر.

ليكن N عدد طرق اختيار كرتين من الصندوق.

- بما أن عدد الكرات الجملي يساوي $7n$ فإن: $N=\binom{7n}{2}$

- من ناحية أخرى، عدد طرق الاختيار حيث تكون الكرتان المختارتان من نفس اللون، هو N_1،

حيث $N_1=\binom{5n}{2}+\binom{2n}{2}$

- وكذلك فإن عدد طرق الاختيار حيث تكون الكرتان المختارتان مختلفتي اللون هو N_2،

حيث $N_2=\binom{5n}{1}\times\binom{2n}{1}=10n^2$

- بما أن $N=N_1+N_2$ فإن:

$$\binom{7n}{2}=\binom{5n}{2}+\binom{2n}{2}+10n^2$$

(3) ليكن N هو العدد المطلوب، أي N يساوي عدد الحلول الصحيحة للمعادلة:

$x_1+x_2+x_3=19$ حيث: $0\leq x_1\leq 3,\ 0\leq x_2\leq 5,\ 0\leq x_3\leq 7$

- إذا كان (x_1,x_2,x_3) حلا للمسألة فإن:

$0\leq x_1\leq 3\ ,\ 0\leq x_2\leq 5,\ 0\leq x_3\leq 7$

وبالتالي فإن: $0\leq x_1+x_2+x_3\leq 3+5+7$

ومنه، $0\leq x_1+x_2+x_3\leq 15$

وهذا يتناقض مع كون: $x_1+x_2+x_3=19$

إذا، العدد المطلوب N يساوي: "0".

(4) لتكن المجموعة: $A=\{1,2,\dots,4n\}$

حيث $n\geq 1$ عدد صحيح.

(أ) ليكن N هو عدد طرق تجزئة A إلى n مجموعة تتكون كل منها من 4 عناصر.

- من السهل أن نرى أن:

$$N = \frac{1}{n!}\binom{4n}{\underbrace{4,4,\ldots,4}_{n \text{ من المرات}}} = \frac{1}{n!}\;\frac{(4n)!}{(4!)^n}$$

إذاً العدد N المطلوب هو:

$$\boxed{N = \frac{(4n)!}{(n!)\,(24)^n}}$$

(ب) ليكن N هو عدد التباديل f للمجموعة A بحيث:
$f(\{n,4n\}) = \{n,4n\}$ ، $f(1) = 2n$ ، $f(2n) = 1$ ،
و f تترك بالضبط $2n$ عنصراً في أماكنها الطبيعية.

- من الواضح أن $N = N_1 + N_2$ حيث:

* N_1 يساوي عدد التباديل f للمجموعة A بحيث:
$f(n) = n$ ، $f(4n) = 4n$ ، $f(1) = 2n$ ، $f(2n) = 1$ ،
و f تترك بالضبط $2n$ عنصراً في أماكنها الطبيعية.

* N_2 يساوي عدد التباديل f للمجموعة A بحيث:
$f(n) = 4n$ ، $f(4n) = n$ ، $f(1) = 2n$ ، $f(2n) = 1$ ،
و f تترك بالضبط $2n$ عنصراً في أماكنها الطبيعية.

- يمكن أن نرى أن:

$$N_1 = \binom{4n-4}{2n-2} d_{2n-2}$$

وأن: $N_2 = \binom{4n-4}{2n} d_{2n-4}$

ـ إذا $\boxed{N = \binom{4n-4}{2n-2} d_{2n-2} + \binom{4n-4}{2n} d_{2n-4}}$

السؤال الرابع //

(1) ليكن a_r هو العدد المطلوب.

الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r) هي:

$$g(x) = \left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^2 \times \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^3$$

إذا:

$$g(x) = (e^x-1)^2 (e^x)^3$$
$$= (e^{2x}-2e^x+1)\, e^{3x}$$
$$= e^{5x} - 2e^{4x} + e^{3x}.$$

ـ من الواضح إذا أن معامل x^r في مفكوك $g(x)$

يساوي: $\frac{5^r}{r!} - 2\times\frac{4^r}{r!} + \frac{3^r}{r!}$

إذا العدد a_r المطلوب هو:

$$\boxed{a_r = 5^r - 2\times 4^r + 3^r}$$

(2) (أ) الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) حيث $a_n = 4^n$ لكل $n \geq 0$ هي:

$$g_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} 4^n x^n = \frac{1}{1-4x}$$

(ب) لتكن المتتالية (b_n) حيث $b_n = n^2 4^n$ لكل $(n\geq 0)$

والمتتالية (c_n) حيث $c_n = n 4^n$ لكل $n \geq 0$.

لنا إذاً

$$\begin{cases} c_n = n a_n \\ b_n = n c_n \end{cases}$$

وإذاً الدالة المولدة العادية للمتتالية (c_n) هي:

$$g_2(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = x\, g_1'(x)$$

وبالتالي لدينا:

$$g_2(x) = x\left(\frac{4}{(1-4x)^2}\right) = \frac{4x}{(1-4x)^2}$$

وبما أن $b_n = n c_n$، فلدينا أيضاً

الدالة المولدة العادية للمتتالية (b_n) هي:

$$g_3(x) = x\, g_2'(x) = x\left(\frac{4x}{(1-4x)^2}\right)'$$

$$= x\left(\frac{4(1-4x)^2 - 2(-4)(1-4x)4x}{(1-4x)^4}\right)$$

إذن

$$g_3(x) = \frac{x(1-4x)\left[4(1-4x)+8\times 4x\right]}{(1-4x)^4}$$

$$\boxed{g_3(x) = \frac{x(4+16x)}{(1-4x)^3}}$$

إذن الدالة المولدة المطلوبة هي :

$$\boxed{g_3(x) = \frac{4x+16x^2}{(1-4x)^3}}$$

(2) بما أن $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ فإن الدالة المولدة العادية للمتتالية (S_n) هي :

$$g_4(x) = \frac{g_3(x)}{1-x}$$

إذن الدالة المولدة المطلوبة هي :

$$\boxed{g_4(x) = \frac{4x+16x^2}{(1-x)(1-4x)^3}}$$

(3) لتكن $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ هي الدالة المولدة

العادية للمتتالية (a_n) المعطاة في المسألة ؛

لدينا إذاً

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} (4a_{n-1} + 3\cdot 2^n) x^n$$

$$= 1 + 4x \sum_{n\geq 0} a_n x^n + 3 \sum_{n\geq 1} (2x)^n$$

$$= 1 + 4x f(x) + 3\left(\frac{1}{1-2x} - 1\right)$$

إذاً :

$$(1-4x) f(x) = 1 + 3\left(\frac{1-1+2x}{1-2x}\right)$$

إذاً ، $(1-4x) f(x) = \dfrac{1-2x+6x}{1-2x} = \dfrac{1+4x}{1-2x}$.

إذاً ، $\boxed{f(x) = \dfrac{1+4x}{(1-2x)(1-4x)}}$

سنبحث عن عددين حقيقيين a و b بحيث

$$\frac{1+4x}{(1-2x)(1-4x)} = \frac{a}{1-2x} + \frac{b}{1-4x}.$$

• بالضرب في $(1-2x)$ ثم اختيار $x = \frac{1}{2}$ نحصل على ؛

$$a = \frac{1+4\times\frac{1}{2}}{1-4\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{-1} = -3$$

• بالضرب في $(1-4x)$ ثم باختبار $x = \frac{1}{4}$ ، نحصل على:

$$b = \frac{1+4\times\frac{1}{4}}{1-2\times\frac{1}{4}} = 4$$

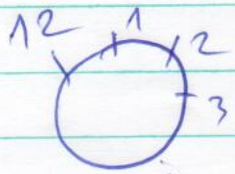
إذا،

$$f(x) = \frac{-3}{1-2x} + \frac{4}{1-4x}$$

$$= -3\left(\sum_{n\geq 0} 2^n x^n\right) + 4\left(\sum_{n\geq 0} 4^n x^n\right)$$

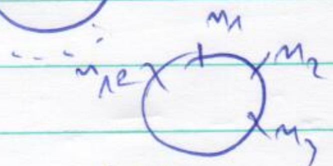
إذا،

$$\boxed{a_n = 4^{n+1} - 3\cdot 2^n}$$



(4) لنشكل الدوران C_{12} كما يلي:

وليكن توزيع الأعداد كما يلي:



أي العدد الموضوع على الرأس i هو n_i ،

حيث $\{n_i : 1\leq i\leq 12\} = \{1,2,\dots,12\}$

- نعتبر أن لدينا $n = 1+2+\dots+12 = 78$ من الكرات (الكرة ترمز للعدد "1")

وأنه قد تم توزيعها على $m = 4$ من الصناديق:

- الصندوق S_1 ، يمثل الرؤوس $1,2,3$
- الصندوق S_2 ، يمثل الرؤوس $4,5,6$
- الصندوق S_3 ، يمثل الرؤوس $7,8,9$
- الصندوق S_4 ، يمثل الرؤوس $10,11,12$ ،

- من مبدأ برج الحمام، يوجد صندوق يحتوي على الأقل على $N = \left\lceil\frac{n-1}{m}\right\rceil+1 = 20$ من الكرات، وبالتالي توجد 3 رؤوس متعاقبة مجموع محتوياتها أكبر من أو يساوي 20.