متتاليات ومتسلسلات الدوال

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

17 أوت 2023

المحتويات

متتاليات الدوال

تعريف

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على مجموعة A في $\mathbb{R}$.

1. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب نقطيا (أو تتقارب تقاربا بسيطا) على المجموعة A إذا كانت المتتالية $(f_n(x))_n$ متقاربة لكل $x \in A$.
2. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على المجموعة A و نهايتها دالة f إذا كان

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

ملاحظة

1. تكون المتتالية $(f_n)_n$ متتقاربة تقاربا بسيطا على المجموعة A و نهايتها الدالة f، إذا و فقط إذا كان لكل $x \in A$ و لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.
2. تكون المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على المجموعة A و نهايتها الدالة f إذا و فقط إذا كان لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ لكل $n \geq N$ و لكل $x \in A$.

مثال

1 لتكن $f_n(x) = x^n$ لكل $x \in I = [0,1]$ و لكل $n \in \mathbb{N}$. المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة و نهايتها الدالة f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

بما أنّ $\sup\limits_{x\in[0,1[} x^n = 1 = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ فإن المتتالية $(f_n)_n$ لا تتقارب بانتظام على الفترة $[0,1]$ و كذلك على الفترة $[0,1[$. و هي متقاربة بانتظام على كل فترة $[0,a]$، لكل $a \in [0,1[$. هذا لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,a]} x^n\right)$.

2. لتكن $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ لكل $x \in \mathbb{R}$. المتتالية متقاربة بانتظام و نهايتها الدالة الصفرية 0 على $\mathbb{R}$ لأن $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$.
3. لتكن $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$ لكل $x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. المتتالية متقاربة و نهايتها 0 على $\mathbb{R}^+$ و بما أن $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x) = 1$ ، فإن المتتالية ليست متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}^+$ و لكنها متقاربة بانتظام على كل فترة $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$.
4. لتكن $f_n(x) = xe^{-nx}$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$. بما أن $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x) = \frac{1}{n}$، فإن المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها 0 على $\mathbb{R}^+$.

5 لتكن $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.
المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة و نهايتها 0، و لكن $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{2e}$. إذًا المتتالية $(f_n)_n$ ليست متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$. من ناحية أخرى لكل $a > 0$، المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على الفترة $[a, +\infty[$ لأن $\sup_{x\in[a,+\infty[} f_n(x) = f_n(a)$ بعد حد.

إختبار كوشي للتقارب

مبرهنة

(معيار كوشي للتقارب المنتظم)
لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال معرفة على مجموعة جزئية مفتوحة Ω في $\mathbb{R}$.
المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على $A \subset \Omega$ إذا و فقط إذا

$$\lim_{p,q \to +\infty} \sup_{x \in A} |f_p(x) - f_q(x)| = 0.$$

و هذا متكافئ مع ما يلي:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists N,\ \forall\ n \geq N,\ \forall\ p \in \mathbb{N},\ \sup_{x \in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

ملاحظة

إذا كانت المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها الدالة f على Ω فإن لكل متتالية $A \subset \Omega$، $(x_n)_n \in A$، المتتالية $\big(|f_n(x_n) - f(x_n)|\big)_n$ تتقارب و نهايتها 0.
هذا لأنّ $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$.

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ على $\mathbb{R}$.
$f_n(0) = 0$، و لكل $x \neq 0$، $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. و لكن $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. إذاً التقارب غير منتظم
2. لتكن متتالية الدوال المعرفة بما يلي: $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$ لكل $x \in [0,1]$.
$f_n(0) = 0$ و لكل $x \neq 0$، $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1$. إذاً تقارب المتتالية $(f_n)_n$ على الفترة $[0,1]$ غير منتظم.

الإتصال و التقارب المنتظم

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على المجموعة $I =]a, b] \subset \mathbb{R}$، و متقاربة بانتظام و نهايتها f، حيث $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. نفترض أنّ $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \ell_n$ موجودة لكل n. إذاً المتتالية $(\ell_n)_n$ متقاربة و

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \ell_n.$$

و

$$\lim_{x \to a} \Big(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \Big) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\lim_{x \to a} f_n(x) \Big).$$

مثال

لتكن $f_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ $f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$.
الدالة $\frac{e^{-xt}}{t} \longrightarrow t$ تناقصية على الفترة $[n, m]$ و باستعمال مبرهنة (??) (الثاني: صيغة لمبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل) فإن

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left| \int_n^m \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \frac{e^{-xn}}{n}.2 \leq \frac{2}{n}.$$

إذاً $\sup_{x \in \mathbb{R}+} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{2}{n}$ ، و هذا يثبت أنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب على $\mathbb{R}^+$ و نهايتها الدالة f.

من ناحية أخرى $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t}\,dt$ لأنّ

$$\left|f_n(x) - \int_0^n \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leq xn \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

إذًا

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال معرفة على مجموعة مفتوحة $I \subset \mathbb{R}$. نفترض أنّ

1. المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها دالة f على كل فترة مغلقة $I \supset [a, b]$،
2. لكل $n \in \mathbb{N}$، الدالة f_n متصلة عندالنقطة $c \in I$.

إذاً الدالة f متصلة عندالنقطة c.

مثال

1 لتكن $f_n(x)=\displaystyle\int_0^n \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$.
ليكن $a>0$، $|f_n(x)-f_n(a)|\leq M_n(a)|x-a|$، $\forall x>\frac{a}{2}$، حيث
$M_n(a)=\displaystyle\int_0^n \frac{dt}{(t+a)(t+\frac{a}{2})}$. إذاً الدوال f_n متصلة على $]0,+\infty[$.
كذلك
$|f_n(x)-f_n(0)|\leq\left|\displaystyle\int_0^n \frac{\sin t}{t}\Big(\frac{x}{t+x}\Big)dt\right|\leq x(\ln(n+x)-\ln x)$. إذاً
$\lim\limits_{x\to 0}|f_n(x)-f_n(0)|=0$ و بالتالي الدوال f_n متصلة عند 0.
باستعمال المبرهنة (??) (الثاني صيغة لمبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل) نحصل على:
$|f_n(x)-f_m(x)|\leq\frac{2}{n+x}$، لكل $m>n$ و $x>0$.

إذاً

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{2}{n}$$

و بالتالي المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}^+$.

و نستنتج أنّ الدالة $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

2 لتكن $f_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^n \frac{\sin t}{t+x} dt$، لكل $x > 0$. الدوال f_n متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام على الفترات $[a, +\infty[$, لكل $a > 0$. إذاً الدالة

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$$ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المتصلة على مجموعة مفتوحة $\Omega \subset \mathbb{R}$ و متقاربة بانتظام على كل فترة $[a, b] \subset \Omega$ و نهايتها دالة f. إذاً الدالة f متصلة على Ω.

التقارب المنتظم و قابلية التكامل

لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ و تتقارب و نهايتها دالة f.
عدة مسائل مطروحة منها

1. هل الدالة f قابلة لتكامل ريمان؟
2. إذا كانت الدالة f قابلة لتكامل ريمان على $[a, b]$، و هل
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$ ؟

مثال

مثلا الدالة $\begin{cases} f(x)=1 & x\in\mathbb{Q}\cap[a,b] \\ f(x)=0 & x\notin\mathbb{Q}\cap[a,b]\end{cases}$ ليست قابلة لتكامل ريمان و هي نهاية متتالية لدوال قابلة لتكامل ريمان (لأنّ المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد).

أما المتتالية $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$ المعرفة على $[0,1]$ تحقق $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

مثال

لتكن $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

1. أوجد مجال التقارب البسيط للمتتالية $(f_n)_n$.
2. أُحسب $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ و استنتج أنّ المتتالية (f_n) ليست متقاربة بانتظام على الفترة $[0,2[$.
3. أُحسب نهاية المتتالية $f_n(\frac{1}{n})$، و استنتج طريقة ثانية لإثبات النتيجة السابقة.

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. إذا كانت المتتالية $(f_n)_n$ تتقاربة بانتظام و نهايتها دالة f فإنّ الدالة f قابلة لتكامل ريمان على $[a, b]$ و

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

كذلك المتتالية $(F_n)_n$ المعرفة بما يلي: $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$ متقاربة بانتظام و نهايتها الدالة F المعرفة بما يلي: $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

التقارب و الإشتقاق

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على فترة $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
نفترض أنّ

1. المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب نقطيا و نهايتها دالة f على $[a, b]$.
2. المتتالية $(f'_n)_n$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$.

إذاً الدالة f قابلة للمفاضلة باتصال على $[a, b]$ و لكل $x \in [a, b]$،

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$$

و $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام و نهايتها الدالة f على $[a, b]$.

تمرين

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال قابلة للإشتقاق على فترة $[a, b]$. نفترض أنّ المتتالية $(f'_n)_n$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$ و يوجد $x_0 \in [a, b]$ بحيث المتتالية $(f_n(x_0))_n$ تتقارب.
أثبت أنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[a, b]$ و نهايتها دالة قابلة للإشتقاق f و $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)$. (يمكن استعمال مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f_n - f_m$).

البرهان

بما أن الدوال f'_n متصلة، فإن $\int_a^x f'_n(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a)$. كذلك الدالة $g = \lim_{n\to+\infty} f'_n$ متصلة و تحقق $\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$ و بالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق و $f'(x) = g(x)$ لكل $x \in [a, b]$.

لتكن $(f_n)_n$ متتالية الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

1. أثبت أنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.
2. أثبت أنّ الدوال f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن نهاية المتتالية $(f_n)_n$ ليست قابلة للاشتقاق.

متسلسلات الدوال

تعريف

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$.

1. نقول إن متسلسلة الدوال $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ متقاربة نقطيا على المجموعة A إذا كانت المتتالية $\left(S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_n$ متقاربة نقطيا على A.
2. نقول إن متسلسلة الدوال $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على المجموعة A إذا كانت المتتالية $\left(S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_n$ متقاربة بانتظام على A.

ملاحظة

1. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا و نهايتها دالة f على مجموعة A، فإنّ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ لكل $x \in A$.
2. تكون المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا على مجموعة A إذا و فقط إذا، المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ تحقق معيار كوشي التالي:

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N; \forall n \geq N,\ \ p \in \mathbb{N};\ \ \|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\| < \varepsilon.$$

3. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها f على A فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا و نهايتها f على A.
4. تكون المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على مجموعة A إذا و فقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ تحقق معيار كوشي التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; \forall n \geq N, p \in \mathbb{N};\ \sup_{x\in A}\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

مثال

1. لتكن $(f_n)_n$ المتتالية المعرفة على الفترة $[0,1]$ كالتالي: $f_n(x)=x^n$.
المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ متقاربة نقطيا على الفترة $]-1,1[$ و نهايتها الدالة
$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.
إذا كان $|x|\geq 1$، $\lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|\neq 0$ و بالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(z)$ غير متقاربة على $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$.

2 إذا كان $x \geq 0$، نعرف متتالية الدوال $f_n(x) = \dfrac{\sin \frac{x}{n}}{n+x}$.
لكل $x > 0$، $\sin \dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{n} - \dfrac{x^3}{6n^3} + O(\dfrac{1}{n^3})$.
إذًا

$$f_n(x) = \frac{x}{n(x+n)} - \frac{x^3}{6n^3(x+n)} + O(\frac{1}{n^3}).$$

المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ متقاربة نقطيا على $\mathbb{R}^+$.
المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ متقاربة نقطيا على $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

مثال

المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} x^n$ متقاربة نقطيا على $]-1,1[$ و نهايتها الدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$، و لكن المتسلسلة ليست متقاربة بانتظام.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in]-1,1[}|S_n(z)-S(z)| &= \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in]-1,1[}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in]-1,1[}\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \\
&\geq \lim_{n\to+\infty}\frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1-(1-\frac{1}{n+1})} = +\infty
\end{aligned}$$

تعريف

نقول إنّ المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ تتقارب معياريا على مجموعة A إذا كانت المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} \sup\limits_{x\in A} \|f_n(x)\|$ متقاربة.

مبرهنة

إذا كانت المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ متقاربة معياريا على مجموعة A فهي متقاربة بانتظام على A.

نستعمل معيار كوشي للبرهان.

نتيجة

إذا كان $\sup_{x\in A}|f_n(x)| \leq a_n$ و المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متقاربة، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متتقاربة معياريا على A.

مثال

1. لتكن $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$، حيث $\alpha > 1$.
$|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$. إذاً المتسلسلة متقاربة معياريا على $\mathbb{R}$.
2. لتكن $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$ على الفترة $]0, +\infty[$.
من المعلوم أن $xe^{-x} \leq 1$ لكل $x \in]0, +\infty[$، و إذا كان $a > 0$، فإن

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{1}{x.n^2} \leq \frac{1}{a.n^2}$$

لكل $x \in [a, +\infty[$. إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على فترة $[a, +\infty[$
و لكل $a > 0$.

3 لتكن $f_n(x)=\frac{1}{n(x+n)}$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-^*$.
ليكن $R>0$، يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث $R<N$ و بالتالي فإن لكل $n\geq N$ و لكل $x\in[-R,R]\setminus\mathbb{Z}_-^*$،

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{n|x+n|}\leq\frac{1}{n|n-|x||}\leq\frac{1}{n(n-R)}.$$

إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq1}f_n$ متقاربة بانتظام على $[-R,R]\setminus\mathbb{Z}_-^*$.

معيار آبل للتقارب المنتظم

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ و $(g_n)_n$ متتاليتين من الدوال المعرفة على فترة $I \subset \mathbb{R}$. إذاً المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n g_n$ متقاربة بانتظام على I إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على الفترة I و المتتالية $(g_n)_n$ محدودة و مطردة على الفترة I.
2. المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ محدودة بانتظام على الفترة I و المتتالية $(g_n)_n$ تناقصية ومتقاربة بانتظام و نهايتها 0 على الفترة I.

3 المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على الفترة I و المتسلسلة $|g_0| + \sum_{n\geq 1} |g_n - g_{n+1}|$ محدودة على الفترة I.

مثال

1. لتكن $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الموجبة و تناقصية و نهايتها 0.
المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n e^{inx}$ تتقارب بانتظام على كل فترة $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{inx}}{n+x}$ متقاربة نقطيا على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$.
ليكن $R > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث $N > R$. المتتالية $g_n(x) = \frac{1}{n+x}$ تناقصية و موجبة و لكل $n \geq N$، . و بالتالي المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[-R, R] \setminus (\mathbb{Z}_- \cup 2\pi\mathbb{Z})$. و كحالة خاصة، المتسلسلة تتقارب بانتظام على كل فترة $[\delta, 2\pi - \delta]$ لكل $\delta > 0$.

3 لتكن متسلسلة الدوال $\sum_{n\geq 1} f_n$، حيث $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(n^2x)}{n}$. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

نذكر بأن $2\sin(kx)\sin(k^2x) = \cos(k(k-1)x) - \cos(k(k+1)x)$.
المتتالية $(\frac{1}{n})_n$ تناقصية و نهايتها 0. من جهة أخرى

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k(k-1)x - \cos k(k+1)x\right| = |1 - \cos n(n+1)x| \leq 2.$$

إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على مجموعة مفتوحة Ω و متصلة عند نقطة $a \in \Omega$. نفترض أنّ المتسلسلة $\sum_{n \geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على Ω و نهايتها دالة f. إذاً الدالة f متصلة عند النقطة a.

نتيجة المبرهنة 14.

مبرهنة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ و $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المتصلة على مجموعة مفتوحة Ω.
إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على كل فترة $[a,b] \subset \Omega$ و نهايتها f، فإنّ الدالة f متصلة على Ω.

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على الفترة $[a, b]$ و نهايتها f. فإنّ الدالة f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ و

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على فترة $[a,b]$. نفترض أنّ

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا على الفترة $[a,b]$ و نهايتها دالة f.
2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f'_n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[a,b]$.

إذاً f قابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على الفترة $[a,b]$ و

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

كذلك المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[a,b]$.

نتيجة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على فترة I. نفترض أنّ

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا على الفترة I و نهايتها f،
2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f'_n$ متقاربة بانتظام على كل فترة $[a, b] \subset I$.

إذاً الدالة f قابلة للمفاضلة باتصال (C^1) و

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in I.$$