المحتويات

تمهيد

نقدم في هذا الباب نظرية قياس ليباق و نقارنها بنظرية تكامل ريمان. رأينا في باب تكامل ريمان أن نظرية تكامل ريمان لدالة على فترة مغلقة و محدودة $[a, b]$ تعتمد على تقريب المساحة المحصورة بين بيان الدالة و المحور (ox) بواسطة مستطيلات دقيقة بشكل متزايد. أما طريقة ليباق فترتكز على تجزيء $f([a, b]) \subset [A, B]$ على المحور (oy) أي نأخذ تجزيء
$y_0 < \ldots < y_n$ للمجموعة $f([a, b])$ ثم نحصر مساحة المجموعات
$E_k = f^{-1}([y_k, y_{k+1}[)$

جبر و سيجما جبر

تعريف

1. لتكن $\mathcal{A}$ تجمع من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$. نقول إن $\mathcal{A}$ جبر إذا حققت ما يلي:
   - $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$
   - إذا كان $A \in \mathcal{A}$ فإن $A^c \in \mathcal{A}$ و يسمى الإغلاق بالنسبة للمكمل
   - إذا كان $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ فإن $\cap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$، و يسمى الإغلاق بالنسبة لتقاطع محدود.
2. نقول إن المجموعة $\mathscr{A}$، سيجما جبر أو سيجما حقل إذا كانت جبر و لكل $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ في $\mathscr{A}$، فإن $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$. هذه الخاصية تسمى الإغلاق بالنسبة لتقاطع قابل للعد

3 إذا كانت $\mathscr{A}$ سيجما جبر، المجموعة $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ تسمى **فضاء قياس**، و المجموعات الجزئية من $\mathscr{A}$ تسمى **مجموعات قابلة للقياس**.

ملاحظة

إذا كان $\mathcal{A}$ جبر، باستعمال مكمل المجموعات، نحصل على مايلي:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. إذا كان $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$، فإن $\cup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$ و يسمى الإغلاق بالنسبة للإتحاد المنته
3. إذا كانت $\mathscr{A}$ سيجما جبر و $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر في $\mathscr{A}$، فإن $\cup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathscr{A}$ و يسمى الإغلاق بالنسبة للإتحاد القابل للعد

مثال

1. $\mathscr{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ جبر و سيجما جبر. وهي أصغر سيجما جبر في $\mathscr{P}(\mathbb{R})$
2. $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ جبر و سيجما جبر وهي أكبر سيجما جبر في $\mathscr{P}(\mathbb{R})$
3. لتكن $\mathscr{A}$ تجمع المجموعات الجزئية A من $\mathbb{R}$ بحيث A أو A^c قابلة للعد. المجموعة $\mathscr{A}$ سيجما جبر.
$\mathscr{A} \ni \emptyset$ و كذلك إذا كانت $A \in \mathscr{A}$، فإن $A^c \in \mathscr{A}$.

لتكن $(A_j)_j$ متتالية في $\mathscr{A}$. إذا وجدت مجموعة A_p قابلة للعد، فإن المجموعة $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \subset A_p$ قابلة للعد و بالتالي فإن $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathscr{A}$ و أما إذا كانت كل المجموعات A_j غير قابلة للعد، فإن المجموعات A_j^c كلها قابلة للعد، و بالتالي المجموعة $\cup_{j=1}^{+\infty} A_j^c$ قابلة للعد و $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathscr{A}$. إذاً المجموعة $\mathscr{A}$، سيجما جبر

4. لتكن A تجمع المجموعات الجزئية A في $\mathbb{R}$ بحيث A أو A^c له عدد منته من العناصر. المجموعة A جبر و ليست سيجما جبر

مبرهنة

كل تقاطع لمجموعات جبر هو جبر و كل تقاطع لمجموعات سيجما جبر هو سيجما جبر.

تعريف

لتكن $\mathcal{B} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ تجمع غير خال من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$. يوجد أصغر جبر يحوي $\mathcal{B}$ و نرمز له بالرمز $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. هذه المجموعة تسمى الجبر المولدة بالمجموعة $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ هي تقاطع كل المجموعات الجبر التي تحوي $\mathcal{B}$ فهي بالتالي أصغر جبر يحوي $\mathcal{B}$.
كذلك يوجد أصغر سيجما جبر يحوي $\mathcal{B}$ و نرمز له بالرمز $\sigma(\mathcal{B})$. هذه المجموعة تسمى سيجما جبر المولدة بالمجموعة $\mathcal{B}$. $\sigma(\mathcal{B})$ هي تقاطع كل المجموعات سيجما جبر التي تحتوي على $\mathcal{B}$ فهي بالتالي أصغر سيجما جبر يحوي $\mathcal{B}$.

مثال

1. لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ بحيث $A \neq \emptyset$ و $A \neq \mathbb{R}$. سيجما جبر المولدة بالمجموعة $\{A\}$ هي $\{\emptyset, \mathbb{R}, A, A^c\}$.
2. إذا كان $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$ تجزئ للمجموعة $\mathbb{R}$ فإن

$$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B = C^c, A \cup C = B^c, B \cup C = A^c\}$$

تمرين

لتكن $\mathscr{A}$ تجمع المجموعات الجزئية القابلة للعد أو مكملها قابل للعد.
أثبت أن المجموعة $\mathscr{A}$، سيجما جبر مولدة بالمجموعات $S = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$.

بوريل سيجما جبر

تعريف

سيجما جبر المولدة بالمجموعات $\{[a, b[: (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ تسمى بوريل سيجما جبر على $\mathbb{R}$ و نرمز لها بالرمز $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. كل عنصر من $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ يسمى مجموعة بوريل في $\mathbb{R}$.

ملاحظة

لتكن $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ تجمعين من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$.

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B}) \iff \begin{cases} \forall A \in \mathcal{A} \quad A \in \sigma(\mathcal{B}) \\ \quad \& \\ \forall B \in \mathcal{B} \quad B \in \sigma(\mathcal{A}) \end{cases}$$

مبرهنة

$\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ مولدة باحدى المجموعات التالية:

1. $\{]a, b[: (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
2. المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$
3. المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$
4. $\{]a, +\infty[: \ a \in \mathbb{R}\}$
5. $\{]-\infty, a] : \ a \in \mathbb{R}\}$

قياس ليباق الخارجي

تعريف

نقول إن دالة $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ هو قياس خارجي على $\mathbb{R}$ إذا حققت الخصائص التالية:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. إذا كان $A \subset B$ فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (نقول إن μ^* تزايدية)
3. إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$، فإن

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

نعطي مثالا لقياس خارجي على $\mathbb{R}$ يساعدنا في تكوين مقياس ليباق على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

لتكن $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ تجمع من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$ بحيث $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$. إذا كانت $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ دالة حيث $\rho(\emptyset) = 0$. لكل مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}$، نعرف

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(A_n) : \ A_n \in \mathcal{A}, \ A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} A_n\} \qquad (1)$$

الدالة μ^* قياس خارجي على $\mathbb{R}$.

إذا أخذنا $\mathcal{I}$ تجمع الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ و الدالة $\rho(I) = \mathscr{L}(I)$ و التي تمثل طول الفترة. في هذه الحالة نرمز بالمقياس الخارجي بالرمز λ^* و نسميه قياس ليباق الخارجي.

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{L}(I_n) : \ I_n \in \mathcal{I}, \ A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} I_n\}.$$

هذا المقياس الخارجي يحقق الخصائص التالية:

تمهيدية

لكل فترة I في $\mathbb{R}$، $\lambda^*(I) = \mathscr{L}(I)$.

تمهيدية

إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ و $(I_n)_n$ أجزائها المترابطة، فإن

$$\lambda^*(\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{L}(I_n).$$

مبرهنة

لكل مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}$،

$$\lambda^*(A) = \inf_{O \in \mathcal{O}_A} \lambda^*(O)$$

حيث $\mathcal{O}_A$ تجمع المجموعات المفتوحة التي تحوي المجموعة A.

و نستنتج من كل ماسبق المبرهنة التالية:

نتيجة

إذا كانت A مجموعة قابلة للعد في $\mathbb{R}$، فإن $\lambda^*(A) = 0$.

بما أن $\lambda^*\{a\} = \mathscr{L}([a, a]) = 0$، فإنه إذا كان $A = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$، فإن $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*\{a_n\} = 0$.

نتيجة

$\mathbb{R}$ و $[a, b]$ غير قابلة للعد، لكل $a \neq b$.

مبرهنة

لكل $A \subset \mathbb{R}$ و لكل $r \in \mathbb{R}$، فإن $\lambda^*(A+r) = \lambda^*(A)$ و $\lambda^*(rA) = |r|\lambda^*(A)$.

المجموعات القابلة للقياس

تعريف

ليكن μ^* قياس خارجي على $\mathbb{R}$.
نقول إن مجموعة جزئية A في $\mathbb{R}$ قابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي μ^* إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall X \subset \mathbb{R} : \quad \mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c).$$

مبرهنة

إذا كانت $\mathscr{B}$ تجمع المجموعات القابلة للقياس في $\mathbb{R}$ بالنسبة للقياس الخارجي μ^*، فإن $\mathscr{B}$ سيجما جبر.

مبرهنة

كل مجموعة بورل قابلة للقياس أي $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{B}$.

تمرين

نقول إن مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}$ صفرية بالنسبة للقياس الخارجي λ^* إذا وجدت مجموعة B قابلة للقياس بحيث $A \subset B$ و $\lambda^*(B) = 0$.
أثبت أن كل مجموعة صفرية قابلة للقياس.
الحل
إذا كانت A مجموعة صفرية، فإنه يوجد $B \in \mathscr{B}$ بحيث $A \subset B$ و $\lambda^*(B) = 0$. إذا كانت X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، فإن $\lambda^*(X \cap A) = 0$ و

$$\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

و المتباينة العكسية تنتج من تعريف القياس الخارجي λ^*. إذاً المجموعة A قابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي λ^*.

نظرية القياس

تعريف

لتكن $\mathscr{A}$ سيجما جبر في $\mathbb{R}$. نقول إن دالة $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ قياس (قياس موجب) على $\mathscr{A}$ إذا حققت الشروط التالية:

1. $\mu(\emptyset) = 0$،
2. لكل متتالية منفصلة $(A_n)_n \in \mathscr{A}$، $\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$ (خاصية التجميع القابل للعد)

المجموعة $(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mu)$ تسمى فضاء قياسي.

مثال

1. إذا كانت $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ و $\mu(A) = \#A$ (عدد عناصر المجموعة A إذا كانت A منتهية و $+\infty$ في الحالة الأخرى). الدالة μ قياس على $\mathscr{A}$. هذا القياس يسمى قياس العد (the counting measure).
2. إذا كان $a \in \mathbb{R}$، نعرف $\delta_a(A) = 1$ إذا كان $a \in A$ و 0 إذا كان $A \not\ni a$. δ_a قياس و يسمى قياس نقطي عند النقطة a (point mass at a) أو قياس ديراك عند النقطة a (the Dirac measure at a).

3 لتكن μ الدالة المعرفة على $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ بما يلي: $\mu(A) = 0$ إذا كانت المجموعة A منتهية و $\mu(A) = +\infty$ إذا كانت المجموعة A غير منتهية.
الدالة μ لا تحقق خاصية التجميع القابل للعد بما أن $\mathbb{N} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{n\}$، و لكن

$$\mu(\mathbb{N}) = +\infty \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{n\}) = 0$$

و بالتالي الدالة μ ليست قياسا.

مبرهنة

لتكن $\mathscr{A}$ سيجما جبر في $\mathbb{R}$ و μ قياسا على $\mathscr{A}$. القياس μ يحقق الخواص التالية:

1. إذا كانت $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ عدد منته من المجموعات الجزئية المنفصلة، فإن

$$\mu(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

2. إذا كان $A, B \in \mathscr{A}$ حيث $A \subset B$، فإن $\mu(A) \leq \mu(B)$. (μ مطردة)

3. خاصية ما دون التجميع القابل للعد: إذا كانت $(A_n)_n \in \mathscr{A}$ و $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$، فإن

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

4. إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{A}$ و $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$، فإن

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

5. إذا كان $A, B \in \mathscr{A}$ و $A \subset B$ و $\mu(B) < +\infty$، فإن $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (النتيجة تبقى صحيحة إذا كانت $\mu(A) < \infty$).

6 لتكن $(A_n)_n$ متتالية تناقصية في $\mathscr{A}$ و $A_n = \lim_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$. إذا كانت $\mu(A_1) < \infty$، فإن $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

تمرين

ليكن $\mathscr{A}$ سيجما جبر على $\mathbb{R}$ و $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ دالة على $\mathscr{A}$.
أثبت أن μ قياس إذا و فقط إذا :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$، إذا كان $A \cap B = \emptyset$.
3. إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{A}$، فإن

$$\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

الحل

إذا كانت μ قياسا، فإنها تحقق الخاصيتين 1. و 2. لتكن $(A_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{A}$، و لتكن $B_1 = A_1$ و $B_n = A_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} A_j$ لكل $n \in \mathbb{N}$. المتتالية $(B_n)_n$ منفصلة و $\cup_{n=1}^{+\infty} B_n = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$. إذاً

$$\begin{aligned}\mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(\cup_{j=1}^{n} B_j) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$

عكسيا، إذا كانت دالة μ تحقق الخصائص 1. 2. و 3. و $(A_n)_n$ متتالية منفصلة من المجموعات القابلة للقياس. المتتالية $\left(B_n = \cup_{j=1}^{n} A_j\right)_n$ تزايدية و $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. إذاً

$$\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

مبرهنة أحادية القياس

مبرهنة

ليكن μ و ν قياسين على الفضاء $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ حيث يوجد فصل $\mathscr{C}$ من المجموعات القابلة للقياس يحقق الخصائص التالية:

1. $\mathbb{R} \in \mathscr{C}$ و إذا كانت $A, B \in \mathscr{C}$، فإن $A \cap B \in \mathscr{C}$
2. $\mathscr{C}$ تولد سيجما الجبر $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. $(\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$
3. $\mu(C) = \nu(C) < +\infty$ لكل $C \in \mathscr{C}$

إذاً $\mu = \nu$

ملاحظة

نفترض أن القياسين μ و ν يحققان فرضيات المبرهنة (34) نعرف مجموعة تقاطع القياسين التالية $\mathscr{F}=\{A\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}\,:\,\ \mu(A)=\nu(A)\}$. الفصل $\mathscr{F}$ يحقق الخصائص التالية:

1. إذا كانت $A\in\mathscr{F}$، فإن $A^c\in\mathscr{F}$ و ذلك لأن $\mu(A^c)=\mu(\mathbb{R})-\mu(A)=\nu(\mathbb{R})-\nu(A)=\nu(A^c)$.
2. إذا كانت $A,B\in\mathscr{F}$ و $A\subset B$، فإن $B\cap A^c\in\mathscr{F}$: $\mu(A)+\mu(B\cap A^c)=\nu(A)+\nu(B\cap A^c)$ و بالتالي فإن $\mu(B\cap A^c)=\nu(B\cap A^c)$
3. إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية مطردة من المجموعة $\mathscr{F}$، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

مبرهنة

لتكن $A \in \mathscr{F}$. المجموعة: $\tilde{A} = \{B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}} : \ A \cup B, B \cap A^c, A \cap B^c \in \mathscr{F}\}$ سيجما جبر في $\mathscr{P}(\mathbb{R})$

نتيجة

لكل $A \in \mathscr{C}$، $\tilde{A} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

البرهان

إذا كان $A, B \in \mathscr{C}$، فإن $A \cap B \in \mathscr{C}$ و بالتالي فإن $\mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)$. من ناحية أخرى، بما أن $\mu(A) = \nu(A)$، فإن $\mu(A \cap B^c) = \nu(A \cap B^c)$ و كذلك $\mu(A^c \cap B) = \nu(A^c \cap B)$ و بالتالي فإن $\mu(A \cup B) = \nu(A \cup B)$. إذاً $\tilde{A}$ سيجما جبر و بما أنها تحوي $\mathscr{C}$ فإن $\tilde{A} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

مبرهنة

لتكن μ و ν قياسين على الفضاء القياسي $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ و نفترض أنه يوجد فصل $\mathscr{C}$ من المجموعات القابلة للقياس تحقق الخصائص التالية:

1. إذا كانت $A, B \in \mathscr{C}$، فإن $A \cap B \in \mathscr{C}$
2. $\mathscr{C}$ تولد سيجما جبر $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$
3. $\mu(C) = \nu(C) < +\infty$ لكل $C \in \mathscr{C}$
4. توجد $(X_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{C}$ بحيث $\mathbb{R} = \lim\limits_{n \to +\infty} X_n$.

إذاً $\mu = \nu$

قياس ليباق

مبرهنة

اختصار قياس ليباق الخارجي λ^* على سيجما الجبر $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ قياس. نرمز بهذا القياس بالرمز λ و يسمى قياس ليباق على $\mathbb{R}$. λ هو القياس الوحيد على $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ الذي يحقق الخصائص التالية:

1. $\lambda([0,1]) = 1$
2. $\lambda(A+x) = \lambda(A)$، لكل $x \in \mathbb{R}$ و لكل $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. (نقول أن λ لا متغيرة بالإنسحاب)

ملاحظة

في الحقيقية مقياس ليباق λ يمكن تعريفه على سيحما الجبر $\mathscr{B}^* = \mathscr{B} \cup \mathscr{N}$ حيث $\mathscr{N}$ تجمع المجموعات الصفرية و قد أثبتنا أن $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{B}^*$.

خصائص عامة للدوال القابلة للقياس

في ما يلي Ω مجموعة قابلة للقياس في $\mathbb{R}$.

تعريف

نقول إن دالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للقياس إذا كان $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}$ لكل مجموعة بوريل A ($A \in \mathscr{B}$).
سنرمز لمجموع الدوال القابلة للقياس على Ω بالرمز $\mathscr{M}(\Omega)$ و لمجموع الدوال الموجبة و القابلة للقياس على Ω بالرمز $\mathscr{M}^{+}(\Omega)$.

مبرهنة

لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة. التقارير التالية متكافئة

1. الدالة f قابلة للقياس.
2. $f^{-1}[a,+\infty[\in \mathscr{B}$ لكل $a\in\mathbb{R}$
3. $f^{-1}]-\infty, a[\in \mathscr{B}$ لكل $a\in \mathbb{R}$
4. $f^{-1}]-\infty, a] \in \mathscr{B}$ لكل $a\in\mathbb{R}$
5. $f^{-1}]a, b[\in \mathscr{B}$ لكل $a \in \mathbb{R}$
6. $f^{-1}[a, b[\in \mathscr{B}$ لكل $a, b \in \mathbb{R}$

هذه المبرهنة هي نتيجة أن سيجما جبر بورال $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ مولدة بأي واحدة من المجموعات التالية:

1. $\{[a,+\infty[:\ a\in\mathbb{R}\}$
2. $\{]a,+\infty[:\ a\in\mathbb{R}\}$
3. $\{]-\infty,a[:\ a\in\mathbb{R}\}$
4. $\{]-\infty,a]:\ a\in\mathbb{R}\}$
5. $\{]a,b[:\ a,b\in\mathbb{R}\}$
6. $\{[a,b[:\ a,b\in\mathbb{R}\}$
7. $\{]a,b]:\ a,b\in\mathbb{R}\}$
8. $\{[a,b]:\ a,b\in\mathbb{R}\}$

ملاحظة

إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة، كل دالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، قابلة للقياس.

خصائص الدوال القابلة للقياس

مبرهنة

1. إذا كانت $f \in \mathscr{M}(\Omega)$، فإن الدالة $|f| \in \mathscr{M}(\Omega)$
2. إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية في $\mathscr{M}(\Omega)$، فإن الدوال التالية قابلة للقياس
   1. $g = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$
   2. $h = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$
   3. $k = \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$

نتيجة

1. إذا كانت $f \in \mathscr{M}(\Omega)$، فإن الدوال $f^+ = \sup(f, 0)$ و $f^- = \inf(f, 0)$ قابلة للقياس.
2. إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للقياس و متقاربة ونهايتها f، فإن الدالة f قابلة للقياس.
3. إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للقياس و إذا كانت C مجموعة النقاط $x \in \Omega$ حيث تكون المتتالية $(f_n)_n(x)$ لها نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$، فإن المجموعة C قابلة للقياس .

الدوال البسيطة

تعريف

نقول إن دالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}(\overline{\mathbb{R}})$ بسيطة إذا كانت قابلة للقياس و تأخذ عدد منته من القيم.

إذا كانت $f\colon \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ دالة بسيطة و إذا كانت $\{c_1, \ldots, c_m\}$ قيم الدالة المختلفة، فإن $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}$، حيث $A_j = f^{-1}\{c_j\}$. و الدالة f قابلة للقياس إذا و فقط إذا كانت المجموعات A_j قابلة للقياس لكل $j = 1, \ldots, m$.

مبرهنة

لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

1. إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و محدودة، توجد متتالية من الدوال البسيطة متقاربة بانتظام على Ω و نهايتها f.
2. إذا كانت الدالة f موجبة و قابلة للقياس، توجد متتالية موجبة و تزايدية من الدوال البسيطة و نهايتها f.

تكامل ليباق

لتعريف تكامل ليباق للدوال القابلة للقياس، نعرف أولا تكامل الدوال البسيطة والموجبة.
بعدها نعرف تكامل ليباق للدوال الموجبة والقابلة للقياس.

تعريف

إذا كانت $f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{\{f=c_k\}}$ دالة موجبة و بسيطة، نعرف تكامل ليباق للدالة f بما يلي:

$$\int_{\Omega} f(x)\,d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \lambda(\{f = c_k\}). \tag{2}$$

نفترض أنه إذا كانت $A = \{x \in \Omega : \ f(x) = 0\}$ و $\lambda(A) = +\infty$، فإن $\int_X f(x)\,d\lambda(x) = 0$. $(0.(\infty) = 0)$.

مبرهنة

لتكن $\mathscr{E}^+$ مجموعة الدوال البسيطة و الموجبة المعرفة على Ω. تكامل الدوال في $\mathscr{E}^+$ يحقق الخصائص التالية:

1. $\int_\Omega \alpha\, f(x)\,d\lambda(x) = \alpha \int_\Omega f(x)\,d\lambda(x)$ لكل $\alpha \in \mathbb{R}^+$ و لكل $f \in \mathscr{E}^+$
2. $\int_\Omega (f+g)(x)\,d\lambda(x) = \int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) + \int_\Omega g(x)\,d\lambda(x)$ لكل $f, g \in \mathscr{E}^+$
3. $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) \leq \int_\Omega g(x)\,d\lambda(x)$ لكل $f, g \in \mathscr{E}^+$ حيث $f \leq g$

4 إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{E}^+$ و إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} f_n = f \in \mathscr{E}^+$ ،
فإن $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x)$

تمهيدية

لتكن $(f_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{E}^+$ و إذا كانت $g \in \mathscr{E}^+$ بحيث $g \leq \lim_{n\to+\infty} f_n$، فإن $\int_\Omega g(x)\,d\,\lambda(x) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\,\lambda(x)$.

تعريف

لتكن f دالة موجبة قابلة للقياس، نعرف تكامل الدالة كما يلي:

$$\int_{\Omega} f(x)\,d\,\lambda(x) = \sup\{\int_{\Omega} g(x)\,d\,\lambda(x) : g \leq f,\ \ g \in \mathscr{E}^{+}\}$$

هذا العدد حقيقي موجب أو $+\infty$.

ملاحظة

إذا كانت f دالة موجبة قابلة للقياس، فحسب المبرهنة (48) توجد متتالية تزايدية $(f_n)_n$ في $\mathscr{E}^+$ متتقاربة و نهايتها الدالة f. و نستنتج مما سبق أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)d\lambda(x) \le \int_\Omega f(x)d\lambda(x)$. من ناحية أخرى حسب التمهيدية (53) فإن كل دالة $g\in\mathscr{E}^+$، حيث $g\le f=\lim_{n\to+\infty} f_n$، فإنها تحقق $\int_\Omega g(x)d\lambda(x) \le \lim\limits_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)d\lambda(x)$.

إذًا حسب التعريف (54) $\int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x)$. و بالتالي فإن

$$\int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\,\lambda(x).$$

هذه النتيجة غير مرتبطة بالمتتالية $(f_n)_n$ في $\mathscr{E}^+$ التي تتقارب و نهايتها الدالة f. و بالتالي نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة

لتكن f و g في $\mathscr{M}^+(\Omega)$ و إذا كان $\alpha \geq 0$ فإن

1. $$\int_\Omega \alpha f(x)\,d\lambda(x) = \alpha \int_\Omega f(x)\,d\lambda(x)$$
2. $$\int_\Omega (f+g)(x)\,d\lambda(x) = \int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) + \int_\Omega g(x)\,d\lambda(x)$$
3. إذا كان $g \leq f$، فإن $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) \leq \int_\Omega g(x)\,d\lambda(x)$

تعريف

لتكن f, g دالتين. نقول إن $f = g$ خارج مجموعة صفرية أو $f = g$ a.e. إذا كانت المجموعة $\{x \in \Omega : \ f(x) \neq g(x)\}$ مجموعة صفرية. و إذا كانت مجموعة A قابلة للقياس، فإن الدالة $\chi_A = 0$ a.e. إذا و فقط إذا $\lambda(A) = 0$.

تعريف

نقول إن دالة f معرفة .a.e على Ω إذا وجدت مجموعة صفرية N بحيث تكون الدالة f معرفة على $\Omega \setminus N$.

تعريف

نقول إن متتالية $(f_n)_n$ معرفة على Ω متقاربة .a.e و نهايتها دالة f إذا كانت المجموعة $\{x \in \Omega : f_n(x) \not\longrightarrow f(x)\}$ مجموعة صفرية.

مبرهنة

لتكن f, g دالتين في $\mathscr{M}^+(\Omega)$.

1. $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) = 0$ إذا و فقط إذا $f = 0$ a.e.
2. إذا كانت $f = g$ a.e فإن $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) = \int_\Omega g(x)\,\lambda(x)$

تعريف

لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ دالة قابلة للقياس. نعرف الدالتين $f^+ = \sup(f, 0)$ و $f^- = \sup(-f, 0)$. إذاً $f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ + f^-$.

نقول إن الدالة f قابلة لتكامل ليباق إذا كانت $\int_\Omega f^+(x)d\lambda(x)$ و $\int_\Omega f^-(x)d\lambda(x)$ في $\mathbb{R}$ و

$$\int_\Omega f(x)d\lambda(x) = \int_\Omega f^+(x)d\lambda(x) - \int_\Omega f^-(x)d\lambda(x)$$

يرمز لتكامل الدالة f إذا كانت قابلة لتكامل ليباق. كذلك إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و $\int_\Omega f^+(x)d\lambda(x) < +\infty$ أو $\int_\Omega f^-(x)d\lambda(x) < +\infty$ سنرمز بنفس الرمز لتكامل ليباق للدالة على Ω.
نرمز لمجموعة الدوال القابلة لتكامل ليباق على Ω بالرمز $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

مبرهنة

المجموعة $\mathcal{L}^1(\Omega)$ فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ و الدالة $f \longmapsto \int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x)$ شكل خطي على الفضاء $\mathcal{L}^1(\Omega)$ و

$$\Big|\int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x)\Big| \leq \int_\Omega \big|f(x)\big|\,d\,\lambda(x)$$

لكل $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

نتيجة

1. إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و $a \leq f \leq b$ و $\lambda(\Omega) < +\infty$، فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $a\lambda(\Omega) \leq \int_\Omega f(x)\ d\lambda(x) \leq b\lambda(\Omega)$.
2. إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $f \leq g$، فإن $\int_\Omega f(x)\, d\lambda(x) \leq \int_\Omega g(x)\, d\lambda(x)$.
3. إذا كانت E مجموعة صفرية قابلة للقياس، فإن $\int_E f(x)\, d\lambda(x) = 0$ لكل دالة قابلة للقياس f.

ملاحظة

1. إذا كانت دالة f قابلة للتكامل فإن $\{x \in \Omega : f(x) = \pm\infty\}$ مجموعة صفرية.
2. مجموعة الدوال $f = 0$ a.e. هو فضاء جزئي من فضاء المتجهات $\mathcal{L}^1(\Omega)$ و مغلق بالنسبة للعمليات $(\sup, \inf)$. سنرمز بالرمز $L^1(\Omega)$ خارج القسمة الفضاء $\mathcal{L}^1(\Omega)$ بفضاء الدوال الصفرية a.e.
نقول أن دالتين f, g متساويتين في $L^1(\Omega)$ إذا كانت $f = g$ a.e..

مبرهنة التقارب المطرد

مبرهنة [مبرهنة التقارب المطرد]

إذا كانت $(f_n)_n \in \mathscr{M}^+(\Omega)$، فإن

$$\int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x).$$

البرهان:

لكل عدد طبيعي n، توجد متتالية تزايدية موجبة $(\varphi_{n,j})_j$ في $\mathscr{E}^+$ تتقارب و نهايتها f_n.

لكل j، نعرف $\varphi_{n,j}$ $\psi_j = \sup\limits_{1\leq n\leq j}$. المتتالية $(\psi_j)_j \in \mathscr{E}^+$ تزايدية لأن

$$\psi_j = \sup_{1\leq n\leq j} \varphi_{n,j} \leq \sup_{1\leq n\leq j} \varphi_{n,j+1} \leq \sup_{1\leq n\leq j+1} \varphi_{n,j+1} = \psi_{j+1}.$$

لكل $j \geq n$، $\varphi_{n,j} \leq \psi_j$ و بالتالي $f_n = \lim_{j \to +\infty} \varphi_{n,j} \leq \lim_{j \to +\infty} \psi_j$. إذاً $f = \lim_{n \to +\infty} f_n \leq \lim_{j \to +\infty} \psi_j$. من ناحية أخرى المتباينات $\varphi_{n,j} \leq f_n \leq f$ تثبت أن $\psi_j \leq f$ و $\lim_{j \to +\infty} \psi_j \leq f$. المتتالية $(\psi_j)_j$ تزايدية في $\mathscr{E}^+$ و نهايتها الدالة f. إذاً $\int_\Omega f(x)\, d\lambda(x) = \lim_{j \to +\infty} \int_\Omega \psi_j(x)\, d\lambda(x)$. من ناحية أخرى $\psi_j \leq f_j$. إذاً

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega \psi_j(x)\, d\lambda(x) \leq \lim_{j \to +\infty} \int_\Omega f_j(x)\ d\lambda(x) \leq \int_\Omega f(x)\, d\lambda(x).$$

نتيجة

إذا كانت $(f_n)_n \in \mathscr{M}^+(\Omega)$، فإن

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x).$$

نتيجة

إذا كانت $f \in \mathscr{M}^+(\Omega)$، فإن لكل $A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$، الدالة

$$\mu(A) = \int_\Omega f(x)\chi_A(x)\,d\lambda(x)$$

قياس على $\mathscr{B}_\mathbb{R}$.

تمهيدية فاتو

تمهيدية [تمهيدية فاتو]

إذا كانت $(f_n)_n \in \mathscr{M}^+(\Omega)$، فإن

$$\int_\Omega \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\lambda(x) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\lambda(x).$$

مثال

لتكن $f_n = n^2 \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$، $\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim}_{n \to +\infty} f_n(x)\, d\lambda(x) = 0$ و

$$\underline{\lim}_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\lambda(x) = +\infty$$

مبرهنة التقارب المسقوف

مبرهنة [مبرهنة التقارب المسقوف أو مبرهنة ليباق]

لتكن $(f_n)_n \in \mathscr{M}(\Omega)$. نفترض أن

1. المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب a.e. و نهايتها دالة f معرفة a.e.
2. توجد دالة موجبة قابلة للتكامل g بحيث: $|f_n| \leq g$ a.e. لكل n.

إذاً المتتالية $(f_n)_n$ و الدالة f قابلة للتكامل و

$$\int_\Omega f(x)\; d\lambda(x) \;=\; \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\, d\lambda(x).$$

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n \in \mathscr{M}(\Omega)$. نفترض أنه توجد دالة موجبة قابلة للتكامل g بحيث لكل n، $|f_n| \leq g$ a.e. إذاً

$$\int_\Omega \underline{\lim} f_n(x)\, d\lambda(x) \leq \underline{\lim} \int_\Omega f_n(x)\, d\lambda(x) \tag{3}$$

$$\int_\Omega \overline{\lim} f_n\, d\lambda(x) \geq \overline{\lim} \int_\Omega f_n(x)\, d\lambda(x) \tag{4}$$

إذا كانت المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب a.e. على Ω و نهايتها دالة قابلة للقياس f معرفة a.e. فإن $f \in L^1(\Omega)$ و

$$\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x) \tag{5}$$

تمرين

لتكن f دالة قابلة للتكامل على $[0,+\infty[$. أوجد

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)\,dx.$$

الحل لتكن $(f_n)_n$ المتتالية المعرفة بما يلي: $f_n(x) = e^{-n\sin^2 x} f(x)$ على $[0,\infty[$.
$A = \{x:\ f(x) = \pm\infty\} \cup \{n\in\mathbb{Z}:\ n\geq 0\}$. لكل $x\notin A$،
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ و $|f_n| \leq |f|$ و الدالة f قابلة للتكامل. إذاً

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)\,dx = 0.$$

تكامل ريمان و تكامل ليباق

ليكن λ قياس ليباق على $\mathscr{B}$ سيجما جبر الدوال القابلة لقياس ليباق على الفترة $[a, b]$.
إذا كانت $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان، فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يرمز لتكامل ريمان للدالة f على الفترة $[a, b]$ و إذا كانت الدالة قابلة لتكامل ليباق على الفترة $[a, b]$، فإن $\int_{[a,b]} f(x)\,d\,\lambda(x)$ يرمز لتكامل ليباق للدالة f على الفترة $[a, b]$.

مبرهنة

لتكن f دالة محدودة على فترة $[a,b]$. إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a,b]$، فإن الدالة f قابلة لتكامل لبياق $[a,b]$ و

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\,\lambda(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

مبرهنة

لتكن f دالة محدودة على فترة $[a, b]$.

1. الدالة f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ إذا و فقط إذا كانت مجموعة النقاط حيث تكون الدالة f غير متصلة مجموعة صفرية.
2. عكسيا، إذا كانت مجموعة النقاط حيث تكون الدالة f غير متصلة مجموعة صفرية، فإن الدالة f قابلة لتكامل ليباق و

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\lambda(x) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

للبرهان نحافظ على نفس الرموز للمبرهنة (78) و نحتاج التمهيدية التالية:

تمهيدية

لكل $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \sigma_n\right) \setminus [a, b] \ni x$، $g(x) = h(x)$ إذا و فقط إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة x.

نعطي الآن برهان آخر للمبرهنة التالية:

مبرهنة

لتكن $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة محدودة. الدالة f قابلة لتكامل ريمان إذا و فقط إذا كانت متصلة a.e. على الفترة $[a, b]$.

التكامل المعتل و تكامل ليباق

مبرهنة

لتكن $f\colon\ ]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ليباق على كل فترة مغلقة و محدودة في $]a,b[$.
الدالة f قابلة لتكامل ليباق على الفترة $]a,b[$ إذا و فقط إذا كان التكامل المعتل $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ متقارب و في هذه الحالة، التكامل المعتل و تكامل ليباق للدالة f متساويان:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d\lambda(x).$$