Suppose $f(z)$ is entire and $|f(z)| > 1$ for all z. Show that f is a constant.

Answer. Since $|f(z)| > 1$ we know f is never 0. Therefore $1/f(z)$ is entire and $|1/f(z)| < 1$. Being entire and bounded it is constant by Liouville's theorem.

ع٩: لتكن $u = Re f$ $\Leftarrow$ $|u| \le u_0$. اعتبر الدالة $e^{f(z)}$:

$|e^{f(z)}| = e^{u} \le e^{u_0}$ $\Leftarrow$ $e^{f(z)}$ دالة محدودة لكل $z \in \mathbb{C}$ ،

وهي كلية ، وحسب نظرية ليوفيل : $e^{f(z)}$ ثابتة أي : $e^{f(z)} = c$

وبالاشتقاق : $f'(z) \cdot e^{f(z)} = 0$ $\Leftarrow$ $f'(z) = 0$ لكل $\Leftarrow$ $f(z) = c$ ثابتة

$\Leftarrow$ $Re(f) = u$ ثابتة

لا يكتب في هذا الهامش

ج ١: باستخدام متباينة كوشي $|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\,M}{r_0^n}$ حيث

$C_0 = \{ z : |z - z_0| = r_0 \}$

و f تحليلية على وداخل C_0 بالاتجاه الموجب و $|f(z)| \le M$ لكل z على C_0.

لتكن z_0 أي عدد اختياري من $\mathbb{C}$ ، واعتبر $C_0 = \{ z : |z - z_0| = r_0 \}$ من متباينة كوشي:

$$(z \in C_0 \text{ حيث}) \quad |f^{(3)}(z_0)| \le \frac{3!\,M}{r_0^3} = \frac{6 \cdot |z|^2}{r_0^3} \le \frac{6\left[|z-z_0| + |z_0|\right]^2}{r_0^3} = \frac{6\left[r_0 + |z_0|\right]^2}{r_0^3}$$

r_0 اختياري فيمكن نأخذه يؤول إلى ∞ : $\Leftarrow \frac{6[r_0+|z_0|]^2}{r_0^3} \to 0$

$\Leftarrow f^{(3)}(z_0) = 0 \Leftarrow f''(z_0) = c$ (c ثابت).

$\Leftarrow f''(z) = c \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (z_0 لأن اختياري من $\mathbb{C}$)

$\Leftarrow f'(z) = c \cdot z + b$

$\Leftarrow f(z) = c \cdot \frac{z^2}{2} + bz + d$

لكن من المتراجحة المعطاة ($|f(z)| \le |z|^2$) نحصل على:

$$0 \le |f(0)| \le |0|^2$$

$$\Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + 0 + d$$

$$\Rightarrow f(z) = c\,\frac{z^2}{2} + bz$$

Scanned with CamScanner