

المحتويات

- 1 تعريف تكامل ريمان
- 2 خصائص الدوال القابلة لتكامل ريمان
- 3 متباينة كوشي شوارتز
- 4 المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل و التكامل
- 5 التكامل المعتل
 - اختبار تقارب التكامل المعتل
 - اختبار آبل للتقارب

تعريف تكامل ريمان

تعريف

نقول لمجموعة محدودة و مرتبة $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ أنها تمثل تجزيئا للفترة $[a, b]$ إذا كان $a = x_0 < \dots < x_n = b$. الفترات $[x_j, x_{j+1}]$ تسمى الفترة الجزئية للتجزيئ σ . إذا كان $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ تجزيئا للفترة $[a, b]$ نعرف مقياس التجزيئ σ ، العدد

$$\|\sigma\| = \sup_{1 \leq j \leq n-1} |x_{j+1} - x_j|.$$

نرمز لمجموع التجزيئات للفترة $[a, b]$ بالرمز: $\mathbb{P}[a, b]$

تعريف

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ تجزئة للفترة $[a, b]$.
نعرف الأعداد التالية:

$$M_j = \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x), \quad m_j = \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x),$$

$$U(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} M_j(x_{j+1} - x_j), \quad L(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1} - x_j).$$

العدد $U(f, \sigma)$ و $L(f, \sigma)$ يسميان على التوالي مجموع ريمان الأكبر و مجموع ريمان الأصغر للدالة f على التجزئة σ .

تعريف

- 1 نقول إن تجزيئا $\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ أدقّ أو أنعم من تجزئ $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$ إذا كان $\{y_0, \dots, y_m\} \subset \{x_0, \dots, x_n\}$ و نكتب $\sigma_2 < \sigma_1$.
- 2 إذا كان $\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ و $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$ تجزيئين للفترة $[a, b]$ ، نعرف التجزئ $\sigma_1 \cup \sigma_2$ المعرف بترتيب النقاط $\{y_0, \dots, y_m, x_0, \dots, x_n\}$.

مبرهنة

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و σ_1 تجزئياً للفترة $[a, b]$. إذا كان $y \in [a, b]$ و $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ التجزئى للفترة $[a, b]$ حيث $\sigma_2 = \{a, y, b\}$ ، فإن

$$L(f, \sigma) \leq L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma).$$

نتيجة

إذا كان σ_1 تجزيئاً أدق من تجزيئ σ_2 وإذا كانت $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة، فإن

$$L(f, \sigma_2) \leq L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2)$$

و

$$U(f, \sigma_1) - L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2) - L(f, \sigma_2).$$

نتيجة

إذا كان σ_1 و σ_2 تجزيئين للفترة $[a, b]$ وإذا كانت $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة، فإن

$$L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2).$$

نتيجة

ليكن $\mathcal{I} = \{L(f, \sigma); \sigma \in \mathbb{P}[a, b]\}$ و $\mathcal{J} = \{U(f, \sigma), \sigma \in \mathbb{P}[a, b]\}$ المجموعة \mathcal{I} لها حد علوي أصغر و نرمز له بالرمز $L(f)$ و المجموعة \mathcal{J} لها حد سفلي أكبر و نرمز له بالرمز $U(f)$.

نتيجة

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. إذا وجد تجزئ σ للفترة $[a, b]$ بحيث $L(f, \sigma) = U(f, \sigma)$ ، فإن الدالة f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$.

تعريف

نقول إن دالة محدودة $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ إذا كان $L(f) = U(f)$ و نمز لهذا العدد بالرمز:

$$L(f) = U(f) = \int_a^b f(x) dx$$

ويسمى تكامل الدالة f على الفترة $[a, b]$.
نمزمجموعة الدوال القابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ بالرمز $\mathcal{R}([a, b])$.

مبرهنة

تكون دالة محدودة $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان إذا و فقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد تجزئي $\sigma = (a = x_0, \dots, x_n = b)$ بحيث

$$U(f, \sigma) - L(f, \sigma) \leq \varepsilon.$$

مبرهنة

كل دالة مطردة على فترة $[a, b]$ قابلة لتكامل ريمان.

مبرهنة

كل دالة متصلة على فترة $[a, b]$ قابلة لتكامل ريمان.

تعريف

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و لتكن A مجموعة جزئية من $[a, b]$.
العدد $O(f, A) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ يسمي تذبذب الدالة f على المجموعة A .

مبرهنة

[مبرهنة داربو]
لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. تكون الدالة f قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$ إذا و فقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$, يوجد $\alpha > 0$ بحيث
 $U(f, \sigma) - L(f, \sigma) \leq \epsilon$ لكل تجزئ σ , حيث $\|\sigma\| < \alpha$.

نتيجة

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان و لتكن I قيمة تكاملها. إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث $|U(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$ و $|L(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$ لكل تجزئة σ يحقق $\|\sigma\| < \alpha$.

1 ليكن $\sigma_n = (x_0, \dots, x_n)$ تجزيًا للفترة $[a, b]$ و
 $\forall j = 1, \dots, n, \lambda_j \in [x_{j-1}, x_j]$ حيث $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
 نقول أن λ هو علامة على التجزئ σ .

المجموع $R(f, \sigma, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f(\lambda_j)$ ، يسمى مجموع ريمان على التجزئ

σ حسب العلامة λ . و بما أن $m_j \leq f(\lambda_j) \leq M_j$ لكل $1 \leq j \leq n$ ، فإن
 $L(f, \sigma) \leq R(f, \sigma) \leq U(f, \sigma)$

إذا كانت الدالة f قابلة لتكامل ريمان وإذا كانت I قيمة تكاملها، فإن لكل $\varepsilon > 0$
 يوجد $\alpha > 0$ بحيث $|R(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$ لكل تجزئ σ ، $|\sigma| < \alpha$.

2 نحصل على نفس النتيجة إذا عوضنا $f(\lambda_j)$ بأي عدد $c_j \in [m_j, M_j]$

نتيجة

تكون دالة $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان إذا وإذا فقط إذا لكل $\varepsilon > 0$ ، توجد دالتين درجيتين على الفترة $[a, b]$ ، f_ε و g_ε بحيث $f_\varepsilon \leq g_\varepsilon$ و $\int_a^b (g_\varepsilon - f_\varepsilon) dx \leq \varepsilon$.

مبرهنة

تكون دالة قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$ إذا و فقط إذا كانت قابلة لتكامل ريمان على الفترات $[a, c]$ و $[c, b]$ و

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

لكل $c \in [a, b]$.

مبرهنة

فضاء الدوال القابلة لتكامل ريمان $[a, b]$ هو فضاء متجهات على \mathbb{R} .

مبرهنة

إذا كانت $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ دالة قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$ و إذا كانت $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، فإنّ الدالة $g \circ f$ قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$.

مبرهنة (متباينة كوشي شوارتز)

لتكن f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. إذاً

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx. \quad (1)$$

مبرهنة [الصيغة الأولى للقيمة المتوسطة للتكامل]

لتكن f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. نفترض أنّ الدالة f متصلة و الدالة g لها إشارة ثابتة على الفترة $[a, b]$. إذاً يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x) dx. \quad (2)$$

نتيجة [متباينة منكوفزي]

إذا كانت f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ ، فإن

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

مبرهنة [الصيغة الثانية للقيمة المتوسطة للتكامل]

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و موجبة و تناقصية و لتكن g دالة قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$. إذا يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx.$$

نتيجة

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و مطردة على الفترة $[a, b]$ و لتكن g دالة قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ ، فإنه يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx.$$

مبرهنة [المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل]

إذا كانت $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، فإن الدالة $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ هي دالة أصلية للدالة f ، لكل $a \in I$.

مبرهنة

تكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وتكن $u: I \rightarrow [a, b]$ دالة قابلة للاشتقاق. إذا
الدالة $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ قابلة للاشتقاق على الفترة I و
لكل $x \in I$ ، $F'(x) = u'(x)f(u(x))$.

مبرهنة

لتكن f و g دالتين من الدرجة C^n على فترة I ، فإن

$$\int f(x)g^{(n)}(x) dx = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p f^{(p)}(x)g^{(n-1-p)}(x) + (-1)^n \int g(x)f^{(n)}(x) dx.$$

مبرهنة [مفكوك تايلور مع باقي تكامل]

لتكن $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ دالة C^n . إذا كان a و x في I ، فإن

$$f(x) = f(a) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

تعريف

- 1 نقول إن دالة $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان محليا على الفترة I إذا كان إقتصار الدالة على كل فترة $[a, b] \subset I$ قابلة لتكامل ريمان.
(كل دالة متصلة أو مطردة على فترة، فهي قابلة لتكامل ريمان محليا.)
- 2 لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة $[a, b[$ حيث $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
نقول إن تكامل الدالة f على الفترة $[a, b[$ متقارب إذا كانت النهاية
$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

موجودة في \mathbb{R} . هذه النهاية تسمى تكامل الدالة f على الفترة $[a, b[$ و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(t) dt$

3 لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة $[a, b]$ ، حيث $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
 نقول إن تكامل الدالة f على الفترة $[a, b]$ متقارب إذا كانت النهاية

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f(t) dt$$

موجودة في \mathbb{R} . هذه النهاية يسمى تكامل الدالة f على الفترة $[a, b]$ و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(t) dt$

4 لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة $[a, b[$ ، $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ و $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 نقول إن تكامل الدالة f على الفترة $[a, b[$ متقارب إذا كان تكامل الدالة f على الفترة $[a, c]$ و على الفترة $[c, b[$ متقاربين لكل $c \in]a, b[$ و

$$\int_a^b f(t) dt$$

نرمز لهذا التكامل بالرمز $\int_a^b f(t) dt$ (هذا التكامل لا يتغير بالعدد c).

تعريف

نقول إن تكامل دالة f على فترة I متقارب مطلقا إذا كان تكامل الدالة $|f|$ على فترة I متقاربا.

اختبار تقارب التكامل المعتل

مبرهنة (اختبار كوشي)

لتكن $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان محليا (يمكن أن نعوض هذه الفرضية بأن تكون الدالة متصلة قطعة قطعة على كامل الفقرة)، حيث $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

يكون التكامل $\int_a^b f(t) dt$ متقاربا إذا و فقط إذا:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c < b : \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in]c, b[.$$

هذا الإختبار هو اختبار كوشي لنهاية الدوال.

نتيجة

لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة I . إذا كان التكامل $\int_I f(x) dx$ متقاربا مطلقا، فهو متقارب.

مبرهنة

لتكن $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة قابلة لتكامل ريمان محليا. يكون التكامل $\int_I f(x) dx$ متقاربا إذا و فقط إذا وجد $M \geq 0$ بحيث $\int_a^b f(x) dx \leq M$ لكل $a < b$ في I .

نتيجة

إذا كانت f و g دالتين موجبتين و قابلتين لتكامل ريمان محليا على فترة I بحيث $f \leq g$.
إذا كان التكامل $\int_I g(x) dx$ متقاربا، فإن التكامل $\int_I f(x) dx$ متقارب.
إذا كان التكامل $\int_I f(x) dx$ غير متقارب، فإن التكامل $\int_I g(x) dx$ غير متقارب.

لتكن f و g دالتين موجبتين و قابلتين لتكامل ريمان محليا على فترة I . نفترض أن $|f| \leq g$ على الفترة I . إذا، إذا كان التكامل $\int_I g(x) dx$ متقاربا، فإن التكامل $\int_I |f(x)| dx$ متقارب أيضا.

1 التكامل $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ متقارب وذلك لأن الدالة $\frac{\sin x}{x}$ يمكن تمديدها كدالة متصلة على الفترة $[0, 1]$.

2 التكامل $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx$ متقارب وذلك لأن

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

هذا التكامل متقارب لأن

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1 \text{ و } \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

$$\text{التكامل } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ متقارب لكل } \alpha > 0. \quad 3$$

إذا كان $b > a > 1$ ، باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل (20)، يوجد

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \frac{1}{a^\alpha} \left| \int_a^c \sin x dx \right| \xrightarrow{a, b \rightarrow +\infty} 0 \text{ بحيث } c > 1$$

$$\text{بما أن } \int_0^x \sin t^2 dt = \int_0^1 \sin t^2 dt + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \quad 4$$

فإن التكامل $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ متقارب.

5 التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ غير متقارب مطلقا.

بما أن التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} dx$ غير متقارب، فإن التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ غير متقارب و التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ غير متقارب.

طريقة أخرى:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

مبرهنة

لتكن $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة وقابلة لتكامل ريمان محليا.

1 إذا وجد $\alpha > 1$ بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = c \in \mathbb{R}$ ، فإن تكامل الدالة f على

الفترة $[1, +\infty)$ متقارب.

2 إذا وجد $\alpha < 1$ بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = c \in]0, +\infty]$ ، فإن تكامل الدالة f

على الفترة $[1, +\infty)$ غير متقارب.

نتيجة

لتكن $a, b \in \mathbb{R}$ و $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة قابلة لتكامل ريمان محليا.
1 إذا وجد $\alpha < 1$ بحيث $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^\alpha f(x) = 0$ ، فإن تكامل الدالة f على

الفترة $]a, b]$ متقارب.

2 إذا وجد $\alpha > 1$ بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - a)^\alpha f(x) = +\infty$ ، فإن تكامل الدالة f

على الفترة $]a, b]$ غير متقارب.

- لتكن α و β في \mathbb{R} . نعرف الدالة $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$.
- إذا كان $\alpha > 1$ ، فإن لكل $1 < \gamma < \alpha$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = 0$ وبالتالي فإن تكامل الدالة $f_{\alpha,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ متقارب.
 - إذا كان $\alpha < 1$ ، فإن لكل $1 > \gamma > \alpha$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$ وبالتالي فإن تكامل الدالة $f_{\alpha,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ غير متقارب.
 - إذا كان $\alpha = 1$ ، فإن $\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dt}{t^\beta}$ ويكون تكامل الدالة $f_{1,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ متقاربا إذا و فقط إذا $\beta > 1$.

اختبار آبل للتقارب

مبرهنة

[مبرهنة آبل]

لتكن $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان محليا و $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و
تناقصية، حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. نفترض أن:

1 يوجد $M \geq 0$ بحيث $\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq M$ لكل x و y في $[a, b[$ ،

2 $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$

إذاً التكامل $\int_a^b f(x)g(x) dx$ متقارب.

البرهان

ليكن $a \leq x < y < b$. باستعمال المبرهنة (18) ،

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| &= \left| g(x) \int_x^c f(t) dt + g(y) \int_c^y f(t) dt \right| \\ &\leq M(|g(x)| + |g(y)|). \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^y f(t)g(t) dt = 0$

$$\text{التكامل } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx \text{ متقارب لكل } \alpha > 0.$$