التفاضل

أ.د. إبراهيم العليان

جامعة الملك سعود

المحتويات

نشأة التفاضل

نيوتن وليبنز

- ظهر في منتصف القرن السابع عشر
- ساهم نيوتن في نشأة التفاضل والتكامل عام 1666 واستخدمه في حل مسائل فيزيائية في السرعة والحركة
- بعد 10 سنوات ظهرت مساهمة ليبنز من خلال دراسته لمماسات المنحنيات ومسائل المساحة
- عُرفت المشتقة بشكل دقيق باستخدام النهايات بعد أن عرف كوشي النهاية عام 1821

تعريف المشتقة

تعريف

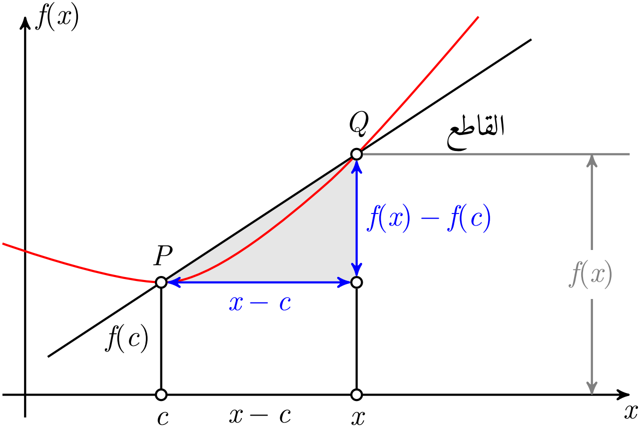
لتكن I فترة، ولتكن $f: I \to \mathbb{R}$ إذا كانت $c \in I$ وكانت النهاية

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة، فإن

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ويقال إن f قابلة للاشتقاق عند c



$f(x)$
Q
القاطع
$f(x) - f(c)$
P
$f(x)$
$x - c$
$f(c)$
c
$x - c$
x
x

المشتقة عند أطراف الفترة

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في I فإن f قابلة للاشتقاق على I .

إذا كانت $I = [a, b]$ فإن المشتقة عند a, b تعرف كما يلي

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

أمثلة

أوجد المشتقة للدوال التالية عند c باستخدام التعريف

1. $f(x) = k$
2. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$
3. $f(x) = |x|$

تعريف آخر للمشتقة

تعريف

إذا كانت إذا كانت الدالة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق، فإن مشتقتها تعطى بالعلاقة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

المشتقة اليمنى واليسرى

تعريف

إذا كانت إذا كانت الدالة $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة c فإن المشتقة اليمنى واليسرى تعطى بالعلاقة

$$f_+{}'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$f_-{}'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

المشتقة عند أطراف الفترة

إذا كانت $I = [a, b]$ فإن المشتقة عند a, b تعرف كما يلي

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

أمثلة

أوجد مشتقة الدالة التالية باستخدام التعريف

1. $f(x) = \sin x$

الاشتقاق والاتصال

نظرية

إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فهي متصلة عند c ولكن العكس غير صحيح

مشتقة جمع، ضرب، قسمة دالتين

نظرية

إذا كانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فإن

1. $g + f$ قابلة للاشتقاق $(g+f)'(c) = g'(c) + f'(c)$

2. fg قابلة للاشتقاق

$$(fg)'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$$

3. إذا كانت $g(c) \neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

مشتقة f^n

نتيجة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن

1. f^2 قابلة للاشتقاق عند c و $(f^2)'(c) = 2f(c)f'(c)$
2. f^n قابلة للاشتقاق عند c و $(f^n)'(c) = nf^{n-1}(c)f'(c)$

أمثلة

أمثلة

1. مشتقة x^n
2. مشتقة كثيرة الحدود $p(x)$
3. مشتقة x^{-n}

مشتقة تحصيل دالتين

نظرية

إذا كانت I, J فترتين وكانت $f : I \to \mathbb{R}$ وكانت $f(I) \subset J$ و $g : J \to \mathbb{R}$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ و g قابلة للاشتقاق عند $f(c)$

فإن $gof : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند c ومشتقتها

$$(gof)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

ملاحظات

1

$$(gof)' = (g' of) \cdot f'$$

2

$$y = f(x), \qquad w = g(y)$$

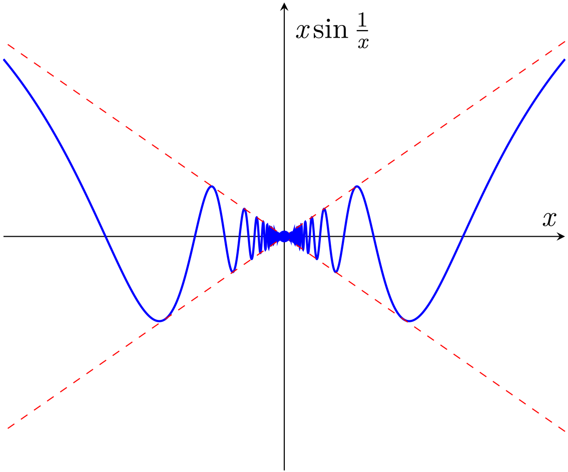
$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

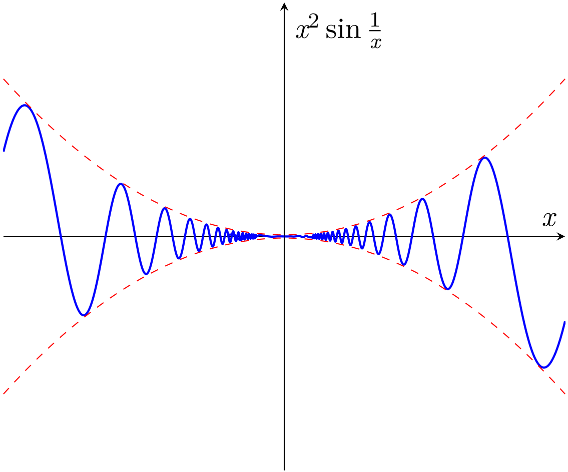
أمثلة

1
$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

2
$$g(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

3
$$h(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$


$x \sin \frac{1}{x}$
x



$x^2 \sin \frac{1}{x}$
x

تعريف

نقول إن $f \in C^n[a, b]$ إذا كانت المشتقات $f', \ldots, f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a, b]$. ونقول إن $f \in C^\infty[a, b]$ إذا كانت جميع المشتقات موجودة، وتسمى f دالة ناعمة smooth funtion.

مشتقة الدالة العكسية

نظرية

إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة على الفترة وقابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق عند $d = f(c)$ إذا وفقط إذا كانت $f'(c) \neq 0$

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

أو

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

أمثلة

1. الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3$$

متباينة وقابلة للاشتقاق، أوجد

$$(f^{-1})'(8)$$

2. الدالة $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin(x)$$

متباينة وقابلة للاشتقاق

أمثلة

1. الدالة $f : D \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

$$D = \begin{cases} \mathbb{R} - \{0\} & \text{فردي } n; \\ (0, \infty) & \text{زوجي } n. \end{cases}$$

نظرية القيمة المتوسطة

تعتبر نظرية القيمة المتوسطة من النظريات المهمة في حساب التفاضل

القيم القصوى المحلية

تعريف

نقول إن للدالة $f : D \to \mathbb{R}$ قيمة عظمى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار $U = (c - \delta, c + \delta)$ بحيث

$$f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in U \cap D$$

ولها قيمة صغرى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار $U = (c - \delta, c + \delta)$ بحيث

$$f(x) \geq f(c) \qquad \forall x \in U \cap D$$

القيمة العظمى (الصغرى) المطلقة هي قيمة عظمى (صغرى) محلية، ولكن العكس غير صحيح

قيمة المشتقة عند القيم القصوى

نظرية

إذا كان للدالة f قيمة قصوى على الفترة المفتوحة (a, b) عند النقطة c وكانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن

$$f'(c) = 0$$

النقاط الحرجة

تعريف

نقول إن c نقطة حرجة للدالة f إذا كانت

1. f غير قابلة للاشتقاق عند c
2. أو كانت $f'(c) = 0$

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c فإن c نقطة حرجة للدالة f
2. إذا كان للدالة $f : D \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c حيث c داخل D فإن c نقطة حرجة للدالة f

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f : D \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c حيث c تقع في حافة D فإن c ليست بالضرورة نقطة حرجة للدالة f

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f : D \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c حيث c تقع في حافة D فإن c ليست بالضرورة نقطة حرجة للدالة f

   مثال: $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 1]$

2. إذا كانت c نقطة حرجة للدالة f فليس من الضروري أن يكون للدالة قيمة قصوى عند c

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f: D \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c حيث c تقع في حافة D فإن c ليست بالضرورة نقطة حرجة للدالة f

   مثال: $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 1]$

2. إذا كانت c نقطة حرجة للدالة f فليس من الضروري أن يكون للدالة قيمة قصوى عند c

   مثال: $f(x) = x^3$ عند $x = 0$

مثال

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$

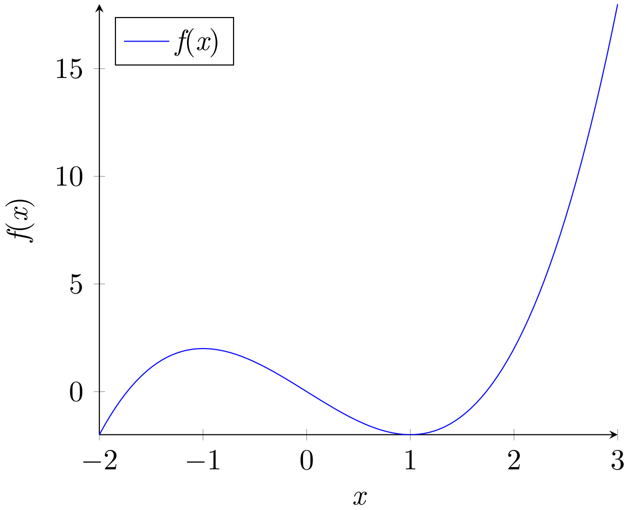
$f(x) = x^3 - 3x$

مثال

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 3x$

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(-2) = -2, \quad f(3) = 18$$



f(x)
15
10
5
0
−2
−1
0
1
2
3
x
f(x)

نظرية رول

نظرية

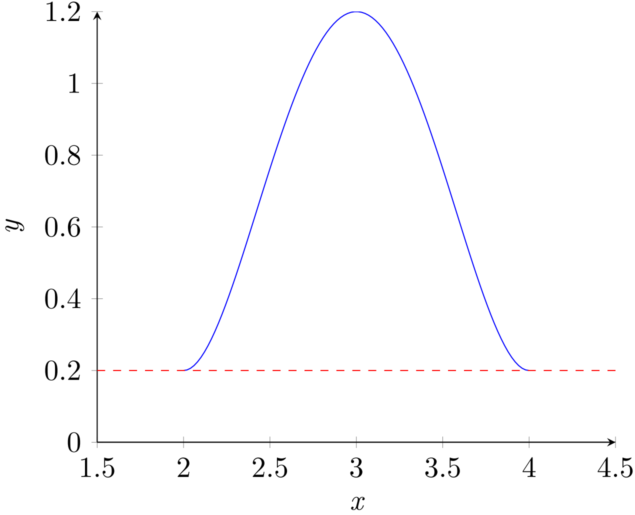
إذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f'(c) = 0$$

نظرية رول



مثال

لتكن $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = -x^2 + 6x - 6$$

أوجد c التي تحقق نظرية رول.

مثال

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

هذه الدالة لا تحقق شروط نظرية رول

نظرية القيمة المتوسطة

نظرية

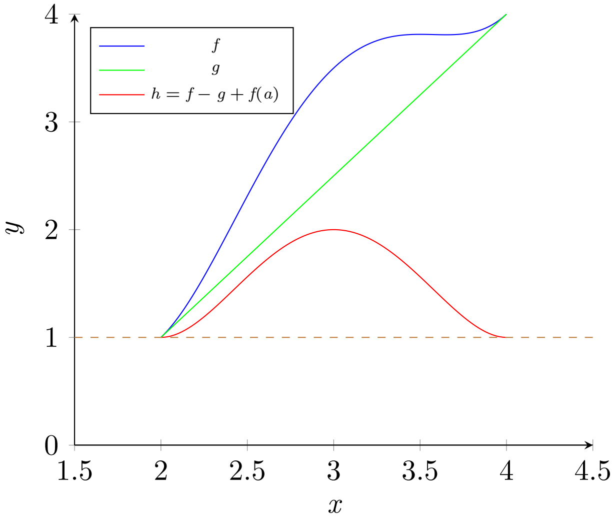
إذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a, b)

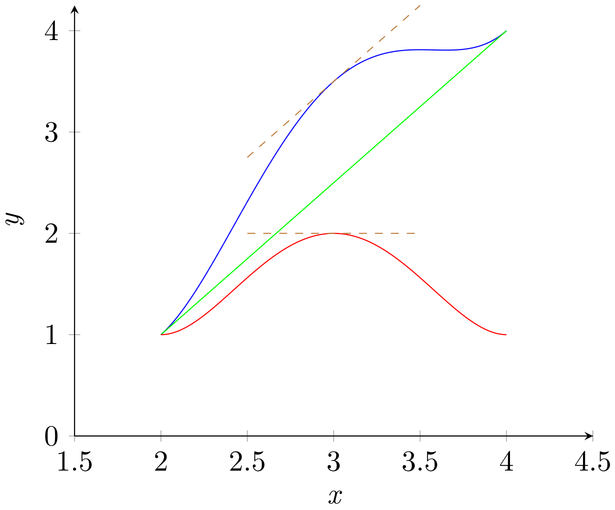
فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

رسم الدالة



رسم الدالة



مثال

لتكن $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = x^3$$

أوجد c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة.

أمثلة

1. أثبت أن

$$\sin x \leq x \qquad \forall x \geq 0$$

نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق، فإن f' محدودة على I، إذا وفقط إذا كانت f تحقق شرط ليبشتز على I.

أمثلة

1. $f(x) = \sin x$

أمثلة

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \tan^{-1} x$

أمثلة

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \tan^{-1} x$
3. $f(x) = \log x$
   $[2, \infty)$.

أمثلة

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \tan^{-1} x$
3. $f(x) = \log x$
   $[2, \infty)$.
4. $f(x) = \log x$
   $(0, 1)$.

نظرية

نظرية

إذا كانت الدالة $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ متصلة، وقابلة للاشتقاق (ماعدا ربما عند $c \in (a,b)$) وكانت $\lim_{x\to c} f'(x)$ موجودة، فإن $f'(c)$ موجودة، كما أن

$$f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x)$$

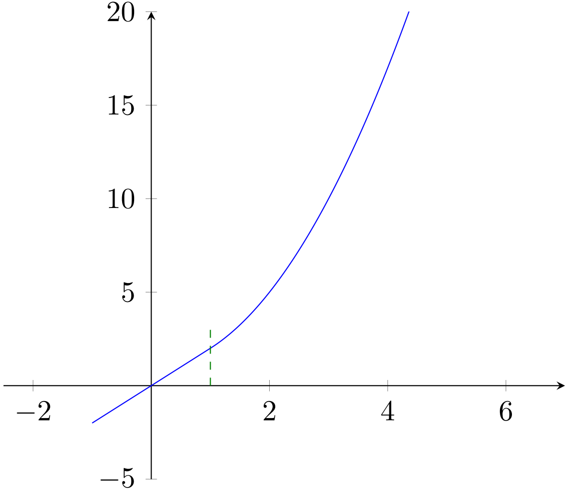
مثال

ابحث قابلية اشتقاق الدوال الآتية

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & x \geq 2 \\ 8x & x < 2 \end{cases}$$

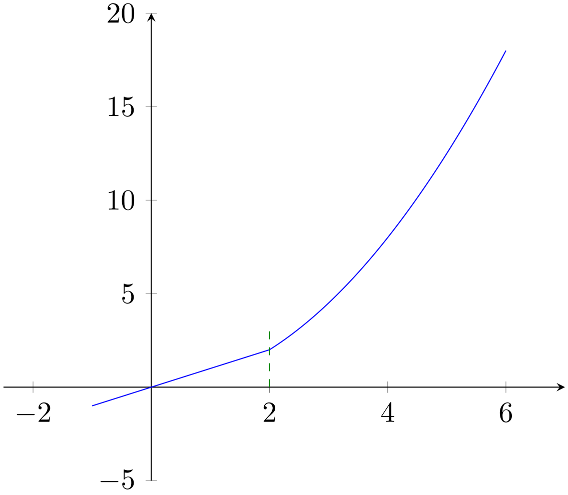
مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$


20
15
10
5
−5
−2
2
4
6

مثال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \geq 2 \\ x & x < 2 \end{cases}$$



20
15
10
5
−5
−2
2
4
6

مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

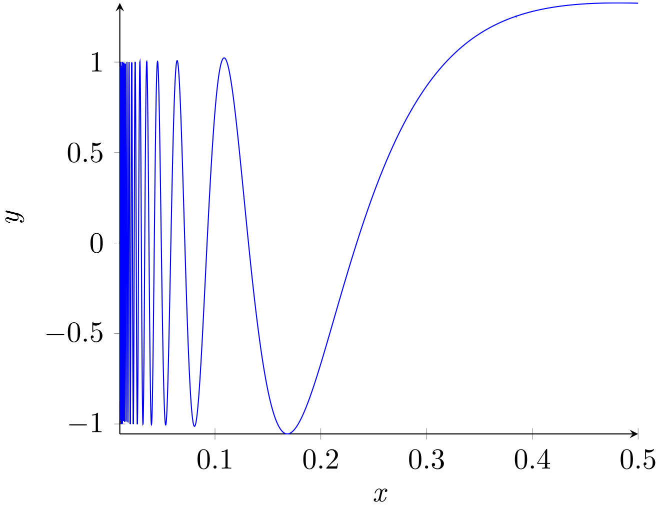
مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

رسم الدالة



نظرية

نظرية

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على (a,b)

1. إذا كان $f'(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f دالة ثابتة على $[a,b]$
2. إذا كان $f'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f دالة متباينة على $[a,b]$

نتيجة

نتيجة

لتكن $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ متصلة على $[a, b]$ و قابلة للاشتقاق على (a, b)
إذا كان

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in (a, b)$$

فإنه يوجد ثابت $c \in \mathbb{R}$ بحيث

$$f(x) = g(x) + c \qquad \forall x \in [a, b]$$

الاطراد

نظرية

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على (a,b)

1. إذا كان $f'(x)\geq 0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متزايدة على $[a,b]$
2. إذا كان $f'(x)\leq 0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متناقصة على $[a,b]$
3. إذا كان $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متزايدة فعلا على $[a,b]$
4. إذا كان $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متناقصة فعلا على $[a,b]$

ملاحظات

1. في النظريتين السابقتين، إذا أسقطنا شرط الاتصال على الفترة $[a, b]$ فإن النتيجة صحيحة، لكن على الفترة (a, b)
2. f متزايدة على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كان $0 \geq f'(x)$ لكل $x \in (a, b)$
3. f متناقصة على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كان $0 \leq f'(x)$ لكل $x \in (a, b)$
4. إذا كانت f متزايدة فعلا فلا يشترط أن يكون $f'(x) > 0$

مثال: $f(x) = x^3$

اختبار المشتقة الأولى

نظرية

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة متصلة، و c نقطة حرجة للدالة f

إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث 1

$$f'(x) < 0 \qquad \forall x \in U, x < c$$

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in U, x > c$$

فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

اختبار المشتقة الأولى

نظرية

1 إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in U, x < c$$

$$f'(x) < 0 \qquad \forall x \in U, x > c$$

فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

2 إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث يكون للمشتقة $f'(x)$ نفس الإشارةلكل $x \in U - \{c\}$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى للدالة f

نظرية كوشي للقيمة المتوسطة

نظرية

إذا كانت $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a, b)

فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

ملاحظة

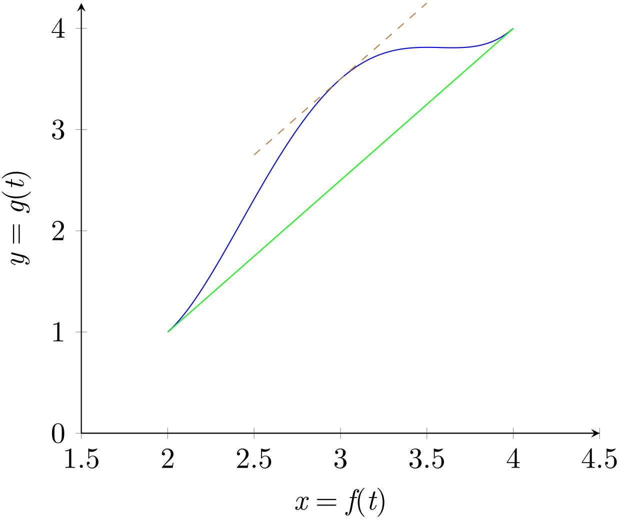
هل يمكن تعريف نظرية كوشي للقيمة المتوسطة بالشكل التالي؟

نظرية

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

$$\frac{[f(b) - f(a)]}{[g(b) - g(a)]} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

رسم الدالة



مشتقة الدالة العكسية

نظرية

إذا كانت $f \colon I = (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ومشتقتها f' متصلة على I وكانت $b \in I$ و $f'(b) \neq 0$ فإنه يوجد فترة مفتوحة $J \subset I$ تحتوي b بحيث تكون الدالة $f|_J$ متباينة والدالة $(f|_J)^{-1}$ قابلة للاشتقاق عند $f(b)$

$$\left((f|_J)^{-1}\right)'(f(b)) = \frac{1}{f'(b)}$$

الخاصية البينية للمشتقة

نظرية داربو

إذا كانت $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وكانت λ تقع بين $f'(a)$ و $f'(b)$ أي إن

$$f'(a) < \lambda < f'(b) \qquad or \qquad f'(b) < \lambda < f'(a)$$

فإنه يوجد فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f'(c) = \lambda$$

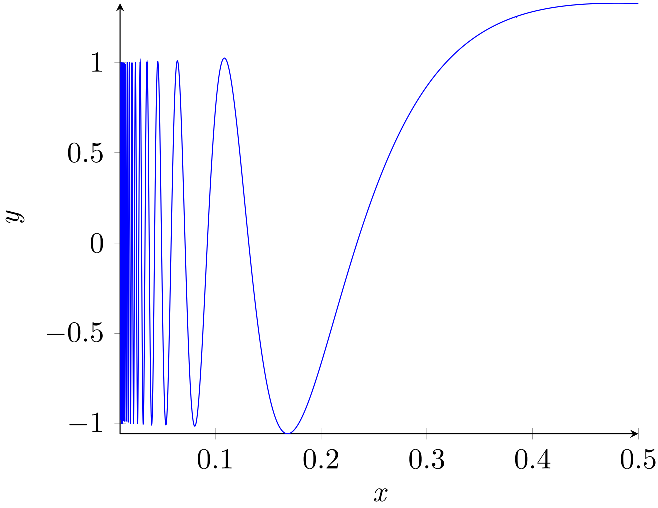
مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

لاحظ أن عدم اتصال المشتقة ليس من نوع القفزة

رسم الدالة



مثال

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ليست مشتقة لأي دالة في جوار صفر

قاعدة لوبيتال

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim_{x\to c} f(x) = K$، فإن

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$$

قاعدة لوبيتال

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim_{x\to c} f(x) = K$، فإن

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$$

تسهل عملية إيجاد بعض النهايات المعقدة

قاعدة لو بيتال

نظرية

إذا كانت $c \in I$ وكانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ متصلة على I وقابلة للاشتقاق على I وكان

1. $f(c) = g(c) = 0$
2. $g'(c) \neq 0$

فإن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

قاعدة لوبيتال

نظرية

إذا كانت $c \in I$ وكانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ متصلة على I وقابلة للاشتقاق على $I - \{c\}$ وكان

1. $g'(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in I - \{c\}$
2. $f(c) = g(c) = 0$
3. النهاية $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

فإن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + 4x}$$

قاعدة لوبيتال

نظرية

إذا كانت $a > 0$ وكانت $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق

1. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$
2. $g'(x) \neq 0 \qquad \forall\, x > a$
3. النهاية $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

فإن

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظات

يوجد عدد من حالات عدم التعيين مثل

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0\cdot\infty$$

$$\infty-\infty \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$

قاعدة لوبيتال

نظرية

إذا كانت $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق

1. $\forall\, x \in (a, b) \qquad g'(x) \neq 0$
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$
3. النهاية $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

فإن

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

أمثلة

1 $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x}$$

2 $$\lim_{x\to 0^+} x\log(x)$$

3 $$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x$$

4 $$\lim_{x\to 0^+} (1+\frac{1}{x})^x$$

أمثلة

1 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)+x}{x}$$

3 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x)}{x}$$

مبرهنة تيلور

نهتم أحيانا بتقريب الدوال إلى كثيرات حدود لأن كثيرات الحدود يمكن معرفة خواصها بسهولة.
تعتبر مبرهنة تايلور من المبرهنات المهمة في التفاضل والتحليل بشكل عام، وتستخدم لإثبات العديد من المبرهنات.
كما تستخدم في التحليل العددي.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

نظرية تيلور

نظرية

وكانت $f \in C^n[a, b]$ أي المشتقات $f', \dots, f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a, b]$ وكانت $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق على (a, b)

إذا كان $x_0 \in [a, b]$ فإنه لأي $x \in [a, b] - \{x_0\}$ يوجد نقطة c بين x_0 و x بحيث

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

بوضع $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

صيغة تيلور

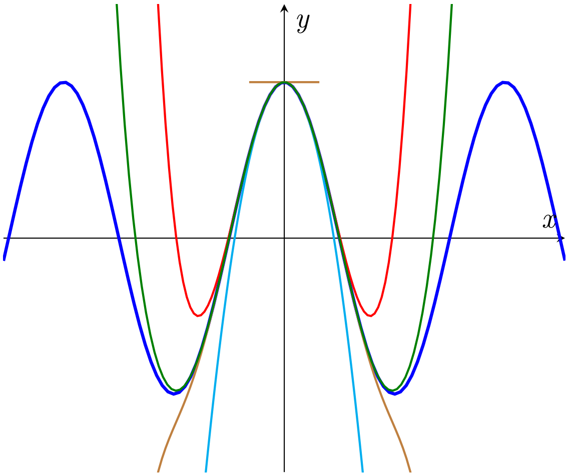
$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

يسمى $R_n(x)$ الباقي

$\cos x$



أمثلة

1. قرب الدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ بكثيرة حدود من الدرجة الثالثة عند $x_0 = 0$
2. ما مقدار الخطأ في التقريب على الفترة $[0, \frac{1}{2}]$
3. قرب الدالة $f(x) = e^{x}$ بكثيرة حدود عند $x_0 = 0$
4. إذا أردنا الحصول على تقريب للعدد e لا يتجاوز الخطأ فيه 10^{-2} ، فما قيمة n ؟
5. قرب الدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ بكثيرة حدود من الدرجة n عند $x_0 = 0$

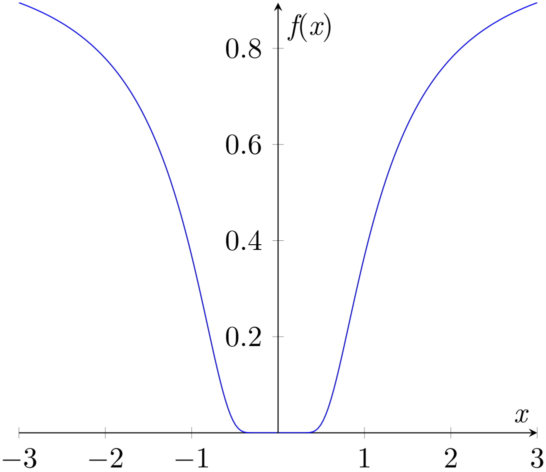
أمثلة

1. قرب الدالة

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

بكثيرة حدود من الدرجة n عند $x_0 = 0$

رسم الدالة



نظرية تيلور

نظرية

وكانت $f \in C^n[a,b]$ أي المشتقات $f', \dots, f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a,b]$ وكانت $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق على (a,b)

إذا كان $x_0 \in [a,b]$ فإنه لأي $x \in [a,b] - \{x_0\}$ يوجد نقطة c بين x_0 و x بحيث

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \dots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

نظرية ينق

نظرية

إذا كانت
$f, f', \ldots, f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a, b]$ وكانت $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق عند
$x_0 \in [a, b]$
إذا كان $x \in [a, b]$ فإن

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + E$$

حيث $\frac{E}{(x-x_0)^{n+1}} \to 0$ عندما $x \to x_0$

نتيجة

نتيجة

إذا كانت

$$f'(c) = f''(c) \ldots, f^{(m-1)}(c) = 0$$

و

$$f^{(m)}(c) \neq 0$$

فإن

- إذا كان m عددا فرديا، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية
- إذا كان m عددا زوجيا وكانت $0 > f^{(m)}(c)$ ، فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية
- إذا كان m عددا زوجيا وكانت $0 < f^{(m)}(c)$ ، فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية