

الاختبار النهائي 487 رياضالسؤال الاول

(ا) حل المعادلة $\sinh z = i$

(ب) اثبت ان $|\cosh z|^2 = (\sinh x)^2 + (\cos y)^2$ لكل $z \in \mathbb{C}$

(ج) جد كل قيم $(1+i)^i$

السؤال الثاني

(ا) جد النقاط التي تكون عندها الدالة $f(z) = (x^2 + xy) - i(y + 1)$ قابلة للاشتقاق

(ب) لتكن $\varphi(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + x + 1$. اثبت ان φ توافقية وجد المرافق التوافقي

السؤال الثالث

(ا) احسب $\int \bar{z}^2 dz$ على المسار $\gamma(t) = t + i(t^2 + 1)$, $0 \leq t \leq 1$.

(ب) اثبت ان $\int_C \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0$ حيث C القطع الناقص ذو المعادلة $4x^2 + 9y^2 = 1$.

السؤال الرابع

(ا) احسب $\int_{\gamma} \frac{\cos z dz}{(z-1)^3}$ حيث γ المثلث الموجه الذي رؤوسه $(0,0)$ $(2,2)$ $(2,-2)$.

(ب) اثبت ان $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$, $0 < r < 1$.

السؤال الخامس

ملاحظة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} f\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)$$

و $a+bt$ و $a+bt$ و $a+bt$ و $a+bt$ و $a+bt$

المسألة الأولى

$$f(z) = |z|^{-a} \rightarrow f(z) = |z|^{-a}$$

نريد إيجاد قيمة التكامل $\int_{\gamma} f(z) dz$ و γ دائرة نصف قطرها R في المستوى العقدي.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} R^{-a} i R e^{i\theta} d\theta = i R^{1-a} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0$$

نتيجة المسألة الأولى

$$\int_{\gamma} |z|^{-a} dz = 0 \text{ لكل } a < 1 \text{ و } |z| < R$$

المسألة الثانية

$$f(z) = |z|^{-a}$$

$$\int_{\gamma} \frac{z+2}{z(z-1)^2} dz$$

نريد إيجاد قيمة التكامل $\int_{\gamma} f(z) dz$ و γ دائرة نصف قطرها $R > 1$ في المستوى العقدي.

$$f(z) = \frac{z+2}{z(z-1)^2}$$

المسألة الثالثة

السؤال الثالث

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3} (1 + ab) e^{-ab}$$

حيث $a > 0$ و $b > 0$.