كويز 3- مقرر 487 ريض– ف1--1445 هـ- أ. فواز بن سعود العتيبي اسم الطالب: الرقم الجامعي:		$\overline{}$ 5

1. - جد مفكوك لوران للدالة $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ في الطوق $|z|>2$ ، ثم استخدم المفكوك لحساب $\int_\alpha \dfrac{z^4 dz}{z^2+3z+2}$ ، حيث α هي الدائرة $|z|=3$ بالاتجاه الموجب.

2. لدينا الدالة : $f(z)=\dfrac{e^{i3z}}{(z^2+4)^2}$. ماهي النقاط الشاذة المعزولة ؟ و صنفها و أوجد راسب الدالة عند كلٍ منها .

الحلول: **ج1:**

الحلول:

(1

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{A}{(z+1)}+\frac{B}{(z+2)}$$

$$\Rightarrow 1=A(z+2)+B(z+1)$$

put $z=-2 \Rightarrow 1=A(0)+B(-1) \Rightarrow 1=-B \Rightarrow B=-1$

put $z=-1 \Rightarrow 1=A(1)+B(0) \Rightarrow 1=A \Rightarrow A=1$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2} \Rightarrow f(z)=\frac{1}{z(1-(\frac{-1}{z}))}-\frac{1}{z(1-(\frac{-2}{z}))}$$

$|u|<1,\ \frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$. تحقق $|z|>2 \Rightarrow \frac{1}{|z|}<\frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{|z|}<1$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z)=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}(1-2^n)}\ ,\ \int_\alpha\frac{z^4\,dz}{z^2+3z+2}=\int_\alpha\frac{f(z)\,dz}{z^{-4}}=2\pi i\,C_n$$

حيث $n+1=-4 \Leftarrow n=-5$

ضع هنا $n=4$

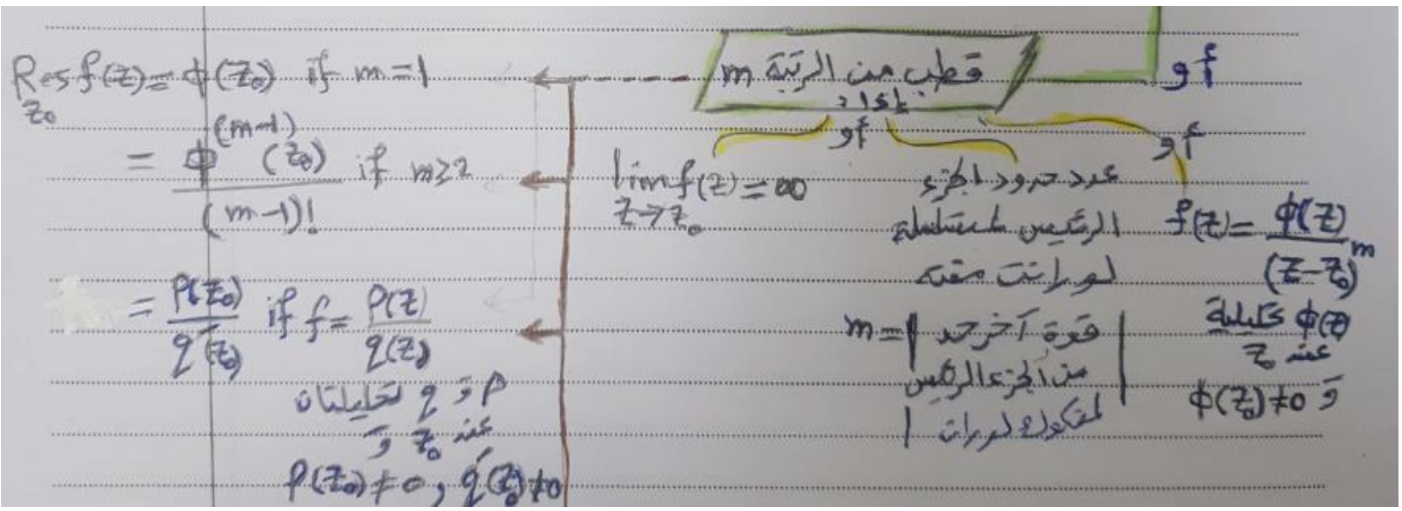
$$\int_\alpha\frac{f(z)\,dz}{z^{-4}}=2\pi i\,C_{-5}=2\pi i(-15)=\boxed{-30i\pi}$$

و لحساب التكامل استخدما النظرية التالية:

بيِّن كيف يمكن أن تثبت ما يلي: اذا كانت f تحليلية على الطوق $D(z_0, r_1, r_2)$ ، فإنه لأي z في الطوق $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z - z_0)^n$ حيث $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}}$ ، لكل $n \in \mathbb{Z}$ و γ منحنى بسيط مغلق داخل الطوق بالاتجاه الموجب.

ج2:

لحل السؤال نطبق المعلومة التالية عن الأقطاب



لا يكتب في هذا الهامش

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{[(z-2i)(z+2i)]^2} = \frac{e^{i3z}}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$$

النقاط الشاذة المعزولة هي $z=2i,\ z=-2i$

أولاً: بالنسبة لـ $z=2i$ ← $f(z) = \dfrac{\dfrac{e^{i3z}}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2}$ ، $\phi(z) = \dfrac{e^{i3z}}{(z+2i)^2}$

$\phi(z)$ تحليلية عند $z=2i$ و $\phi(2i) \neq 0$

$\therefore$ $2i$ قطب من الرتبة 2

$$\phi'(z) = \frac{(z+2i)^2 \cdot 3i e^{3iz} - e^{i3z} \cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^4}$$

$$\phi'(2i) = \frac{(4i)^2 \cdot 3i e^{-6} - e^{-6} \cdot 2 \cdot 4i}{(4i)^4}$$

$$= \frac{-48ie^{-6} - 8ie^{-6}}{256} = \frac{-56ie^{-6}}{256}$$

$$= \boxed{\frac{-7i}{32}e^{-6}}$$

الباقي لـ f عند $2i$

$$B(2i) = \frac{\phi'(2i)}{(2-1)!} = \frac{-7i}{32}e^{-6}$$

ثانياً: بالنسبة لـ $z=-2i$ ← $f(z) = \dfrac{\dfrac{e^{i3z}}{(z-2i)^2}}{(z+2i)^2}$ ، $\phi(z) = \dfrac{e^{i3z}}{(z-2i)^2}$

$\phi(z)$ تحليلية عند $z=-2i$ و $\phi(-2i) \neq 0$

$\therefore$ $-2i$ قطب من الرتبة 2

$$\phi'(z) = \frac{(z-2i)^2 \cdot 3ie^{i3z} - e^{i3z} \cdot 2(z-2i)}{(z-2i)^4}$$

$$\phi'(-2i) = \frac{(-4i)^2 \cdot 3ie^{6} - e^{6} \cdot 2(-4i)}{(-4i)^4}$$

$$= \frac{-48ie^{6} + 8ie^{6}}{256} = \frac{-40ie^{6}}{256}$$

$$= \boxed{\frac{-5ie^{6}}{32}}$$

الباقي لـ f عند $-2i$

$$B(-2i) = \frac{\phi'(-2i)}{(2-1)!} = \frac{-5ie^{6}}{32}$$