Exercise

تمرين : تمتلك شركه مصنعين للانتاج حيث تبلغ الطاقة الانتاجيه 100 و 110 وحدة في الاسبوع للمنتج على التوالي. و يتم شحن هذه الوحدات الى 3 مستودعات مختلفة تتطلب 80 و 70 و 60 وحدة في الاسبوع على التوالي.
الجدول التالي يوضح تكاليف النقل بين المصنع والمستودع (بالدولار) لكل وحدة .

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	1	2	3	100
S_2	4	1	5	110
Demand	80	70	60	

A- أوجد افضل كميه للوحدات المنتجه لتامين متطلبات المستودعات بأقل التكاليف؟ (باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي)

x_{ij} : عدد الوحدات المنتجه المنقولة من المصنع i إلى المستودع j حيث $i = 1,2 \; ; \; j = 1,2,3$

Answer:

$$\text{Min } Z = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + x_{22} + 5x_{23}$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 110$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 80$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 70$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 60$$

Min $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$
s.t
$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq s_i$
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j$

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply		
S_1	1 80	2 20	3	100	20	0
S_2	4	1 50	5 60	110	60	0
Demand	80	70	60			
	0	50 0	0			

عدد الخلايا المملوءه (متغيرات اساسية) بقيم غير سالبة 4 والتي تكافئ الشرط $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$
اذا الحل يعتبر احد الحلول الاساسية الممكنة:

$$x_{11} = 80, \; x_{12} = 20, \; x_{22} = 50, \; x_{23} = 60$$
$$Z = 80 * 1 + 20 * 2 + 50 * 1 + 60 * 5 = \mathbf{470\$}$$

لاختبار امثليه الحل الاساسي باستخدام طريقة التوزيع المعدل (Modified distribution)

$$\delta_{ij} = v_j + u_i - C_{ij}$$

		V_1=1	V_2=2	V_3=6	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
U_1=0	S_1	1 80	- 2 20	3 + δ_{13}= 3	100
U_2=-1	S_2	4 δ_{21}= - 4	+ 1 50	- 5 60	110
	Demand	80	70	60	

- Let u_1=0, we get
- $c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow$ $v_1 = c_{11} - u_1 \Rightarrow$ $v_1 = 1 - 0 = 1$
- $c_{12} = u1 + v2 \Rightarrow$ $v2 = c12 - u1 \Rightarrow$ $v2 = 2 - 0 = 2$
- $c_{22} = u2 + v2 \Rightarrow$ $u2 = c22 - v2 \Rightarrow$ $u2 = 1 - 2 = -1$
- $c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow$ $v_3 = c_{23} - u_2 \Rightarrow$ $v_3 = 5 + 1 = 6$

		V_1= 1	V_2= -1	V_3= 3	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
U_1= 0	S_1	1 80	2 δ_{12}= -3	3 20	100
U_2= 2	S_2	4 δ_{21}= -1	1 70	5 40	110
	Demand	80	70	60	

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \leq 0$ ، لذا فالحل امثل .

$$X_{11} = 80,\ X_{13} = 20,\ X_{22} = 70,\ X_{23} = 40$$

$$Z = 80 * 1 + 20 * 3 + 70 * 1 + 40 * 5 = 410\$$$

H.W

B- اعد حل المسأله بالفقره A بعد إستبدال الطاقه الانتاجيه من المنشأه الثانيه إلى 130 بدلاً من 110.

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	1	2	3	100
S_2	4	1	5	130
Demand	80	70	60	230 / 210

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	D_4(Dummy)	Supply
S_1	1	2	3	0	100
S_2	4	1	5	0	130
Demand	80	70	60	20	230=230

		V_1=1	V_2=2	V_3=6	V_4=-1		
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	D_4(Dummy)	Supply	
U_1=0	S_1	1 80	- 2 20	+ 3 δ_{13}= 3	0 δ_{14}= 1	100	20 0
U_2=-1	S_2	4 δ_{21}= -4	+ 1 50	- 5 60	0 20	130	80 20 0
	Demand	80	70	60	20		
		0	50	0	0		
			0				

			V_1= 1	V_2= -1	V_3= 3	V_4= -2	
		Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	D_4(Dummy)	Supply
U_1= 0	S_1		1 80	2 δ_{12}= -3	3 20	0 δ_{14}=-2	100
U_2= 2	S_2		4 δ_{21}= -1	1 70	5 40	0 20	110
	Demand		80	70	60	20	

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \leq 0$ ، لذا فالحل امثل .

$$X_{11} = 80,\ X_{13} = 20,\ X_{22} = 70,\ X_{23} = 40$$
$$Z = 80 * 1 + 20 * 3 + 70 * 1 + 40 * 5 = 410\$$$

C- اعد حل المسأله بالفقرة B بعد إستبدال طلبات المستودعات إلى 90 و 80 و 100 .

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	1	2	3	100
S_2	4	1	5	130
Demand	90	80	100	230 270

		$V_1 = 1$	$V_2 = 2$	$V_3 = 6$		
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply	
$U_1 = 0$	S_1	1 90	- 2 10	+ 3 $\delta_{13} = 3$	100	10 0
$U_2 = -1$	S_2	4 $\delta_{21} = -4$	+ 1 70	- 5 60	130	60 0
$U_3 = -6$	S_3 (Dummy)	0 $\delta_{12} = -5$	0 $\delta_{12} = -4$	0 40	40	0
	Demand	90	80	100	270 / 270	
		0	70 0	40 0		

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \leq 0$ ، لذا فالحل امثل .

تمرين : يمكن لشركة طيران داخلية شراء الوقود النفاث من محطتين، وتحتاج شركة الطيران للشهر المقبل في كل مطار من مطاراتها الثلاثة التي تخدم فيها إلى 100,000 جالون في المطار 1 ، و 180,000 جالون في المطار 2 و 350,000 جلون في المطار 3. ويمكن لكل محطة الإمداد بالوقود لكل مطار بالأسعار(سنت لكل جالون) الموضحة بالجدول التالي:

من \ إلى	المطار 1	المطار 2	المطار 3
المحطه 1	92	89	90
المحطه 2	91	91	95

و مع ذلك لكل محطة طاقة انتاجية تستطيع الامداد بها خلال شهر ، وهي 330,000 جالون للمحطة الاولى و 280,000 للمحطة الثانيه . حدد سياسة الشراء التي ستفي بإحتياجات شركة الطيران بأقل تكلفة كلية.

الحل: باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	92	89	90	330,000
S_2	91	91	95	280,000
Demand	100,000	180,000	350,000	610,000 / 630,000

x_{ij} : عدد الجالونات المنقولة من المحطة i إلى المطار j . $i = 1,2 \; ; \; j = 1,2,3$

بما ان اجمالي الطلب (630,000) لا يساوي اجمالي الإمداد (610,000) ، لذا نحتاج اضافة نقطة إمداد إضافية (محطة وهمية) يكون مقدار الامداد عندها 20,000 جالون و تكلفة النقل منها إلى اي مطار تساوي الصفر.

$min(S_i, D_j) = x_{ij}$

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply			
S_1	92 100,000	89 180,000	90 50,000	330,000	230,000	50,000	0
S_2	91	91	95 280,000	280,000	0		
S_3 *(dummy)*	0	0	0 20,000	20,000	0		
Demand	100,000	180,000	350,000	630,000			
	0	0	300,000 20,000 0				

عدد الخلايا المملوءه (متغيرات اساسية) بقيم غير سالبة 5 والتي تكافئ الشرط $m+n-1=3+3-1=5$

اذا الحل يعتبر احد الحلول الاساسية الممكنة:

$x_{11}=100{,}000\ ;\ x_{12}=180{,}000\ ;\ x_{13}=50{,}000\ ;\ x_{23}=280{,}000\ ;\ x_{33}=20{,}000\ ;$
$Z=56{,}320000$ سنت

الخطوات: 1- نحسب الاوزان v_j وu_i لكل خلية اساسية حيث ان $v_j+u_i=C_{ij}$

2- نحسب $\boldsymbol{\delta_{ij}=v_i+u_j-C_{ij}}$ لكل خلية غير اساسية . فإذا كانت جميع $\boldsymbol{\delta_{ij}\le 0}$ فإن الحل أمثل.

3- نكون حلقة التحوير بحيث تبدأ باكبرقيمة موجبة $\boldsymbol{\delta_{ij}}$ و نوزع الاشارات + و- بالتبادل على خلايا الحلقة.

4-نحدد θ وهي اصغر قيمه ذات اشاره سالبه، بحيث تضاف للخلايا الموجبه و تطرح من الخلايا السالبة.

5- نكرر الخطوات حتى نحصل على الحل الامثل.

		$V_1=92$	$V_2=89$	$V_3=90$	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
$U_1=0$	S_1	- 92 100,000	89 180,000	+ 90 50,000	330,000
$U_2=5$	S_2	+ 91 $\delta_{21}=6$	91 $\delta_{22}=3$	- 95 280,000	280,000
$U_3=-90$	S_3 *(dummy)*	0 $\delta_{31}=2$	0 $\delta_{32}=-1$	0 20,000	20,000
	Demand	100,000	180,000	350,000	630,000

Let $u_1=0$

- $c_{11}=u_1+v_1 \Rightarrow v_1=92-0=92$
- $c_{12}=u_1+v_2 \Rightarrow v_2=89-0=89$
- $c_{13}=u_1+v_3 \Rightarrow v_3=90-0=90$
- $c_{23}=u_2+v_3 \Rightarrow u_2=95-90=5$
- $c_{33}=u_3+v_3 \Rightarrow u_3=0-90=-90$

		$V_1=-4$	$V_2=-1$	$V_3=0$	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
$U_1=90$	S_1	92 $\delta_{11}=-6$	- 89 180,000	+ 90 150,000	330,000
$U_2=95$	S_2	91 100,000	+ 91 $\delta_{22}=3$	- 95 180,000	280,000
$U_3=0$	S_3 *(dummy)*	0 $\delta_{31}=-4$	0 $\delta_{32}=-1$	0 20,000	20,000
	Demand	100,000	180,000	350,000	630,000

Let $v_3=0$

- $c_{13}=u_1+v_3 \Rightarrow u_1=90-0=90$
- $c_{12}=u_1+v_2 \Rightarrow v_2=89-90=-1$
- $c_{23}=u_2+v_3 \Rightarrow u_2=95-0=95$
- $c_{21}=u_2+v_1 \Rightarrow v_1=91-95=-4$
- $c_{33}=u_3+v_3 \Rightarrow u_3=0-0=0$

		V_1= 89	V_2= 89	V_3= 90	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
U_1= 0	S_1	92 δ_{11}= -3	89 0	90 330,000	330,000
U_2= 2	S_2	91 100,000	91 180,000	95 δ_{23}= -3	280,000
U_3= -90	S_3 *(dummy)*	0 δ_{31}= -1	0 δ_{32}= -1	0 20,000	20,000
	Demand	100,000	180,000	350,000	630,000

Let $u_1 = 0$

- $c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = 89 - 0 = 89$
- $c_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow u_2 = 91 - 89 = 2$
- $c_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow v_1 = 91 - 2 = 89$
- $c_{13} = u_1 + v_3 \Rightarrow v_3 = 90 - 0 = 90$
- $c_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow u_3 = 0 - 90 = -90$

بما انه يوجد خلية مملوءة بالقيمه صفر فإن الحل الاساسي الممكن منحل (degenerate).

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \leq 0$ ، لذا فالحل امثل .

$$x_{13} = 330{,}000\ ;\ x_{21} = 100{,}000\ ;\ x_{22} = 180{,}000\ ;\ x_{33} = 20{,}000$$

$$Z = 90 \times 330000 + 91 \times 100000 + 91 \times 180000 + 0 \times 20000 = 55180000$$ سنت