جامعة الملك سعود

كلية العلـــــــــوم

قسم الرياضيـــــات

تمارين 151 ريض

نظرية الرسومات

GRAPH THEORY

(5.5)

الأشجار

(خواص أساسية & أشجار التقصي)

TREES - BASIC PROBERIES

&

SEARCH TREES

Malek Zein AL-Abidin

1440 هـ

2018

Math151 Malek Zein AL-Abidin

الأشجار- خواص أساسية

TREES - BASIC PROBERIES

مقدمة: الأشجار عائلة من الرسومات البسيطة التركيب والتي لها مجال واسع من التطبيقات العملية، منها على سبيل المثال

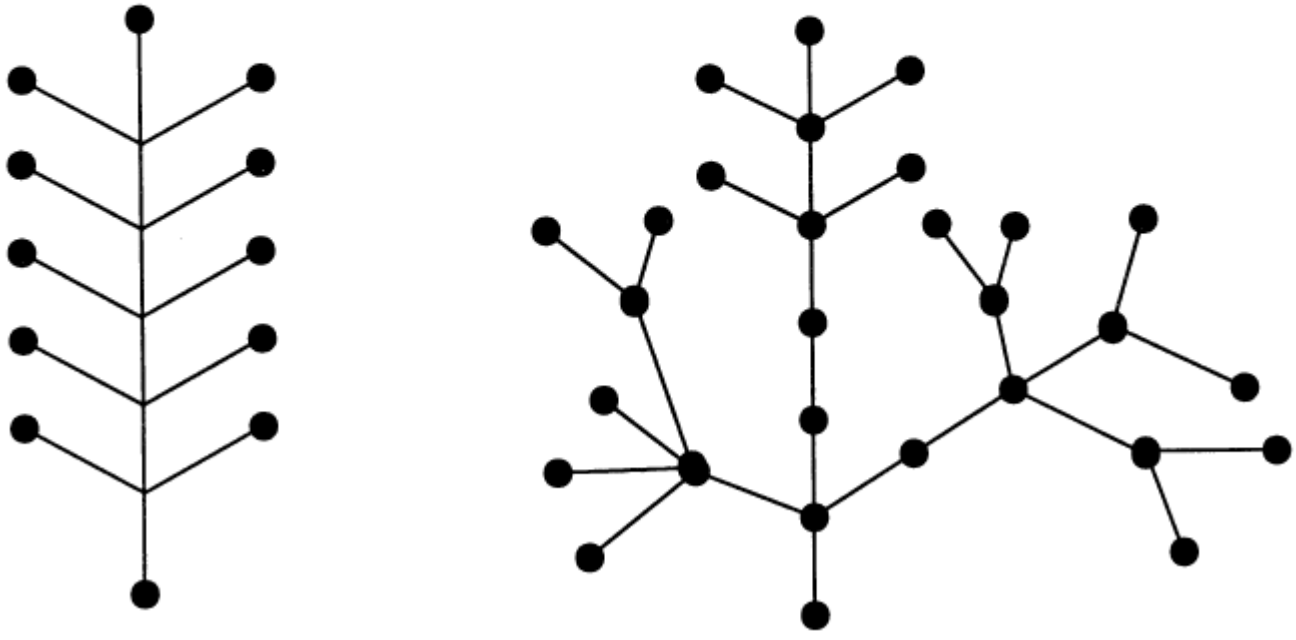
- إيجاد عدد بعض الأنماط من المركبات الكيميائية .
- إنشاء خوارزميات فعالة لإيجاد معلومة معينة في قائمة البيانات .
- إنشاء شبكات بأقل تكلفة ممكنة .
- إنشاء شفرات فعالة في تصنيف و فرز و إرسال البيانات .
- ترتيب هرمية الموظفين في المؤسسات الكبيرة .
- ترتيب الملفات في الحواسيب .

تعريف(1) : ليكن $G = (V, E)$ رسماً بسيطاً . نقول إن G غابة (*forest*) إذا كان G لا يحتوي على دورات .

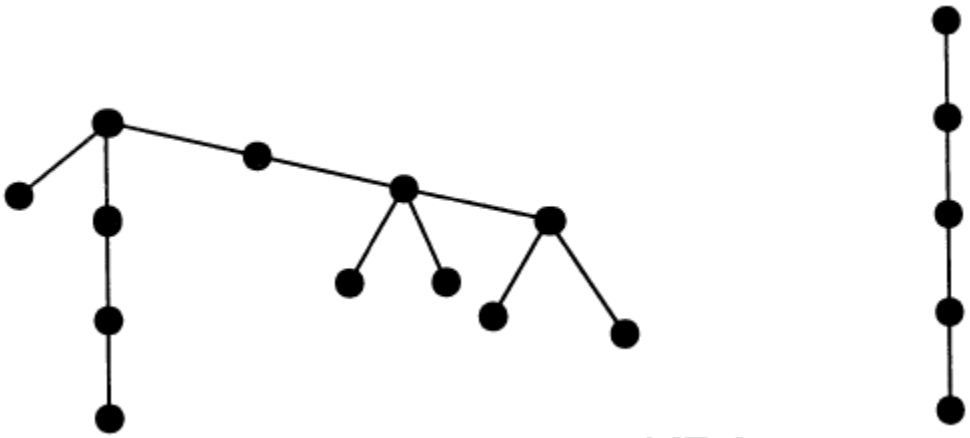
تعريف (2) : ليكن $G = (V, E)$ رسماً بسيطاً . نقول إن G شجرة (*tree*) إذا كان G مترابطاً و لا يحتوي على دورات .

مثال (1) :

الشكل أدناه يبين لنا غابة تحتوي على أشجار:



Malek Zein AL-Abidin



من الشكل أعلاه يتبين لنا أن الغابة هي مجموعة من الأشجار غير مترابطة .

مبرهنة(1) : إذا كانت $T = (V, E)$ شجرة حيث $|V| > 1$ فإنه يوجد على الأقل رأسان في T درجة كل منهما تساوي 1 .

مبرهنة(2) : لكل عدد صحيح $n \geq 1$ ، كل شجرة عدد رؤوسها n يكون عدد أضلاعها $n - 1$.

مبرهنة(3) : ليكن $T = (V, E)$ رسماً مترابطاً حيث $|V| = n$. عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان $|E| = n - 1$.

مبرهنة(4) : ليكن $T = (V, E)$ رسماً لا يحتوي على دورات بحيث $|V| = n$. عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان $|E| = n - 1$.

مبرهنة(5) : ليكن $T = (V, E)$ رسماً مترابطاً . عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان كل ضلع في T جسراً .

مبرهنة(6) : ليكن $T = (V, E)$ رسماً بسيطاً . عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا وجد ممر وحيد من x إلى y لكل $x, y \in V$ ، $x \neq y$.

مبرهنة(7) : ليكن $T = (V, E)$ رسماً . عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان T لا تحتوي على دورات و كان T يحقق الشرط التالي : إن إضافة ضلع جديد إلى E تجعلنا نحصل على رسم يحتوي على دورة وحيدة .

Math151 Malek Zein AL-Abidin

Exercises (5.5)

(1) عين جميع الأشجار غير المتماثلة التي تحتوي على ثلاثة رؤوس فقط.

Q1. List all nonisomrphic tress with only 3 vertices?

---

(2) عين جميع الأشجار غير المتماثلة التي تحتوي على أربعة رؤوس فقط.

Q2. List all nonisomrphic tress with only 4 vertices?

---

(3) عين جميع الأشجار غير المتماثلة التي تحتوي على خمسة رؤوس فقط.

Q3. List all nonisomrphic tress with only 5 vertices?

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(4) عين جميع الأشجار غير المتماثلة التي تحتوي على ستة رؤوس فقط.

Q4. List all nonisomrphic tress with only 6 vertices?

---

(5) عين جميع الأشجار غير المتماثلة التي تحتوي على سبعة رؤوس فقط.

Q5. List all nonisomrphic tress with only 7 vertices?

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(6) إذا كانت $T = (V, E)$ شجرة حيث $|V| > 1$ فأثبت أن T رسم ثنائي التجزئة .

Q6. Let $T=(V,E)$ be a tree where $|V| > 1$, Show that T is a bipartite graph .

---

(7) إذا كان G رسماً لا يحتوي على دورات و عدد رؤوسه n و عدد مركباته k فأثبت أن عدد أضلاعه $n - k$

Q7. Let G be a graph that does not contain cycles and the number of vertices is n and the number of its components is k. Prove that the number of edges is $n-k$.

الإثبات :

Math151 Malek Zein AL-Abidin

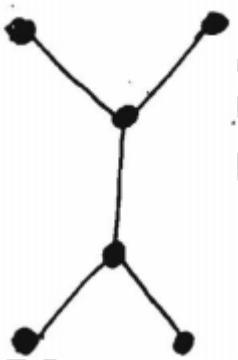
(8) أي من الرسومات $K_{m,n}$ شجرة ؟ و لماذا؟

Q8. Which of the graphs $K_{m,n}$ are trees? Explain the answer.

---

(9) هل يوجد شجرة متتالية درجاتها : 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 3 ، 3 ؟ علل إجابتك .

Q9. Is there a tree with the given degree sequence : 1, 1, 1, 1, 3, 3? Explain the answer.



---

(10) ليكن $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً . نقول إن G وحيد الدورات إذا احتوى على دورة واحدة فقط . أبثت أن G وحيد الدورات إذا و فقط إذا كان $|V| = |E|$.

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(11) بين صحة أو خطأ كل واحدة من العبارات التالية مع التعليل:

Q11. correct or correct each of the following statements with explanation:

(أ) كل رسم غير بسيط يحتوي على دورة . Each non-simle graph contains a cycle

.

(ب)كل رسم تام ثنائي التجزئة . Each complete graph is a bipartite

(ج)كل رسم منتظم من النوع واحد شجرة . Each regular graph with degree 1 is a tree

(د)الرسم المتمم لكل شجرة هو شجرة .

The complementary graph of each tree ia also tree .

---

(12) أوجد العدد الصحيح k إذا علمت أنه توجد شجرة متتالية درجات رؤوسها $1,1,1,1,2,2,k,2k$

Q12. Find the integer k if you know that there is a tree with the given degree sequence $1,1,1,1,2,2,k,2k$

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(13) ارسم كل الغابات غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 4 .

Q13. Draw all ***nonisomorphic*** forests with a number of vertices each 4.

---

(14) جد مع التعليل، عدد رؤوس الشجرة التي فيها درجة أحد الرؤوس 31 و درجة كل رأس آخر 1 .

Q14. Find The number of vertices of a tree with the degree of a vertex 31 and the degree of each other vertex is 1. Explain the answer?

---

(15) إذا كانت T شجرة درجات رؤوسها هي : $1,1,1,1,3,d$ فأوجد قيمة d ؟

Q15. Find the integer d if you know that there is a tree with the given degree sequence : $1,1,1,1,3,d$

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(16) إذا كانت T شجرة تحتوي بالضبط 20 رأساً درجة كل واحد منها 2 و x رأساً درجة كل واحد منها 1 ، فأوجد x .

Q16. Let T be a tree contains exactly 20 vertices the degree of each of them is 2 and x vertices the degree of each of them is1, find x ?

---

(17) إذا كانت T شجرة درجات رؤوسها هي : $1,1,1,1,4,d, d ,d$ فأوجد قيمة d ؟

Q17. Find the integer d if you know that there is a tree with the given degree sequence : *1,1,1,1,4,d,d,d*

---

(18)

أي من التقارير التالية خاطئ :

(أ) $K_{3,3}$ رسم منتظم (ب) $K_{3,3}$ ليس شجرة (ج) $K_{3,3}$ رسم مترابط (د) متمم $K_{3,3}$ رسم غير منتظم

---

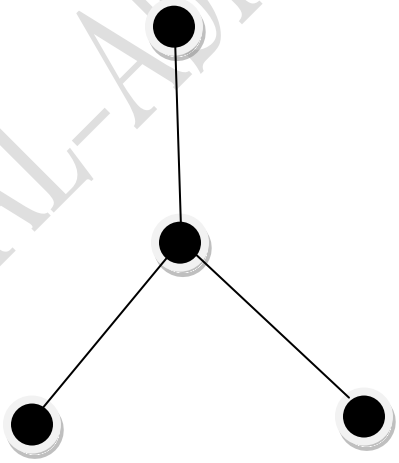
(19) بين صحة أو خطأ كل من التقريرين التاليين, مع التعليل :

(أ)كل رسم بسيط $G = (V, E)$ فيه $|V| = n$ بحيث $|E| = n - 1$ هو شجرة .

Math151 Malek Zein Al-Abidin

(ب)لا يوجد جسور في أي رسم تام K_n $(n \geq 1)$.

(22) بين فيما إذا كان متمم الشجرة الموضحة أدناه، هو شجرة أيضاً



(23) حدد قيم n التي يكون فيها الرسم التام K_n شجرة .

Math151 Malek Zein AL-Abidin

الأشجار المولدة & أشجار التقصي

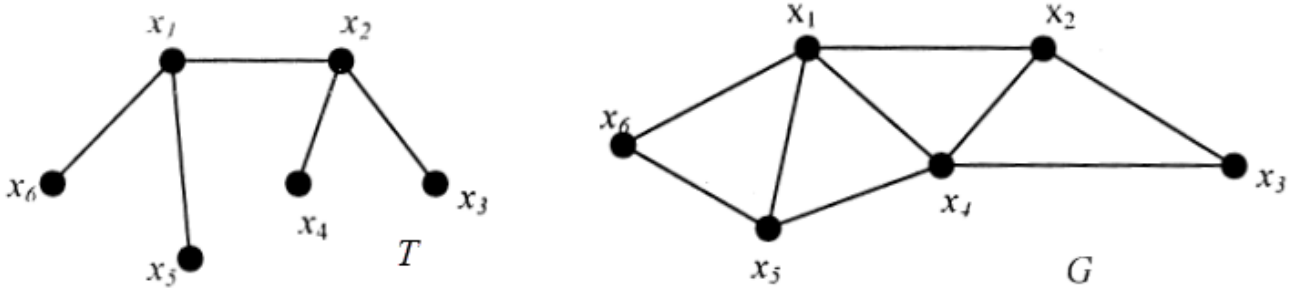
SPANNING TREES & FIRST SEARCH TREES

في هذا الجزء سندرس مسألة إيجاد رسم جزئي T من رسم G بحيث يكون T شجرة تحتوي على جميع رؤوس G . يسمى هذا الرسم T ، شجرة مولّدة (*Spanning Tree*) للرسم G .

مثال (1)

الرســـم G المعطـــى في الشكل أدناه يمثل شبكة طرق بين المدن المبينة . إذا أرادت وزارة الأشغال إعادة تخطيط شبكة الطرق بحيث يمكن الوصول من أي مدينة إلى أي مدينة أخرى ضمن الشبكة فما هو أقل عدد من الطرق التي يجب أن تبقى سالكة؟

الحل

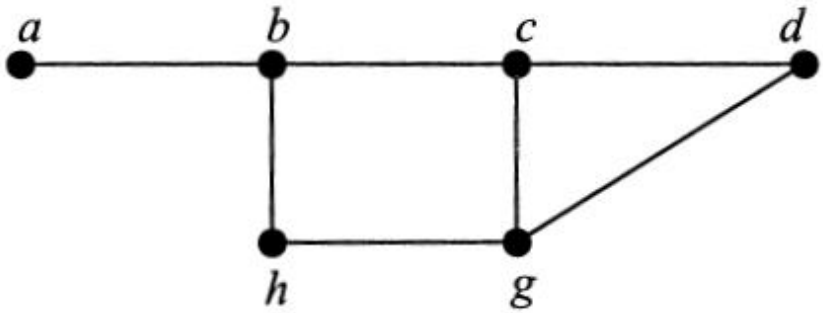


مبرهنة

يوجد شجرة مولدة للرسم G إذا وفقط إذا كان G رسماً مترابطاً.

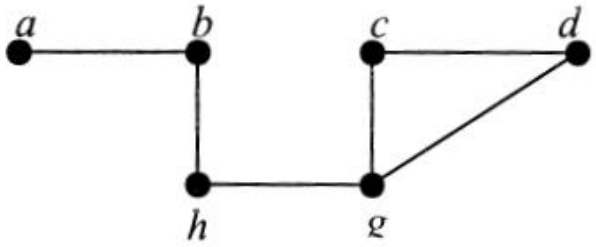
مثال (2)

جد شجرة مولّدة للرسم G حيث G هو الرسم المبين في الشكل أدناه :

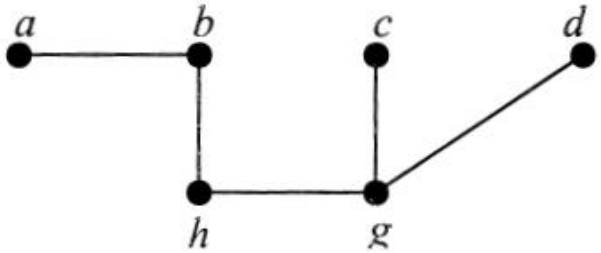


الحل

سنستخدم الرؤوس للتعبير عن الدورات. نختار الدورة b, h, g, c, b ونحذف أحد أضلاعها وليكن $\{b,c\}$ فنحصل على الرسم المبين في الشكل A . الآن نختار دورة في الرسم الجديد ونحذف أحد أضلاعها. نحذف $\{c,d\}$ من الدورة c, g, d, c فنحصل على الرسم المبين في الشكل B .



شكل (A)

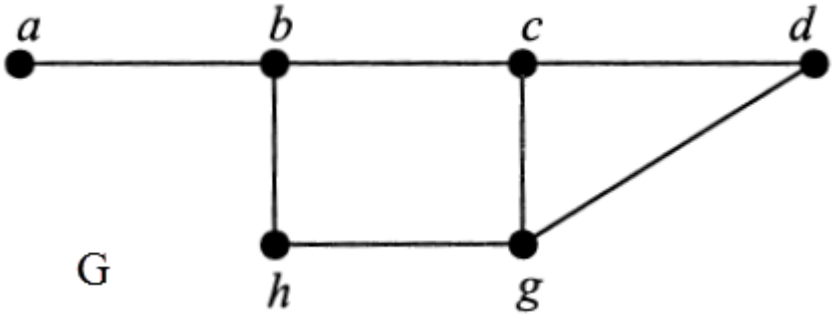


شكل (B)

مثال (3) :

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها g للرسم G أدناه .

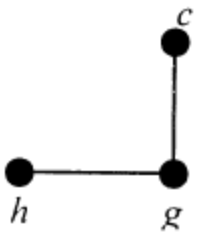
(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها g للرسم G أدناه .



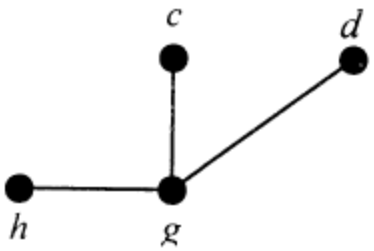
الحل

(أ)

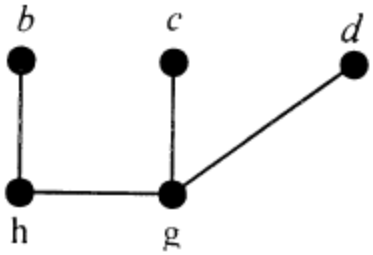
T_1 T_2



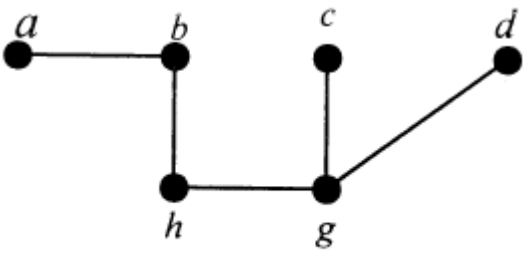
T_3



T_4



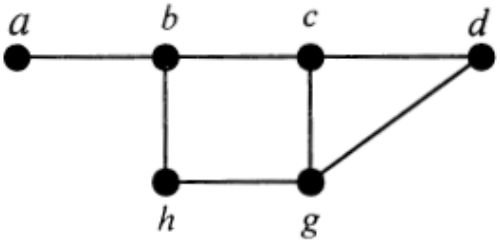
T_5



T_6

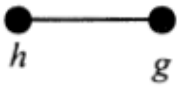
إن T_6 هي الشجرة المطلوبة.

(ب)

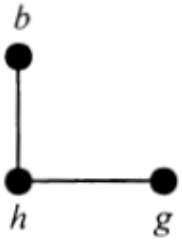


G

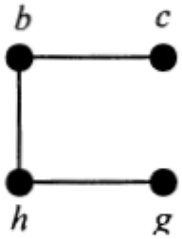
T_1



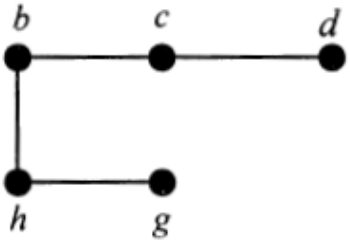
T_2



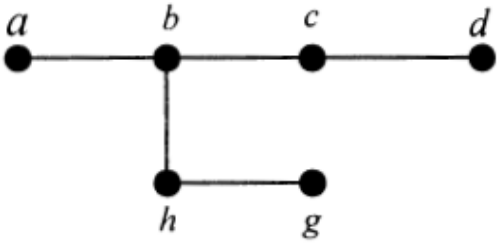
T_3



T_4



T_5



T_6

إن T_6 هي الشجرة المطلوبة.

Exercises

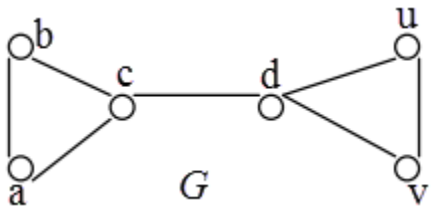
(1)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

Find the *Breadth-first search tree of root a for the graph G*

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

Find the *Depth -first search tree of root a for the graph G*



Math151 Malek Zein AL-Abidin

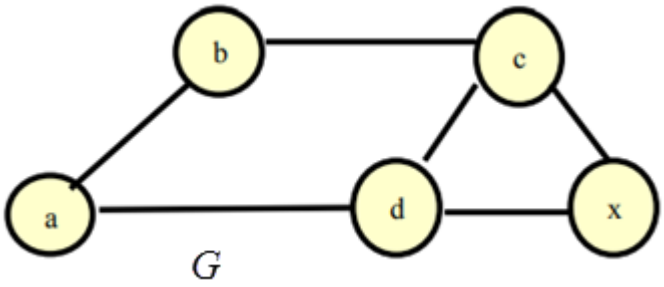
(2)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها x للرسم G أدناه .

Find the *Breadth-first search tree of root x for the graph G*

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها x للرسم G أدناه .

Find the *Depth -first search tree of root x for the graph G*



G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

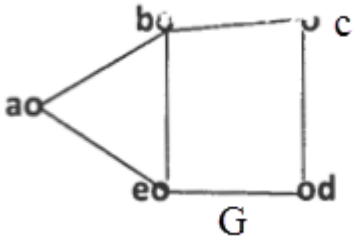
(3)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

Find the *Breadth-first search tree of root a for the graph G*

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

Find the *Depth -first search tree of root a for the graph G*



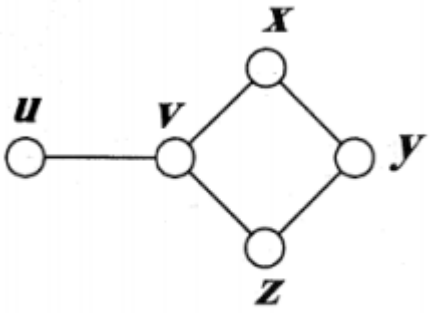
G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(4)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها $\boldsymbol{u}$ للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها $\boldsymbol{u}$ للرسم G أدناه .



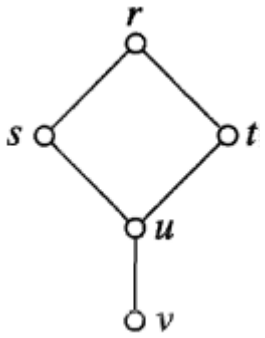
G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(5)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

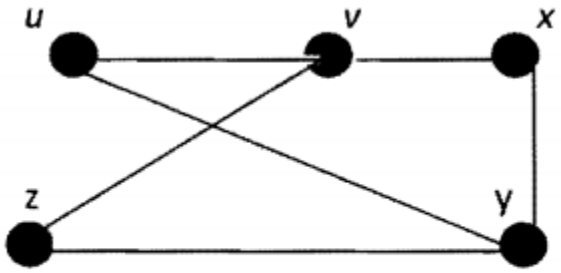


Math151 Malek Zein AL-Abidin

(6)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها u للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها u للرسم G أدناه .



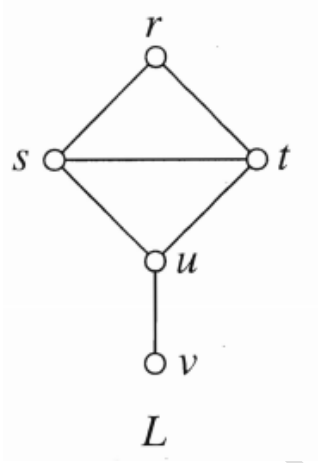
G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(7)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها r للرسم L أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها r للرسم L أدناه .

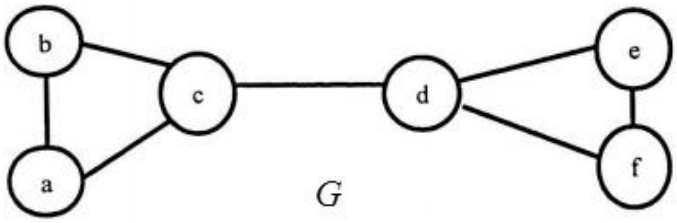


Math151 Malek Zein AL-Abidin

(8)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

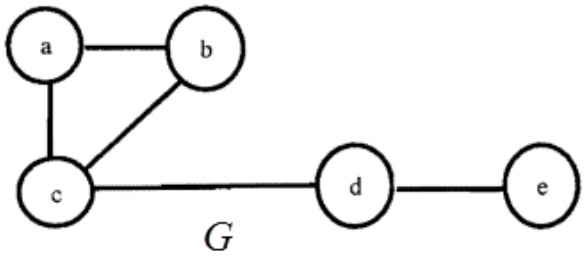


Math151 Malek Zein AL-Abidin

(9)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها d للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها d للرسم G أدناه .



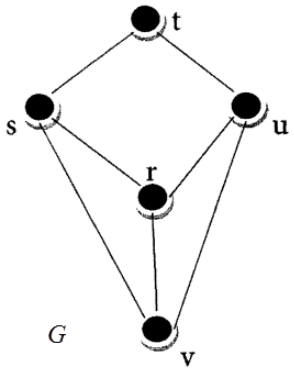
G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(10)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

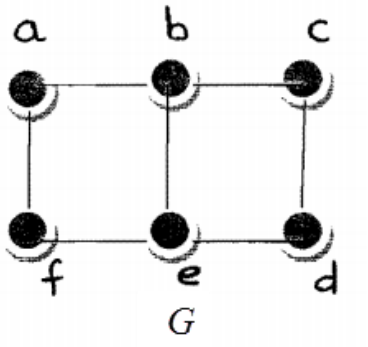


Math151 Malek Zein AL-Abidin

(11)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها b للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها b للرسم G أدناه .



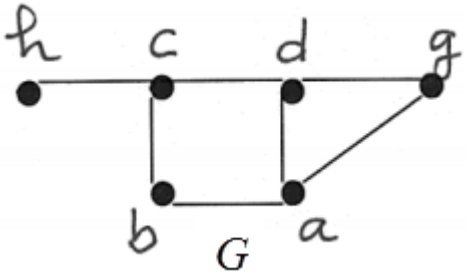
G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(12)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

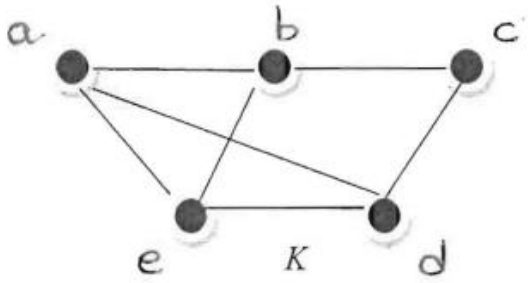


Math151 Malek Zein AL-Abidin

(13)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها a للرسم K أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها a للرسم K أدناه .

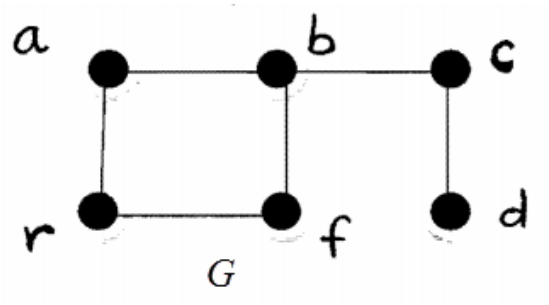


Math151 Malek Zein AL-Abidin

(14)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

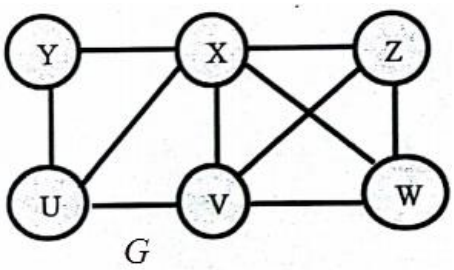


Math151 Malek Zein AL-Abidin

(15)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها x للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها x للرسم G أدناه .



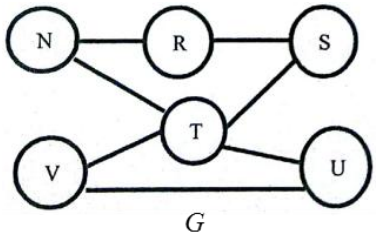
G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(16)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها R للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها R للرسم G أدناه .



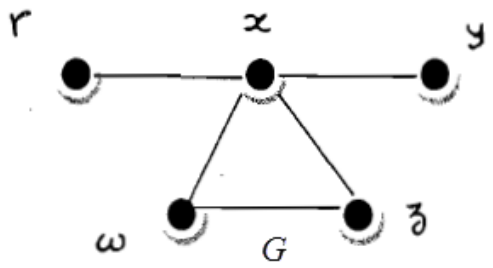
G

Math151 Malek Zein AL-Abidin

(17)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .



Math151 Malek Zein AL-Abidin