الاختبار الفصلي الثاني　　　487 ريض　　　الفصل 2، 1436-37

ملاحظة: رتب أجوبتك في الدفتر بحسب ترتيب ورود الأسئلة.

الرجاء إغلاق الجوال و تسليمه إلى المراقب لحين انتهاء الاختبار.

1- احسب جميع قيم z التي تحقق $\sin(z) = 2$.

2- جد جميع القيم الممكنة للتكامل $\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt$ ، حيث m و n عددان صحيحان.

3- إذا كانت f دالة متصلة على المجال D بحيث $\int_\alpha f(z)dz = 0$ لكل منحنى بسيط مغلق α داخل D ، فأثبت وجود دالة تحليلية $F(z)$ على D بحيث $F'(z) = f(z)$. هل الدالة F وحيدة ؟

4- احسب قيمة التكامل $\int_\alpha \frac{e^z}{z^4 - 1} dz$ ، حيث α هي الدائرة $|z| = 2$ بالاتجاه الموجب.

5- إذا كانت f تحليلية على القرص $D(z_0, r)$ بحيث $|f(z)| \le |f(z_0)|$ لكل z في القرص، فأثبت أن f لا بد أن تكون ثابتة.

(1)

$$\sin(z) = 2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$

$$\Longleftrightarrow e^{iz} - 4i - e^{-iz} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(e^{iz}\right)^2 - 4i\left(e^{iz}\right) - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow e^{iz} = \frac{1}{2}\left(4i + \left((4i)^2 - 4(1)(-1)\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\cancel{= 2i}$$

$$= \frac{1}{2}\left(4i + \left(-12\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2i + (-3)^{\frac{1}{2}}$$

ونجد أن

$$z = \frac{1}{i}\log\left(2i + (-3)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -i\log\left(2i \pm \sqrt{3}\, i\right)$$

$$= -i\left(\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

لا يكتب في
هذا الهامش

ج

إذا كان $n \neq m$ فلدينا :

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt$$

$$= \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)t} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0 .$$

إذا كان $n = m$ فلدينا :

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi .$$

٣

لتكن $z_0 \in D$

~~بما أن D مترابط فيه بمنحنى بين z_0~~

بما أن D مترابط فبين ~~أي~~ z_0 وأي نقطة من D يوجد منحنى بينهما.

لكل نقطة ~~$z \in D$~~ $z \in D$ لنعتبر منحنى α_z يصل بين z_0 و z

(يمكن بمسلمة الاختيار)

لنعرف الدالة

$$F(z) = \int_{\alpha_z} f(t)\,dt$$

(التكامل موجود لأن الدالة متصلة)

سنثبت أن

$$\int_{\alpha_z} f(t)\,dt = \int_{\alpha} f(t)\,dt$$

لكل منحنى α يصل بين z_0 و z.

لنعتبر ~~$\alpha_z \oplus \alpha$~~ $\alpha_z \oplus (-\alpha)$. هذا المنحنى مغلق، وبالتالي من فرض المسألة لدينا

$$\int_{\alpha_z \oplus (-\alpha)} f(t)\,dt = 0$$

$$\iff \int_{\alpha_z} f(t)\,dt - \int_{\alpha} f(t)\,dt = 0$$

$$\iff \int_{\alpha_z} f(t)\,dt = \int_{\alpha} f(t)\,dt$$

سنثبت الآن أن F تحليلية وأن $F'(z)=f(z)$ على D

ليكن $\varepsilon>0$.

ليكن $z\in D$. ليكن $\Delta z_1\in\mathbb{C}^*$ بحيث $\overline{D(z,|\Delta z_1|)}\subseteq D$.

الدالة f متصلة بانتظام على $\overline{D(z,|\Delta z_1|)}$ لأن $\overline{D(z,|\Delta z_1|)}$ متراصة (compact).

ليكن $\delta>0$ يحقق

$$|f(a)-f(b)|<\varepsilon$$

لكل $a,b\in\overline{D(z,|\Delta z_1|)}$ تحقق $|a-b|<\delta$

ليكن $\Delta z\in\mathbb{C}^*$ تحقق

$$|\Delta z|<\min(\delta,|\Delta z_1|)$$

ليكن α_1 منحنى يصل z_0 بـ z و α_2 هو القطعة المستقيمة التي تصل z بـ $z+\Delta z$

(لأن $\overline{D(z,|\Delta z|)}\subseteq D$) .

ليكن $\beta=\alpha_1\oplus\alpha_2$ ، وهو منحنى يصل z_0 بـ $z+\Delta z$.

فلدينا:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{\int_\beta f(t)\,dt-\int_{\alpha_1} f(t)\,dt}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{\alpha_2} f(t)\,dt$$

لدينا

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_2} f(t)\,dt - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_2} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_2} f(z)\,dt \right|$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|} \int_{\alpha_2} |f(t) - f(z)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_2} \varepsilon\,dt$$

صورة α_2

(لأن $\subseteq D(z, |\Delta z|)$ و $|\Delta z| < \delta$)

$= \varepsilon.$

إذاً، لكل ~~Δz~~ $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta_1 > 0$ يحقق

~~$F(z+$~~

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon \quad \forall\ |\Delta z| < \delta_1$$

(في هذه الحالة $\delta_1 = \min(\delta, |\Delta z_1|)$)

إذاً،

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

أي

$$F'(z) = f(z)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

وهذه العبارة صحيحة لكل $z \in D$, D مفتوحة إذا Γ تكاملية.

٤

لتكن

$$d = \frac{1}{3}\min\left(\begin{array}{l} |1-(-1)|,\ |1-i|,\ |1-(-i)|,\ |-1-i|,\ |-1-(-i)|, \\ |i-(-i)|\ ,\ d(1,\alpha),\ d(-1,\alpha),\ d(i,\alpha),\ d(-i,\alpha) \end{array} \right)$$

حيث $d(x,\alpha)$ تعني المسافة بين النقطة x والمنحنى α.

من نظرية كوشي للمجالات متعددة الترابط.

$$\int_{\alpha} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \int_{C(1,d)} \frac{e^z\,dz}{z^4-1} + \int_{C(-1,d)} \frac{e^z\,dz}{z^4-1} + \int_{C(i,d)} \frac{e^z\,dz}{z^4-1}$$

$$+ \int_{C(-i,d)} \frac{e^z\,dz}{z^4-1}.$$

لا يكتب في هذا الهامش

حيث $\mathcal{C}(x,d)$ هي الدائرة التي مركزها x ونصف قطرها d بالاتجاه الموجب.

لدينا

$$\int_{\alpha} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \int_{\mathcal{C}(1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z+1)(z+i)(z-i)}\right)}{z-1}\,dz + \int_{\mathcal{C}(-1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-1)(z+i)(z-i)}\right)}{z+1}\,dz$$

$$+ \int_{\mathcal{C}(i,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z+i)}\right)}{z-i}\,dz$$

$$+ \int_{\mathcal{C}(-i,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z-i)}\right)}{z+i}\,dz$$

من صيغة كوشي التكاملية

$$\int_{\mathcal{C}(1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z+1)(z+i)(z-i)}\right)}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^1}{(2)(1+i)(1-i)} = \frac{\pi i e}{2}$$

$$\int_{\mathcal{C}(-1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-1)(z+i)(z-i)}\right)}{z+1}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^{-1}}{(-2)(-1+i)(-1-i)} = -\frac{\pi i e^{-1}}{2}$$

$$\int_{\mathcal{C}(-i,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z-i)}\right)}{z+i}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^{-i}}{(-i-1)(-i+1)(-2i)} = \frac{\pi e^{-i}}{2}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

$$\int_{C(i,d)} \frac{\left(\frac{e^{z}}{(z-1)(z+1)(z+i)}\right)}{z-i}\,dz = 2\pi i \frac{e^{i}}{(i-1)(i+1)(2i)}$$

$$= -\frac{\pi e^{i}}{2}$$

$$\int_{\alpha} \frac{e^{z}}{z^{4}-1}\,dz = \frac{\pi i e}{2} - \frac{\pi i e^{-1}}{2} + \frac{\pi e^{-i}}{2} - \frac{\pi e^{i}}{2}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

~~5~~

~~تمهيدية:~~

~~لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة متصلة ... إذا كانت~~

$\int f$

5

تمهيدية: ليكن $a, b \in \mathbb{R}$

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة متصلة، إذا كانت $f(x) \geq 0$
لكل $x \in [a,b]$ فإن

$$\int_a^b f = 0 \Longrightarrow f \neq 0 \text{ على } [a,b].$$

البرهان:

لنفرض وجود $x_0 \in (a,b)$ بحيث أن $f(x_0) \neq 0$ أي $f(x_0) > 0$

من اتصال f، يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,b]$

$f(x) \neq 0$ لكل $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

لتكن $a, b \in \mathbb{R}$

(٥) لتكن $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ دالة متصلة، بحيث

$f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$، $\int_a^b f = 0$ ، بين أن

$f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$.

البرهان:

لنفرض وجود $x_0 \in (a,b)$ بحيث أن $f(x_0) \neq 0$ ، فإن

$f(x_0) > 0$. من اتصال f ، يوجد $\delta > 0$ يحقق $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,b]$

$f(x) \neq 0$ لكل $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ ، فنكون $f(x) > 0$ لكل

$x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

بما أن $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ متراصة ، فللدالة f قيمة صغرى عليها، لتكن

m ، وبما أن $f(x) > 0$ لكل $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ ، فإن $m > 0$.

إذاً:

$$0 = \int_a^b f = \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^b f$$

$$\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} m + 0$$

$$= 2\delta m > 0$$

وهذا تناقض!

إذاً $f(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$ ، ومنه نجد أن

$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x) = 0$ و $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = 0$

إذاً $f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$.

إجابة السؤال 5

~~من صيغة كوشي التكاملية لدينا~~

$$\cancel{f(z_0) = \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$$

~~حيث α هو الدائرة التي مركزها~~

~~لنفرض~~

ليكن $0 < d < r$

ليكن α_d هو الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها d

من صيغة كوشي التكاملية لدينا

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_d} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{2\pi} \frac{f(z_0 + d e^{it})}{d e^{it}} (d i e^{it})\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + d e^{it})\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + d e^{it})\, dt.$$

إذاً:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+de^{it})\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+de^{it})|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt$$

$$= |f(z_0)|$$

إذاً:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+de^{it})|\,dt = |f(z_0)|$$

والذي يكافئ

$$\int_0^{2\pi}\left(|f(z_0)| - |f(z_0+de^{it})|\right)dt = 0$$

بما أن $|f(z_0)| \geq |f(z_0+de^{it})|$ لكل $t\in[0,2\pi]$ وهي متصلة فمن النظرية نجد أن

$|f(z_0)| = |f(z_0+de^{it})|$ لكل $t\in[0,2\pi]$

أي $|f(z_0)| = |f(z)|$ لكل $|z_0-z|=d$.

بما أن هذا صحيح لكل $0<d<r$ فإن

$|f(z_0)| = |f(z)|$ لكل $z\in D(z_0,r)$.