مقدمة في التحليل الحقيقي

أ.د. إبراهيم بن صالح العليان
قسم الرياضيات
جامعة الملك سعود

مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف المرسلين، نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

نشأت فكرة تأليف هذا الكتاب أثناء قيامي بتدريس مقرر التحليل الحقيقي لطلاب قسم الرياضيات في جامعة الملك سعود لعدة فصول دراسية. ومن خلال الشرح والتفصيل في البراهين تبين أن الرسم يسهل فهم البرهان بشكل أسرع، لذلك حرصت أن يجمع الكتاب بين المعلومات العلمية، وجودة الإخراج، وسهولة الشرح مع طرح العديد من الأمثلة لاستيعاب المفاهيم الجديدة.

ظهر علم التفاضل على يد نيوتن وليبنز في نهايات القرن السابع عشر الميلادي، ولكن التحليل الحقيقي بدأ في وقت متأخر على يد كوشي وبولزانو وفايرشتراس في القرن التاسع عشر.

في التحليل الحقيقي ندرس موضوعات مشابهة للموضوعات التي تم التطرق لها في التفاضل والتكامل مع اختلاف طريقة المعالجة. في التفاضل والتكامل كان التركيز على الحسابات والتطبيقات (مثل إيجاد النهاية أو حساب المشتقة، إو إيجاد التكامل)، بينما يركز التحليل الحقيقي على دراسة الأعداد الحقيقية والمتتاليات والدوال بشكل أكثر صرامة رياضية، مع التركيز على المفاهيم أكثر من الإجراءات، إضافة لتنمية القدرة على البرهان.

في هذا الكتاب نركز على موضوعات المتتاليات والاتصال والاشتقاق. ونقدم البراهين بشكل مفصل مع استخدام الرسم عند الحاجة حتى يكون الكتاب تعليميا، أكثر من كونه مجرد مرجع.

في الباب الأول نقدم مبادئ أساسية في المجموعات والدوال التي سوف نستخدمها في الكتاب ثم نوضح طرق البرهان والتي نعتمد عليها بشكل كبير في الأبواب التالية، ويمكن للطالب الذي سبق أن درس هذه الموضوعات أن يكتفي بمراجعة سريعة لهذا الباب.

في الباب الثاني نقدم خصائص نظام الأعداد الحقيقية، ومن أبرز هذه الخصائص خاصية مسلمة التمام. ثم نتطرق للمجموعات القابلة للعد ونثبت أن الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

في الباب الثالث نعالج المتتاليات في الأعداد الحقيقية، ونتعرف على مفهوم نهايات المتتاليات. ثم نتطرق للمتتاليات الجزئية، ونناقش مبرهنة بولزانو فايرشتراس للمتتاليات، ونختم هذا الباب بالحديث عن متتالية كوشي.

في الباب الرابع، نتطرق لبعض المفاهيم التوبولجية البسيطة في الأعداد الحقيقية، مثل نقاط التراكم والمجموعات المفتوحة والمغلقة، والمجموعات المتراصة.

يعتبر البابان الخامس والسادس عن النهايات والاتصال من أهم الأبواب في هذا الكتاب. حيث نستفيد من المتتاليات في إثبات العديد من المبرهنات المتعلقة بنهايات الدوال. كما نركز في الاتصال على خصائص الدوال المتصلة على فترة. ثم نتعرف على الاتصال المنتظم وخصائص الدوال المتصلة بانتظام.

أما الباب السابع والأخير فنتطرق فيه للاشتقاق وبعض التطبيقات المهمة على الاشتقاق مثل مبرهنة القيمة المتوسطة وقاعدة لوبيتال ومبرهنة تيلور.

يحتوي الكتاب على العديد من المسائل المحلولة والتمارين في نهاية كل فصل، ويوجد شرح كامل لمحتوى الكتاب في قناة اليوتيوب https://youtube.com/playlist?list=PLoRgr6QHv33tM3VeBZRu8OVFoqAeSwm0n

وفي الختام، آمل أن أكون قد وفقت في تقديم نبذة عن التحليل الحقيقي، وأن يجد الكتاب الاستحسان والقبول لدى القارئ.

كما أرحب بالآراء والنقد فيما يتعلق بالكتاب، وأتقدم بالشكر لكل من يبدي ملاحظاته على الإيميل ialolyan@ksu.edu.sa

المؤلف

المحتويات

الباب الأول

مفاهيم أساسية

في هذا الباب نتطرق لبعض المفاهيم الأساسية التي نحتاجها في دراسة التحليل الحقيقي، بداية بالمجموعات، ثم الدوال، ثم نختم هذا الباب بالحديث عن المنطق وطرائق البرهان.

1.1 المجموعات

تعتبر المجموعة (set) من أهم المفاهيم التي تُبنى منها بقية المفاهيم الرياضية، وتعتبر مفهوما أوليا لا يمكن تعريفه. وكان العالم الألماني جورج كانتور أول من استخدم نظرية المجموعات في القرن التاسع عشر الميلادي. تدل المجموعة على أي تجمع من الأشياء وسوف يكون تركيزنا في هذا الكتاب على المجموعات المكونة من أعداد.

إذا كانت A مجموعة وكان a عنصرا في هذه المجموعة، فإننا نقول إن a ينتمي إلى A ونكتب

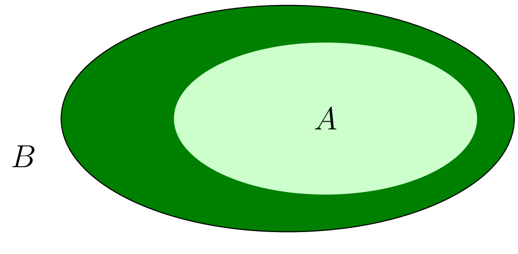
$$a \in A$$

أما إذا لم يكن a عنصرا في A، فإننا نكتب

$$a \notin A$$

إذا كانت A و B مجموعتين بحيث أنه لكل عنصر $x \in A$، فإن $x \in B$، فإننا نقول إن A محتواة في B، أو A مجموعة جزئية من B، ونكتب

$$A \subset B$$



وتكون المجموعتان A و B متساويتين إذا كان لهما نفس العناصر، ويمكن إثبات أن مجموعتين متساويتان إذا أثبتنا أن $A \subset B$ و $B \subset A$.

يمكن تعريف المجموعة عن طريق سرد عناصرها مثل

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

أو عن طريق الصفة المميزة التي تميز عناصرها مثل

$$B = \{x : x^2 = 4\}$$

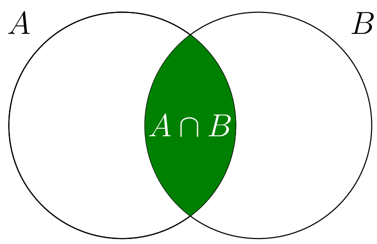
وهذه المجموعة تتكون من عنصرين $\{-2, 2\}$.
هناك عدد من المجموعات المهمة والتي سوف نستخدمها في هذا الكتاب وهي

- مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة (Integers) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد النسبية (Rational Numbers) $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers). وهذه المجموعة سوف نتعرف عليها بشكل مفصل في الباب الثاني.

العمليات على المجموعات

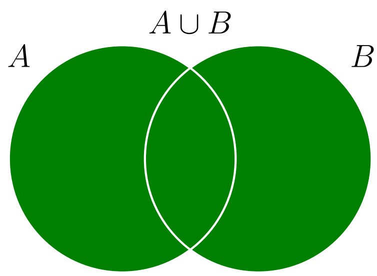
إذا كانت A و B مجموعتين، فإننا نعرف **التقاطع** (intersection) بأنه المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في كلا المجموعتين A و B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$



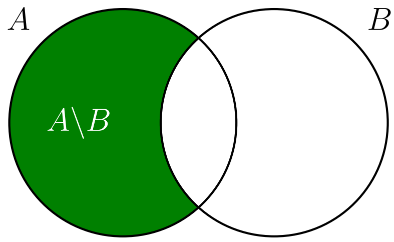
والاتحاد (union) بأنه المجموعة التي تضم جميع العناصر الموجودة في A أو B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$



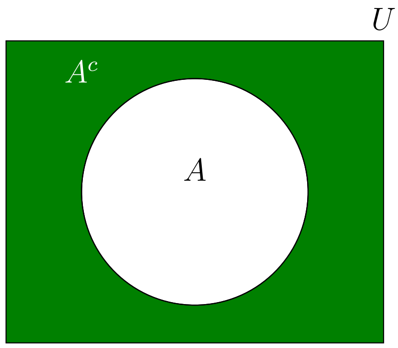
نعرف **متممة** (complement) B في المجموعة A بأنها المجموعة التي عناصرها في A وليست في B، ويرمز لها بالرمز $A \backslash B$

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$



تُسمى المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر بأنها المجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ. كما أننا نفترض وجود مجموعة شاملة U تضم جميع عناصر المجموعات محل البحث. وفي دراستنا ستكون هذه المجموعة هي الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ونعرف **متممة** A بأنها العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وغير موجودة في A، ونرمز لها بالرمز A^c.

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$



هناك علاقة مهمة تربط بين التقاطع والاتحاد والمتممة وتعرف بقانوني ديمورقان

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

1.2 الدوال

ننتقل الآن لمفهوم أساسي مهم وهو الدوال. وتعتبر الدالة كما سيتضح لاحقا حالة خاصة من المجموعات. لكن قبل الحديث عن الدوال، نحتاج لتعريف الضرب الديكارتي، والعلاقات.

الزوج المرتب (order pair)

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين، وكان $a \in A$ و $b \in B$، فإن المجموعة $\{a, b\}$ هي نفسها المجموعة $\{b, a\}$، ولكن لو رغبنا في ترتيب العناصر، فإننا نضعها كزوج مرتب والذي يعرف كما يلي

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

وبالتالي فإنه إذا كان $(a, b) = (c, d)$، فإن

$$\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\} \quad \Rightarrow \quad a = c, \;\; b = d$$

وهذا يعني أن الترتيب مهم في الأزواج المرتبة على عكس المجموعات.

الضرب الديكارتي (cartesian product)

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين، فإن الضرب الديكارتي لهما هو المجموعة

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

العلاقة (relation)

تُعرف العلاقة R بين مجموعتين A و B بأنها مجموعة جزئية من حاصل الضرب $A \times B$. ونقول إن العنصر $a \in A$ يرتبط مع العنصر $b \in B$، إذا كان $(a,b) \in R$.

بعد أن تعرفنا على العلاقات، نأتي الآن لتعريف الدالة والتي تعتبر حالة خاصة من العلاقات.

تعريف 1.1: الدالة function

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين، فإننا نعرف الدالة f من A إلى B بأنها علاقة $f \subset A \times B$ تحقق أنه لكل عنصر $a \in A$ يوجد عنصر وحيد $b \in B$ بحيث $(a,b) \in f$

وهذا يعني أنه لكل عنصر في A يوجد صورة وحيدة في B. إذا كان $(x,y) \in f$، فإننا نكتب $y = f(x)$. يُسمى A مجال الدالة (domain) و B المجال المقابل (co-domin) ونكتب

$$f : A \to B$$

يعرف مدى الدالة f (range) بأنه جميع الصور في B

$$R_f = \{b \in B : (a,b) \in f, a \in A\}$$

تكون الدالة f **غامرة** (surjective) إذا كان $B = R_f$، وتكون **أحادية أو متباينة** (injective) إذا كانت كل عنصر في R_f صورة لعنصر وحيد في A، إي إذا كان $f(a_1) = f(a_2)$، فإن $a_1 = a_2$. وتكون f تقابل (bijective) إذا كانت غامرة ومتباينة.

الدالة العكسية (inverse function)

إذا كانت $f : A \to B$ دالة أحادية، فإن لها دالة عكسية

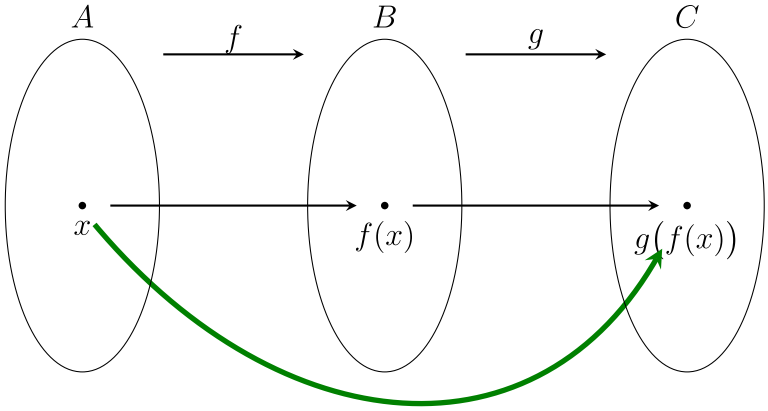
$$f^{-1} : R_f \to A$$

بحيث إذا كان $y = f(x)$، فإن $f^{-1}(y) = x$.

تحصيل الدوال (composition of functions)

إذا كانت $f : A \to B$ و $g : B \to C$، فإن تحصيل الدالتين $g \circ f$ هو دالة من A إلى C والمعرفة لكل $x \in A$ كما يلي

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



1.3 المنطق الرياضي وطرائق البرهان

إن البراهين الرياضية مبنية على تقارير (statements) والتقرير هو جملة تحمل خبرا ويمكن الحكم عليها بأنها صائبة (True) أو خاطئة (False)، فمثلا التقرير $2+3=5$ تقرير صائب بينما $\sqrt{4}=-2$ تقرير خاطئ. أما عبارة "الجو جميل" فهي ليست تقريرا لأنها تعبر عن رأي. كذلك عبارة "هذه الجملة خاطئة" ليست تقريرا لأنها لا يمكن أن تكون صائبة أو خاطئة حيث نحصل على تناقض في كلا الحالتين.

هناك عدة طرق للحصول على تقرير جديد من تقارير سابقة وذلك باستخدام أدوات الربط (connectives) .

إذا كان p و q تقريرين رياضيين، فإنه يمكن الربط بينهما باستخدام أداة الربط "و" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\wedge$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

أداة الربط "**أو**" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\vee$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

أداة الربط "**إذا ... فإن ...**" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\rightarrow$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

أداة الربط "**إذا وإذا فقط**" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\leftrightarrow$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

إذا كان p تقريرا، فإن "**نفي**" (negation) التقرير ويرمز له بالرمز "$\sim p$"، له جدول الصواب

p	$\sim p$
T	F
F	T

الاقتضاء (Implication)

من الطرق المهمة للحصول على تقرير جديد من تقارير أخرى تقرير الاقتضاء، ونقول إن التقرير A يقتضي التقرير B ونرمز لذلك بالرمز $A \Rightarrow B$، إذا كان التقرير $A \to B$ صائبا. وفي هذه الحالة يسمى التقرير A **المعطى** (hypothesis) بينما التقرير B **النتيجة** (conclusion).

نقول إن تقريرين متكافآن (equivalent) إذا كان لهما نفس جدول الصواب، ونرمز لذلك بالرمز ($\equiv$). في المبرهنات دائما ما يكون هنك معطى A ونتيجة B ونسعى لإثبات التقرير $A \Rightarrow B$. ولكن في بعض المبرهنات يمكن أن نثبت ذلك من خلال تقارير مكافئة لهذا التقرير. على سبيل المثال، التقريران الآتيان متكافآن.

$$A \to B \quad \equiv \quad \sim B \to \sim A$$

وهذا يعني أن

$$A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \sim B \Rightarrow \sim A$$

المسورات (Quantfiiers)

تحتوي بعض التقارير الرياضية أحيانا على عبارات مثل "لكل" (for all) أو "يوجد" (there exists)، فعلى سبيل المثال، التقرير

"لكل عدد طبيعي n، فإن $n + 3 > n^2$"

تقرير خاطئ لأن التقرير غير صحيح عند $n = 3$ ، بينما التقرير

"يوجد عدد طبيعي n، بحيث $n + 3 > n^2$"

صائب، لأننا نستطيع اختيار $n = 1$.

هذان المسوران يستخدمان بكثرة في التقارير الرياضية، لذلك نستخدم الرمزين $\forall$ رمز الشمول بدلا من لكل، ورمز الوجود $\exists$ بدلا من يوجد. فيمكن إعادة كتابة التقريرين السابقين كما يلي

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n + 3 > n^2$$
$$\exists\, n \in \mathbb{N} : n + 3 > n^2$$

أحيانا نحتاج لنفي تقارير تحتوي على مسورات، ويكون النفي كالتالي

نفي التقرير $\forall x : A$ هو $\exists x : \sim A$

وبالتالي نفي التقرير

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n + 3 > n^2$$

هو

$$\exists\, n \in \mathbb{N} : n + 3 \leq n^2$$

وبالمثل

نفي التقرير $\exists x : A$ هو $\forall x : \sim A$

بعد هذه المقدمة المهمة في المنطق الرياضي، نستعرض عددا من طرائق البرهان.

1. **البرهان المباشر** (direct proof)
في هذه الطريقة نستفيد من كون علاقة الاقتضاء متعدية، أي إنه إذا كان $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow C$، فإن $A \Rightarrow C$. وهذا يعني أننا نبدأ بالمعطى، ثم ننتقل بخطوات صحيحة حتى نصل إلى النتيجة.

مثال 1.1. أثبت أن مربع أي عدد فردي n هو عدد فردي.
المعطى: A التقرير "n عدد فردي"
المطلوب إثباته (النتيجة): B التقرير "n^2 عدد فردي".
بما أن n عدد فردي، إذا يوجد عدد طبيعي k بحيث

$$n = 2k + 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1, \quad m = 2k^2 + 2k$$

إذا n^2 عدد فردي.

2. **المكافئ العكسي أو المعاكس الإيجابي** (contrapositive) إذا كان التقرير $A \to B$ صائب، فإن التقرير $\backsim B \to \backsim A$ صائب كذلك، وهذا يعني أن الاقتضاء $A \Rightarrow B$ متحقق إذا كان الاقتضاء $\backsim B \Rightarrow \backsim A$ متحققا، والعكس صحيح.
في البرهان بالمكافئ العكسي بدلا من إثبات $A \Rightarrow B$، نثبت أن $\backsim B \Rightarrow \backsim A$ أي إننا نفرض نفي النتيجة ثم نتوصل بخطوات صحيحة إلى نفي المعطى.

مثال 1.2. أثبت أنه إذا كان m و n عددين حقيقيين وكان $n + m > 10$ فإن $n > 5$ أو $m > 5$.
المعطى: A التقرير "$n + m > 10$"
النتيجة: B التقرير " $n > 5$ أو $m > 5$ ".
باستخدام المكافئ العكسي يكفي أن نثبت أن $\backsim B \Rightarrow \backsim A$. أي إثبات أنه إذا كان $n \leq 5$ و $m \leq 5$، فإن $n + m \leq 10$.

$$n \leq 5, m \leq 5 \quad \Rightarrow m + n \leq 5 + 5 = 10$$

3. **البرهان بالتناقض** (contradiction) لإثبات أن التقرير $A \to B$ صائب، يكفي إثبات أن التقرير $\backsim (A \to B)$ خاطئ. ولكن هذا التقرير يكافئ $A \wedge \backsim B$. إذا يكفي إثبات أن التقرير $A \wedge \backsim B$ خاطئ. هذا يعني أننا نفرض صحة المعطى وخطأ النتيجة في نفس الوقت فنتوصل إلى تناقض.

مثال 1.3. أثبت أنه إذا كان a عددا حقيقيا، وكان $a > 0$ فإن $\frac{1}{a} > 0$.
المعطى: A التقرير "$a > 0$"
النتيجة: B التقرير " $\frac{1}{a} > 0$ ".
نفرض أن المعطى $a > 0$ صحيح، وأن النتيجة $\frac{1}{a} > 0$ خاطئة، أي إن $\frac{1}{a} \leq 0$. بالضرب نحصل على $a\frac{1}{a} \leq 0$. ولكن $a\frac{1}{a} = 1$، إذا $1 \leq 0$ وهذا تناقض.

4. **البرهان بإعطاء مثال معاكس** (counter example) حتى نثبت أن تقريرا خاطئا، يكفي إعطاء مثال لا يحقق هذا التقرير.

مثال 1.4. هل التقرير

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$$

صحيح؟
بما أن العدد 0 لا يحقق هذا التقرير، إذا التقرير خاطئ.

5. **الاستقراء الرياضي** (induction) حتى نثبت أن التقرير $P(n)$ صائب لجميع الأعداد الطبيعية، فإنه يكفي أن نثبت أن التقرير صحيح عندما $n = 1$، ثم نثبت أنه بفرض صحة التقرير عندما $n = k$، فإن التقرير صحيح عندما $n = k + 1$ (سوف نتطرق لهذا الموضوع في الباب الثاني).

وفيما يلي مثال عن طرائق البرهان، وسوف نحتاج لهذه النتيجة في الأبواب القادمة.

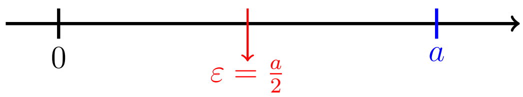
مثال 1.5. إذا كان $a \in \mathbb{R}$،

$$0 \leq a < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

فأثبت أن: $a = 0$. ثم استنتج أن $1 = 0.999\ldots$

البرهان: من المهم في البرهان تحديد المعطى، والنتيجة، وكذلك الطريقة المستخدمة في البرهان.

المعطى: $0 \leq a < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$
النتيجة: $a = 0$
طريقة البرهان: البرهان بالتناقض (أي نفرض صحة المعطى وخطأ النتيجة).
لنفرض أنه لكل $\varepsilon > 0$ فإن $0 \leq a < \varepsilon$ وأن $a \neq 0$. إذا $a > 0$. حتى نحصل على تناقض، يكفي إيجاد قيمة واحدة للعدد ε بحيث يكون $\varepsilon \leq a$. بما أن $0 < \frac{a}{2} < a$ ، فإننا نأخذ $\varepsilon = \frac{a}{2}$ ، فنحصل على تناقض. إذا $a = 0$.



لإثبات أن $1 = 0.999\ldots$، يمكن أن نعرف العدد $a_n = 0.999..9$ حيث يوجد n من التسعات بعد الفاصلة. من الواضح أنه لكل $\varepsilon > 0$، فإننا نستطيع اختيار $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$0 \leq 1 - 0.999\ldots < 1 - a_n < \varepsilon$$

إذا $1 - 0.999\ldots = 0$ □

تمارين الباب الأول

1. إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ ليس كلاهما صفرا، فأثبت أن $x^2 + xy + y^2 > 0$.

2. إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ ليس كلاهما صفرا، فما الشرط على a بحيث $x^2 + axy + y^2 > 0$؟

3. إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$، فأثبت أن

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

4. إذا كان $0 < a < 1$ و $b = 1 - \sqrt{1 - a}$، فأثبت أن $0 < b < a$.

5. إذا كان $a > 2$ و $b = 1 + \sqrt{a - 1}$، فأثبت أن $2 < b < a$.

6. إذا كان $0 < x < y$، فأثبت أن

$$\frac{x + 2}{x + 3} < \frac{y + 2}{y + 3}$$

7. إذا كان $a, b > 0$، فأثبت أن $a > b$، إذا وفقط إذا كان $a^2 > b^2$.

8. يعرف الوسط الحسابي للعددين $a, b > 0$ بأنه $\frac{a+b}{2}$ والوسط الهندسي $\sqrt{ab}$. أثبت أن

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان $a = b$.

9. إذا كان

$$|x - x_0| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}\right\}, \qquad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)}$$

فأثبت أن

$$|xy - x_0 y_0| < \varepsilon$$

الباب الثاني

الأعداد الحقيقية

في هذا الباب نقدم عددا من الخصائص المهمة لمجموعة الأعداد الحقيقية. وسوف نقدم الأعداد الحقيقية عن طريق المسلمات ولن نشير إلى طريقة بناء الأعداد الحقيقية من مجموعة أبسط مثل الأعداد النسبية. بل سنفترض وجود الأعداد الحقيقية ونحدد خصائصها.

في البداية نتطرق لمجموعة الأعداد الطبيعية، الصحيحة، النسبية وغير النسبية ثم الأعداد الحقيقية والبناء الجبري لها. ثم نركز على خاصية متوفرة فقط في الأعداد الحقيقية وهي خاصية التمام، بعد ذلك نتطرق للمفكوك العشري للأعداد الحقيقية، ثم نختم الباب بالحديث عن المجموعات القابلة للعد.

2.1 الحقول المرتبة

إن مجموعة الأعداد الحقيقية يمكن وصفها بأنها "حقل مرتب تام". ومن خلال هذا الفصل سوف نتعرف على ملسلمات الحقول المرتبة، ثم نتعرف في الفصل القادم على مسلمة التمام. ونهدف من ذلك إلى التعرف على الخصائص الأساسية للأعداد الحقيقية.

نبدأ الآن بفرض وجود مجموعة $\mathbb{R}$ تدعى الأعداد الحقيقية وعمليتين الجمع "+" والضرب "$\cdot$" بحيث تحقق الخصائص الآتية

مسلمات 2.1

إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{R}$، فإن

1. $x + y \in \mathbb{R}$
2. $x + y = y + x$
3. $x + (y + z) = (x + y) + z$
4. يوجد عدد حقيقي وحيد 0 بحيث $x + 0 = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
5. لكل $x \in \mathbb{R}$ يوجد عدد حقيقي وحيد $-x$ بحيث $x + (-x) = 0$.
6. $x \cdot y \in \mathbb{R}$
7. $x \cdot y = y \cdot x$

8. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
9. يوجد عدد حقيقي وحيد 1 بحيث $x\cdot 1=x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
10. لكل $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$، يوجد عدد حقيقي وحيد x^{-1} بحيث $x\cdot x^{-1}=1$.
11. $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

تسمى هذه المسلمات مسلمات الحقل (field axioms)، وهذا يعني أن $(\mathbb{R},+,\cdot)$ تمثل حقلا. إن عمليتي الجمع والضرب عبارة عن دوال معرفة من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، وتعرف عمليتي الطرح والقسمة كما يلي

$$x-y=x+(-y)$$
$$\frac{x}{y}=xy^{-1},\quad y\neq 0$$

إضافة لمسلمات الحقل، فإن مجموعة الأعداد الحقيقية تحقق كذلك ملسمات الترتيب (order axioms). هذه المسلمات تحدد خصائص العلاقة "$<$". ونكتب $y\leq x$ اختصار للعبارة "$x<y$ أو $x=y$". العدد الحقيقي x غير سالب إذا كان $x\geq 0$، وموجب إذا كان $x>0$.
العلاقة "$<$" تحقق الخصائص الآتية.

مسلمات 2.2

1. لكل $x,y\in\mathbb{R}$، فإن واحدة من العلاقات محققة $y=x$ أو $y<x$ أو $x>y$.
2. لكل $x,y,z\in\mathbb{R}$ بحيث $y<x$ و $z<y$ فإن $x<z$.
3. لكل $x,y,z\in\mathbb{R}$ بحيث $x<y$، فإن $x+z<y+z$.
4. لكل $x,y,z\in\mathbb{R}$ بحيث $x<y$ و $z>0$ فإن $xz<yz$.

في كثير من البراهين في التحليل الحقيقي نحتاج للمتباينات وغالبا ما تحتوي على قيمة مطلقة. فيما يلي نورد تعريف القيمة المطلقة (absolute value). . إذا كان $x\in\mathbb{R}$ فإن القيمة المطلقة للعدد x تُعرف كما يلي

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

المبرهنة الآتية توضح أبرز خصائص القيمة المطلقة، ونوردها دون برهان.

مبرهنة 2.1: خصائص القيمة المطلقة

إذا كان $x,y\in\mathbb{R}$ و $a\geq 0$، فإن

1. $|x|\geq 0$.
2. $|x|\leq a$ إذا وفقط إذا كان $-a\leq x\leq a$.
3. $|xy|=|x||y|$.

4. متباينة المثلث (triangle inequality)

$$| x + y | \leq | x | + | y |$$

تعتبر متباينة المثلث من أبرز المتباينات وسوف نستخدمها كثيرا في البراهين، كما يمكن ان نستنتج منها متباينة أخرى

$$|| x | - | y || \leq | x - y |$$

مثال 2.1. هل العبارة صحيحة لكل $a, b, c \in \mathbb{R}$؟

$$b < c \quad \Rightarrow \quad | a + b | < | a + c |$$

هذه العبارة غير صحيحة، ولإثبات ذلك يكفي إعطاء مثال معاكس. بأخذ $a = 0, b = -1, c = 0$، نلاحظ أن العبارة غير صحيحة.

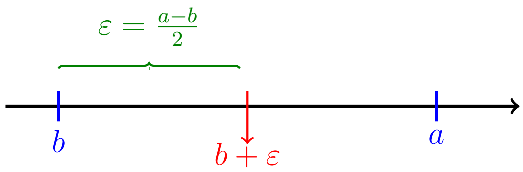
مثال 2.2. إذا كان

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

فأثبت أن $a \leq b$.

البرهان

المعطى: $A: \quad a < b + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$
المطلوب: $B: \quad a \leq b$
طريقة البرهان: عكس المباشر. (أي إثبات أن $\sim B \Rightarrow \sim A$)
نفرض أن $a > b$، ولنأخذ $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. نلاحظ أن $a > b + \varepsilon_0$ أي أننا توصلنا إلى نفي المعطى، وهذا يثبت أن $a \leq b$.



□

تمرين 1 : إذا كان $|x| < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$، فاستنتج أن $x = 0$.

2.2 الأعداد الطبيعية والاستقراء الرياضي

نرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers)، بالرمز $\mathbb{N}$،

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

وتتميز الأعداد الطبيعية بأنها تحقق مسلمة (مانقبله بدون برهان) إن أي مجموعة غير خالية من الأعداد الطبيعية لها عنصر أصغر .

مسلمة 2.1: خاصية الترتيب التام للأعداد الطبيعية Well Ordering Property of $\mathbb{N}$

كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فيها عنصر أصغر.

إذا إردنا إثبات أي مبرهنة أو خاصية للأعداد الطبيعية، فإن أهم أداة نستخدمها هي الاستقراء الرياضي. حيث نستطيع استنتاج صحة عبارة رياضية لجميع الأعداد الطبيعية دون الحاجة لفحص هذه العبارة لجميع الأعداد الطبيعية، والذي يعد مستحيلا.

تعريف 2.1: مبدأ الاستقراء الرّياضي Principle of Mathematical Induction

إذا كان $P(n)$ تقريرا رياضيا ، وكان

1. $P(1)$ تقريرا صائبا.
2. لأي عدد $k \in \mathbb{N}$، إذا كان التقرير $P(k)$ صائبا، فإن التقرير $P(k+1)$ صائبا كذلك.

فإن التّقرير $P(n)$ صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

مثال 2.3. أثبت أنه لكل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$، فإن

$$1+2+\ldots n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ليكن $P(n)$ التقرير الآتي

$$1+2+\ldots n=\frac{n(n+1)}{2}$$

من الواضح أن $P(1)$ أي $1=\frac{(1)(1+1)}{2}$ صائب.
نفرض أن $P(k)$ صائب حيث $k \in \mathbb{N}$، أي

$$1+2+\ldots k=\frac{k(k+1)}{2}$$

ونسعى لإثبات صحة التقرير $P(k+1)$، لذلك نضيف $k+1$ للطرفين فنحصل على

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $P(k+1)$ صائب، ونستنتج من مبدأ الاستقراء الرياضي أن $P(n)$ صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين 2.4. إذا كان $0 \leq a \leq 1$، فأثبت أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a^n \leq a$.
هذا المثال يمكن برهانه باستخدام الاستقراء الرياضي.

الأعداد الصحيحة Integers

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

ملاحظة 1.

- $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة إبدالية .
- المعادلة $2x + 1 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{Z}$.

الأعداد النسبية Rational Numbers

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

ملاحظة 2.
$(\mathbb{Q}, +, *)$ حقل مرتب

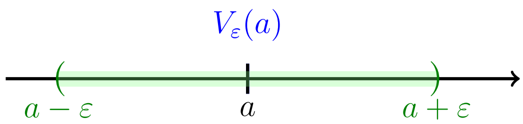
الأعداد الحقيقية Real Numbers

مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R}, +, *)$ تشكل حقل مرتب ، وتحتوي على الأعداد النسبية والتي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z},\ \ b \neq 0$، والأعداد غير النسبية، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}^c$ أو $\mathbb{I}$.

تعريف 2.2: جوار - ε

إذا كان $a \in \mathbb{R},\ \ \varepsilon > 0$ ، فإننا نعرف جوار- ε للعدد a بأنه

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

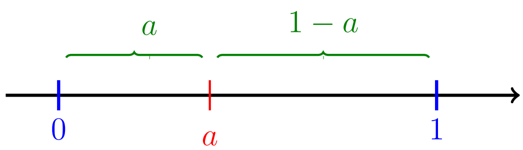


لاحظ أنه إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، وكان

$$x \in V_\varepsilon(a) \quad \forall \varepsilon > 0$$

فإن $x = a$.

تمرين 2 :
إذا كانت $A = (0, 1)$، و $a \in A$ بحيث $V_\varepsilon(a) \subset A$ ، فما أكبر قيمة للعدد ε ؟



2.3 مسلمة التمام

في الفصل السابق وضحنا مسلمات الحقل المرتب للأعداد الحقيقية. ولكن هذه المسلمات لوحدها غير كافية لتعريف الأعداد الحقيقية. حيث إن الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ تمثل حقلا مرتبا كذلك. لكن بالإضافة لخصائص الحقل المرتب، هناك خاصية موجودة فقط في الأعداد الحقيقية وتعرف باسم مسلمة التمام، وسوف نقدم هذه المسلمة بالتفصيل في هذا الباب. لكن قبل شرح هذه المسلمة، نوضح لماذا لا نكتفي بالأعداد النسبية لدراسة التحليل. لو تأملنا الأعداد النسبية، فإننا نلاحظ أنها تحتوي على فراغات (gaps) فعلى سبيل المثال $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي كما توضحه المبرهنة الآتية.

مبرهنة 2.2:

العدد $\sqrt{2}$ ليس عددا نسبيا.

البرهان: نفرض أن $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$، وبالتالي يوجد $a, b \in \mathbb{N}$ والقاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1، أي $(a,b) = 1$ بحيث

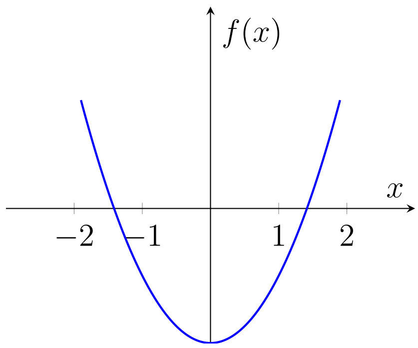
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = 2b^2$$

وهذا يعني أن $2 \mid a^2$، وبالتالي $2 \mid a$، أي إنه يوجد عدد $c \in \mathbb{N}$ بحيث $a = 2c$، ونحصل على

$$a^2 = (2c)^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad 2c^2 = b^2$$

إذا $2 \mid b^2$، وبالتالي $2 \mid b$، وهذا يعني أن 2 قاسم مشترك للعددين a و b، وهذا تناقض. $\square$

لماذا لا نكتفي بالأعداد النسبية لدراسة التحليل؟ لو اعتبرنا الدالة $f(x) = x^2 - 2$، فمن الواضح من هذه الدالة تتقاطع مع محور x في عدد بين 1 و 2. لو افترضنا أن محور x يتكون فقط من أعداد نسبية، فإن مثل هذا العدد غير موجود.



الحدود العلوية والسفلية (upper an lower bounds)

تعريف 2.3: الحد العلوي والحد السفلي

1. نقول إن $u \in \mathbb{R}$ حد علوي (upper bound) للمجموعة A، إذا كان $a \le u$ لكل $a \in A$.
وتكون المجموعة A محدودة من أعلى إذا كان لها حد علوي.

2. نقول إن $l \in \mathbb{R}$ حد سفلي (lower bound) للمجموعة A، إذا كان $l \leq a$ لكل $a \in A$.
وتكون المجموعة A محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي

3. تكون المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي يوجد $l, u \in \mathbb{R}$ بحيث

$$l \leq a \leq u \qquad \forall a \in A$$

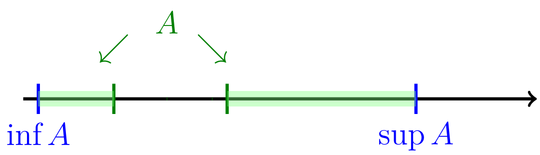
مثال 2.5. أوجد حدان علويان وحدان سفليان للمجموعات الآتية إن وجدت::
1- $[1, 4)$
2- $(2, \infty)$

تعريف 2.4:

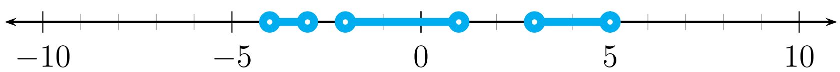
1. إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ ، فإن $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي أصغر (supremum) ويرمز له بالرمز $\beta = \sup A$ إذا تحقق
   (ا) $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي للمجموعة A ، أي
   $$a \leq \beta \qquad \forall a \in A$$
   (ب) إذا كان u حدا علويا للمجموعة A، فإن
   $$\beta \leq u$$
2. إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ ، فإن $\alpha \in \mathbb{R}$ حد سفلي أكبر للمجموعة A (infimum) ويرمز له بالرمز $\alpha = \inf A$ إذا كان حدا سفليا، ولا يوجد حد سفلي أكبر منه.

ملاحظة

- الحد العلوي الأصغر، والحد السفلي الأكبر قد ينتمي للمجموعة وقد لا ينتمي.



تمرين 3 : ما الحدود العلوية والسفلية للمجموعة التالية؟



ملاحظات

1. إذا كان $\sup A \in A$ ، فإن $\max A = \sup A$ ، حيث $\max A$ هو أكبر عنصر في A.
2. إذا كان $\inf A \in A$ ، فإن $\inf A = \min A$ ، حيث $\min A$ هو أصغر عنصر في A.

3. الحد العلوي الأصغر وحيد (ويمكن إثبات ذلك بفرض وجود حدين علويين أصغرين β و γ. وبما أن β حد علوي، فإن $\beta \leq \gamma$, وبما أن γ حد علوي، فإن $\gamma \leq \beta$، وبالتالي $\beta = \gamma$).

4. الحد السفلي الأكبر وحيد

مثال 2.6.
أوجد $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ للمجموعات التالية إن وجدت.

1. $A = \{1, 2, 5\}$
2. $A = [2, 5)$
3. $A = \mathbb{Q}$
4. $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
5. $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

مثال 2.7. لتكن $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. ما أكبر عنصر في A؟

مبرهنة 2.3

إذا كان β حدا علويا للمجموعة A ، فإن $\beta = \sup A$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A : \qquad \beta - \varepsilon < a$$

البرهان: ($\Leftarrow$) ليكن $\beta = \sup A$، ولنفرض أنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث

$$\beta - \varepsilon \geq a \qquad \forall a \in A$$

إذا $\beta - \varepsilon$ حد علوي للمجموعة A. وهذا يناقض أن β أصغر حد علوي.
($\Rightarrow$) الآن لنفرض أن β حدا علويا للمجموعة A، وأنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $a \in A$ بحيث

$$\beta - \varepsilon < a$$

وليكن u حد علوي للمجموعة A. إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $a \in A$ بحيث

$$\beta - \varepsilon < a \leq u$$

$$\beta < u + \varepsilon$$

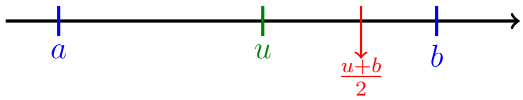
$$\beta \leq u$$

وهذا يعني أن β هو أصغر حد علوي. $\square$

مثال 2.8. إذا كانت A أي من الفترات $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$ فإن

$$\sup A = b, \qquad \inf A = a$$

البرهان: لتكن $A=(a,b)$. سنثبت أن $\sup A = b$
من تعريف الفترة، $a<c<b$ لكل $c\in A$، وبالتالي b حد علوي للمجموعة A.
ليكن u حدا علويا للمجموعة A، ولنفرض أن $a<u<b$.
بما أن $\frac{u+b}{2}\in A$ و $u<\frac{u+b}{2}$، فإن هذا يناقض أن u حد علوي للمجموعة A، إذا $b\leq u$، وبالتالي $b=\sup A$.



□

من الكافي التركيز على دراسة أصغر حد علوي لمجموعة، لأننا نستطيع الحصول على أكبر حد سفلي عن طريق المبرهنة التالية.

مبرهنة 2.4:

إذا كانت $-A=\{-a : a\in A\}$ ، فإن المجموعة A محدودة من أسفل إذا وفقط إذا كانت $-A$ محدودة من أعلى، وكذلك

$$\inf A = -\sup(-A)$$

البرهان: إذا كانت A محدودة من أسفل، فإنه يوجد عدد $l\in\mathbb{R}$ بحيث

$$l\leq a \qquad \forall a\in A$$

إذا

$$-l\geq -a \qquad \forall a\in A$$

$$-l\geq -a \qquad \forall -a\in -A$$

إذا $-l$ حد علوي للمجموعة $-A$. وبالمثل يمكن إثبات الإتجاه الآخر.
ليكن $\alpha=\inf A$, فإن هدفنا إثبات أن $-\alpha=\sup -A$.
بما أن $\alpha=\inf A$، إذا

$$\alpha\leq a \qquad \forall a\in A$$

$$-\alpha\geq -a \qquad \forall -a\in -A$$

إذا $-\alpha$ حد علوي للمجموعة $-A$.
إذا كان u حدا علويا للمجموعة $-A$، فإن $-u$ حد سفلي للمجموعة A، وبالتالي

$$-u\leq \alpha \qquad \Rightarrow u\geq -\alpha$$

إذا $-\alpha$ هو أصغر حد علوي للمجموعة $-A$. وبالتالي

$$-\alpha=\sup(-A) \qquad \Rightarrow \inf A = -\sup(-A)$$

□

الخاصية الآتية توضح الفرق بين الأعداد الحقيقية والأعداد النسبية.

تعريف 2.5: مسلمة التمام Completeness axiom

1. إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أعلى، فإن لها حدا علويا أصغر في $\mathbb{R}$.
2. إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أسفل، فإن لها حدا سفليا أكبر في $\mathbb{R}$.

نستطيع من هذه المسلمة استنتاج العديد من النتائج المفيدة وفيما يلي بعض هذه النتائج.

مبرهنة 2.5:

المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى.

البرهان: المجموعة $\mathbb{N}$ ليست خالية لأن $1 \in \mathbb{N}$. إذا فرضنا أنها محدودة من أعلى، فإن لها حدا علويا أصغر ولنفرض أنه β. إذا

$$\begin{aligned} n \leq \beta \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow n+1 \leq \beta \\ \Rightarrow n \leq \beta - 1 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $\beta - 1$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا تناقض لأن β أصغر حد علوي. إذا $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى. $\square$

ويمكن أن نستنتج من هذه المبرهنة النتيجتين التاليتين:

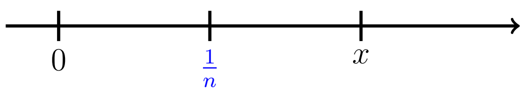
نتيجة 2.1: خاصية أرخميدس

لكل $x > 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n} < x$.

البرهان: لنفرض أنه لا يوجد عدد $n \in \mathbb{N}$ يحقق ذلك، فهذا يعني أن

$$\frac{1}{n} \geq x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{1}{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وهذا يعني أن $\frac{1}{x}$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا تناقض مع المبرهنة السابقة. $\square$



نتيجة 2.2

لكل $x \geq 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n - 1 \leq x < n$.

البرهان: لنعتبر المجموعة $A = \{m \in \mathbb{N} : x < m\}$. بما أن $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى، إذا $A \neq \phi$. ومن خاصية الترتيب التام للمجموعة $\mathbb{N}$، فإن A لها عنصر أصغر وليكن n. إذا $x < n$. كما أن $n - 1 \leq x$ (لأنه لو كان $x < n - 1$، فإن n ليس عنصرا أصغرا للمجموعة A)، إذا $n - 1 \leq x < n$. $\square$

مثال 2.9. ما هي قيم $x \in \mathbb{R}$ التي تحقق $x \leq \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$؟

بما أن $\frac{1}{n} > 0$، إذا أي عدد في الفترة $(-\infty, 0]$ يحقق هذه المتباينة. والسؤال الآن هل يوجد عدد موجب يحقق المتباينة؟ الأجابة: لا، لأنه من خاصية أرخميدس، فإنه لأي عدد موجب x ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{n}$.

تمرين 4 : حدد جميع قيم x التي تحقق

1. $x \in [0, \infty), \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $x \in \mathbb{R}^+, \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نأتي الآن لبعض خصائص الأعداد النسبية وغير النسبية. كل من الأعداد النسبية وغير النسبية منتشرة على خط الأعداد الحقيقية ولا يمكن أن نجد فترة مفتوحة تضم أعدادا نسبية فقط أو أعدادا غير نسبية فقط. وقبل إن نثبت هذه الخاصية، نورد التمرين الآتي والذي يبين أنه بين كل عددين نسبيين يوجد عدد نسبي.

تمرين 5 : إذا كانت $p, q \in \mathbb{Q}$ و $p < q$، فأثبت أنه يوجد عدد نسبي في الفترة (p, q).

مبرهنة 2.6: كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة (x, y) في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا نسبيا $q \in \mathbb{Q}$.

البرهان: إذا كان $y - x > 1$، فإنه يوجد عدد صحيح في الفترة (x, y). أما إذا كان $0 < y - x \leq 1$، فإنه من نتيجة أرخميدس، يوجد عدد $n \in \mathbb{N}$، بحيث

$$y - x > \frac{1}{n}$$

$$ny - nx > 1$$

إذا يوجد عدد صحيح m في الفترة (nx, ny), لأن طولها أكبر من 1.

$$nx < m < ny$$

$$x < \frac{m}{n} < y$$

□

وهذا يعني أن كل فترة مفتوحة تضم عددا لا نهائيا من الأعداد النسبية.

تمرين 6 : باستخدام طريقة البرهان السابقة، أوجد $q \in \mathbb{Q}$ بحيث

$$\sqrt{2} < q < \sqrt{3}$$

مبرهنة 2.7: نظرية: كثافة $\mathbb{Q}^c$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة (x, y) في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا غير نسبي $r \in \mathbb{Q}^c$.

البرهان: من المبرهنة السابقة، يوجد عدد نسبي $q \neq 0$ في الفترة $(x\sqrt{2}, y\sqrt{2})$ بحيث

$$x\sqrt{2} < q < y\sqrt{2}$$

$$x < \frac{q}{\sqrt{2}} < y$$

نختار العدد $r = \frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}^c$. (كيف يمكن إثبات أن هذا العدد غير نسبي؟) □

المفكوك العشري

إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ ، فإنه يوجد عدد $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، وأعداد $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ، بحيث

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} < \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ونكتب

$$x = x_0.x_1x_2\ldots$$

ويسمى الطرف الأيمن المفكوك العشري للعدد x.

ملاحظات:

1. إذا كان لعددين نفس المفكوك العشري، فإنهما متساويان.
2. لكل عدد $x > 0$ مفكوك عشري وحيد.
3. لو غيرنا الشرط السابق إلى

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} \leq \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

فقد يكون لبعض الأعداد مفكوكين.

$$\frac{1}{2} = 0.500000\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0.499999\ldots$$

مثال 2.10. أوجد قيمة p, q بحيث $2.2343434... = 2.2\overline{34} = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$

2.4 المجموعات القابلة للعد

في أواخر القرن التاسع عشر نشأت نظرية المجموعات على يد عالم الرياضيات الألماني جوج كانتور

تعريف 2.6: تكافؤ المجموعات

نقول إن المجموعتين A و B متكافئتان، ونرمز لذلك بالرمز

$$A \sim B$$

إذا وجد تقابل $f : A \to B$.

تعريف 2.7:

نقول إن المجموعة A منتهية، إذا كانت خالية أو وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

تكون المجموعتان المنتهيتان متكافئتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس عدد العناصر.

مثال 2.11.
إذا كانت $\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$ و $\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$، فإن

1. $\mathbb{N}_1 \sim \mathbb{N}_2$
2. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$، على الرغم من أن $\mathbb{N}_2 \subsetneqq \mathbb{N}$.
3. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

تعريف 2.8: المجموعة القابلة للعد

نقول إن المجموعة A قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

فيما يلي عدد من المبرهنات المهمة عن المجموعات القابلة للعد.

مبرهنة 2.8:

كل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.9:

كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي قابلة للعد.

مبرهنة 2.10:

إذا كانت A, B قابلة للعد، فإن $A \times B$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.11:

إذا كانت A_n قابلة للعد لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.12:

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.13:

المجموعة $[0,1)$ غير قابلة للعد.

مبرهنة 2.14:

المجموعة $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد.

تمرين 7 :

1- هل المجموعة $\{x \in \mathbb{Q}^c : x \in [0,1]\}$ قابلة للعد

2- أثبت أن

أ) $(2,6) \sim (7,12)$

ب) $(0,\infty) \sim (0,1)$

تمارين الباب الثاني

1. أثبت أن $\sqrt{3}, \sqrt{6}$ عددين غير نسبيين.

2. إذا كان $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$، فأثبت أن $x + y \notin \mathbb{Q}$. ماذا عن xy؟

3. إذا كانت $a, b, c, d > 0$، وكان $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$، فأثبت أن $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

4. إذا كان $a > 0, x < y$, فأثبت أنه يوجد عدد نسبي q بحيث

$$x < qa < y$$

5. إذا كانت $A \neq \phi$، فأثبت أن u حد علوي للمجموعة A إذا وفقط إذا كان لكل $t > u$، فإن $t \notin A$.

6. أوجد $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ للمجموعات الآتية إن وجدت

(ا) $\star$ $A = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(ب) $A = \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(ج) $\star$ $A = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(د) $A = \left\{\sin\frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(هـ) $\star$ $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$

(و) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 2 > 0\}$

(ز) $A = \{x^2 \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$

7. إذا كانت A تحتوي أحد حدودها العلوية، فأثبت أن هذا الحد العلوي هو $\sup A$.

8. لتكن
$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$$
إذا كان $p \in A$، فأثبت وجود $q \in A$، و $q > p$.

9. إذا كان α حدا سفليا للمجموعة A ، فأثبت أن $\alpha = \inf A$ إذا وفقط إذا كان
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A: \qquad a < \alpha + \varepsilon$$

10. $\star$ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، وكان $A \subset B$، فأثبت أن
$$\sup A \leq \sup B$$

11. إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجوعتين محدودتين من أعلى، فأثبت أن $A \cup B$ محدودة من أعلى، وأن
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

12. $\star$ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، فأثبت أن $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ محدودة، ثم أثبت أن
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

13. إذا كانت
$$A = \left\{\frac{-n}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \left\{x^2 \in \mathbb{R} : -2 < x < 1\right\}$$
فأوجد $\sup(A + B)$.

14. إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ محدودة من أعلى و $k > 0$، وعرفنا $kA = \{ka : a \in A\}$، فأثبت أن
$$\sup(kA) = k \sup A$$

15. إذا كانت A, B مجوعتين غير خاليتين وكان
$$x \leq y \quad \forall x \in A, y \in B$$
فأثبت أن $\sup A \leq \inf B$.

16. اكتب العدد $0.12\overline{124}$، على الصورة $\frac{m}{n}$، حيث $(m, n) = 1$.

17. استخدم المفكوك العشري لإثبات كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

18. أثبت أن $(0, 2) \sim (2, 9)$.

19. $\star$ أثبت أن $\mathbb{R} \sim (0, 1)$.

20. أثبت أن $[0, 1] \sim [0, 1) \sim (0, 1)$.

21. أثبت أن $[0, 1] \times [0, 1] \sim [0, 1]$.

الباب الثالث

المتتاليات

في هذا الباب نتطرق لأحد الموضوعات المهمة في التحليل الحقيقي وهو المتتاليات. يعود مفهوم تقارب المتتاليات لبدايات القرن التاسع عشر الميلادي على يد كل من بولزانو (1817م) وكوشي (1821م). في هذا الباب، نستعرض عددا من النتائج والنظريات، والتي قد يبدو بعضها مألوفا لدى القارئ من دراسته للتفاضل والتكامل، ولكن ما نقدمه يتميز بالصرامة الرياضية، ويركز على البرهان أكثر من الحسابات.

في البداية نقدم مفهوم تقارب المتتاليات، حيث نتعرض للمرة الأولى لمفهوم النهايات، ثم نتطرق لخصائص المتتاليات المتقاربة. بعد ذلك، نتعرف على المتتاليات المطردة ونثبت أن كل متتالية مطردة ومحدودة فهي متقاربة. ثم نلقي الضوء على معيار كوشي والذي يعد معيارا لتقارب المتتاليات. ثم نختم هذا الفصل بالمتتاليات الجزئية، ومبرهنة بولزانو فايرشتراس والتي تنص على أن كل متتالية محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.

3.1 المتتاليات المتقاربة

تعتبر المتتالية نوعا خاصا من الدوال، حيث مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية.

تعريف 3.1: المتتالية sequences

المتتالية الحقيقية (sequence of real numbers) هي دالة f مجالها الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومداها الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، أي

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

ونرمز للعدد $f(n)$ بالرمز x_n .

تحدد المتتالية لكل عدد طبيعي $1, 2, \ldots$ قيمة وحيدة في الأعداد الحقيقية، ونكتب المتتالية بالصورة $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ أو $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ أو اختصارا (x_n)، ويسمى x_n الحد النوني. استخدام الأقواس يعني أننا نهتم بالترتيب، ولذا نفرق بين المتتالية (x_n) ذات العناصر المرتبة وغير المنتهية، والمجموعة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ والتي تمثل مدى المتتالية وهي مجموعة غير مرتبة وقد تكون منتهية، فمثلا المتتالية $(1, 2, 3, 4, \ldots)$، تختلف عن المتتالية $(2, 1, 3, 4, \ldots)$، بينما المجموعة $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ هي نفس المجموعة $\{2, 1, 3, 4, \ldots\}$. وفيما يلي نقدم بعض الأمثلة للمتتاليات.

مثال 3.1. 1. $(2) = (2, 2, 2, \ldots)$ هي متتالية ثابتة.

2. $(2n) = (2, 4, 6, \ldots)$ هي متتالية الأعداد الزوجية.

3. $((-1)^n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ هي متتالية مداها المجموعة $\{-1, 1\}$.

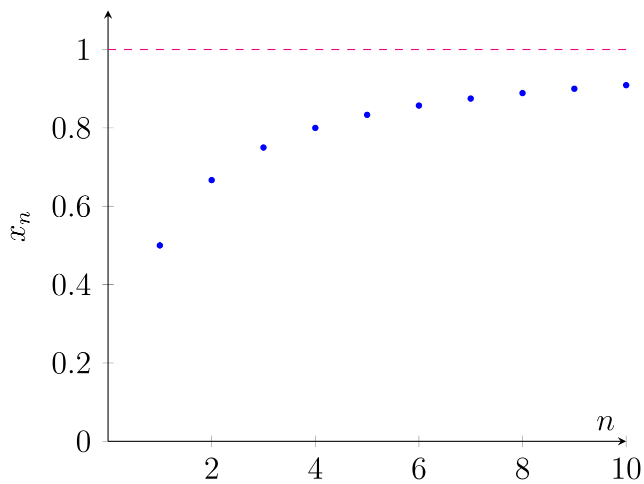
4. $(\frac{1}{n^2}) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots)$

5. يمكن تعريف المتتالية بدلالة الحدود السابقة، وتسمى متتالية ارتدادية (recursive sequence)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

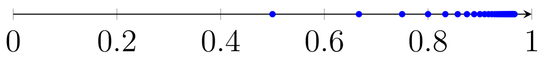
مثال 3.2. المتتالية $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ يمكن تمثيلها بيانيا كدالة كما في الشكل 3.1.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \ldots & \frac{n}{n+1} & \ldots \end{array}$$



شكل 3.1: $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

كما يمكن اختصار تمثيل المتتالية واقتصاره على المدى



هذا الاختصار ممكن إذا كانت عناصر المتتالية مختلفة، أما لو كانت العناصر تتكرر، فلن يكون التمثيل دقيقا.
في هذه المتتالية نلاحظ أنه كلما زادت قيمة n، كلما اقتربت المتتالية من العدد 1. وهذا يمكننا من القول إن المتتالية "متقاربة" للعدد 1. وسوف نوضح معنى تقارب المتتالية في التعريف القادم.

في المتتاليات، يكون التركيز على الحدود المتأخرة، فمثلا نجد أن الحدود المتأخرة للمتالية $(\frac{1}{n})$ قريبة من 0، بينما المتتالية (n) حدودها المتأخرة تتزايد وليست قريبة من أي عدد. وعند الحديث عن الحدود المتأخرة، فإننا نشير إلى النهاية والتي تعتبر بنية أساسية في التحليل. وفيما يلي نقدم التعريف الدقيق لتقارب المتتاليات.

تعريف 3.2: المتتالية المتقاربة

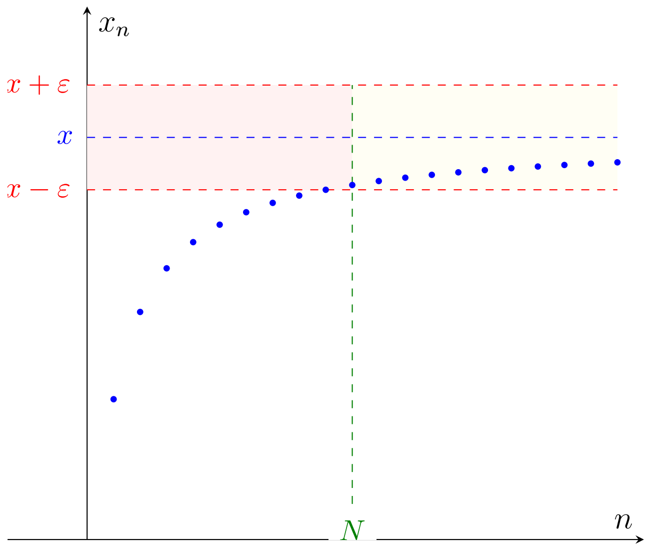
نقول إن المتتالية (x_n) متقاربة (convergent) إذا وجد عدد حقيقي x بحيث لكل $\varepsilon > 0$، يوجد عدد طبيعي N يحقق أنه لكل $n \geq N$، فإن

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

يُسمى x نهاية المتتالية (limit)، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ أو اختصارا $\lim x_n = x$ ، أو $x_n \to x$.

إذا لم تكن المتتالية متقاربة إلى أي عدد حقيقي، فإنها متباعدة (divergent) .

في الشكل 3.2، نلاحظ أنه لأي قيمة معطاة للعدد ε، فإنه يوجد عدد N بحيث إذا كانت $n \geq N$، فإن x_n موجودة داخل الشريط الأصفر، وهذا يعني أن المتتالية متقاربة للعدد x.



شكل 3.2: المتتالية المتقاربة

فيما يلي نعطي عددا من الأمثلة لتوضيح طريقة إثبات أن نهاية المتتالية موجودة.

مثال 3.3. حتى نوضح أن

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، وهدفنا إيجاد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

من نتيجة أرخميدس، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (أي $N > \frac{1}{\varepsilon}$). الآن، إذا كانت $n \geq N$، فإن $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$، ويمكن كتابة البرهان بشكل نهائي كما يلي:

إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نختار $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$ وبالتالي

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

مثال 3.4. حتى نثبت أن النهاية الآتية صحيحة

$$\lim 3 + \frac{1}{2^n} = 3$$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، وهدفنا إيجاد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\left|3 + \frac{1}{2^n} - 3\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

نستطيع هنا الحل مباشرة لإيجاد قيمة n، لكن من الأفضل ملاحظة أن

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

والتي يمكن إثباتها باستخدام الاستقراء الرياضي. من نتيجة أرخميدس، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (أي $N > \frac{1}{\varepsilon}$)، فنحصل على

$$\left|3 + \frac{1}{2^n} - 3\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

تمرين 8 : أثبت باستخدام التعريف أن

1. $\lim \dfrac{n-1}{n} = 1$

2. $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (إرشاد: نختار $\frac{1}{N} < \varepsilon^2$).

ملاحظات

1. إذا وجدنا عددا $N \in \mathbb{N}$ يحقق العلاقة

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

فإن أي عدد أكبر من N يحقق هذه العلاقة.

2. عندما نُغير قيمة ε، فقد نحتاج لتغيير قيمة N، وفي الغالب، كلما كانت قيمة ε أصغر، كلما احتجنا لاختيار قيمة أكبر للعدد N.

مثال 3.5. بما أن $\lim \frac{1}{n} = 0$، فإننا نستطيع إيجاد قيمة N لأي عدد $\varepsilon > 0$ بحيث تحقق العلاقة

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

لو اخترنا $\varepsilon = 0.1$، فيمكن أن نختار $N = 11$، لأن

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{11} < \frac{1}{10} = 0.1 \qquad \forall\, n \geq 11$$

بينما لو اخترنا $\varepsilon = 0.01$، فإننا نحتاج لاختيار قيمة أكبر للعدد N، مثلا $N = 101$.

ملاحظات

1. إذا كانت المتتالية (x_n) تحقق أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ وثابت $C > 0$ لا يعتمد على n أو ε، بحيث

$$|x_n - x| < C\varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

فإن $x_n \to x$.

(يمكن برهان ذلك كما يلي: إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نختار $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{C} > 0$، وبالتالي يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < C\varepsilon_1 = \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N)$$

2. حتى نبين إن المتتالية (x_n) غير متقاربة إلى x، يكفي أن نوجد ε_0، بحيث لكل $N \in \mathbb{N}$ يوجد $n_N \geq N$ تحقق

$$|x_{n_N} - x| \geq \varepsilon_0$$

مثال 3.6.
باستخدام التعريف يمكن إثبات أن :

$$\lim \frac{3n}{5n+9} = \frac{3}{5}$$

ليكن $\varepsilon > 0$، ولنوجد حدا علويا للفرق بين المتتالية ونهايتها.

$$\left|\frac{3n}{5n+9} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{15n - 3(5n+9)}{5(5n+9)}\right| = \frac{27}{25n+45} < \frac{27}{25n} = \frac{\frac{27}{25}}{n} < \frac{2}{n}$$

من نتيجة أرخميدس، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$. إذا نختار $N > \frac{1}{\varepsilon}$، فنحصل على

$$\left|\frac{3n}{5n+9} - \frac{3}{5}\right| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < 2\varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

مثال 3.7.
حتى نثبت أن

$$\lim \frac{n^2+2n}{n^3-4} = 0$$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، ونهدف لإيجاد قيمة $N \in \mathbb{N}$، بحيث لكل $n \geq N$، فإن

$$\left|\frac{n^2+2n}{n^3-4}\right| < \varepsilon$$

يمكن إيجاد حد علوي للبسط بدلالة n^2، وحد سفلي للمقام بدلالة n^3.

$$|n^2+2n| \leq n^2 + n^2 = 2n^2 \qquad \forall\, n \geq 2$$

$$|n^3-4| \geq n^3 - \frac{n^3}{2} \geq \frac{n^3}{2} \qquad \forall\, n \geq 3$$

إذا

$$\left|\frac{n^2+2n}{n^3-4}\right| \leq \frac{2n^2}{n^3/2} = \frac{4}{n}$$

من نتيجة أرخميدس، يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N_1} < \varepsilon$. إذا نختار $N = \max\{3, N_1\}$.

تمرين 9 : أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{3n^2-2n}{2n^2-1} = \frac{3}{2}$

لإثبات أن المتتالية غير متقاربة، يكفي اختيار قيمة واحدة للعدد ε، كما في المثال التالي.

مثال 3.8. المتتالية $(x_n) = ((-1)^n)$ غير متقاربة. حتى نرى ذلك، لنفرض أن (x_n) متقاربة إلى عدد x، ولنأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$. إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \frac{1}{2} \qquad \forall\ n \geq N$$

بما أن

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right| = 2$$

وبالتالي فإنه لكل $n \geq N$، فإن

$$2 = |x_{n+1} - x_n| = |x_{n+1} - x + x - x_n| \leq |x_{n+1} - x| + |x - x_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

وهذا تناقض. إذا (x_n) غير متقاربة.

مثال 3.9. المتتالية $(x_n) = (n)$ غير متقاربة. حتى نرى ذلك، لنفرض أن x_n متقاربة إلى x، ولنأخذ $\varepsilon = 1$. إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| = |n - x| < 1 \qquad \forall\ n \geq N$$

وهذا يعني أنه لكل $n \geq N$، فإن

$$n < x + 1$$

وهذا يعني أن $x + 1$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا تناقض. إذا (x_n) غير متقاربة.

ملاحظات

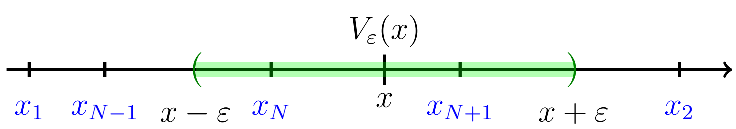
1. يعتمد تقارب المتتالية على الحدود المتأخرة والتي تسمى ذيل المتتالية. الذيل m للمتالية (x_n) ينتج من حذف أول m حدا، أي $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$. فمثلا الذيل الثالث للمتالية $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ هو $(7, 9, \ldots)$.

2. من تعريف المتتالية المتقاربة نجد أن $x_n \to x$ إذا وفقط إذا كان $|x_n - x| \to 0$.

3. من الممكن استخدام الجوارات في تعريف تقارب المتتاليات. نلاحظ أنه إذا كانت $x_n \to x$، وكان $\varepsilon > 0$، فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$

$$|x_n - x| < \varepsilon \ \Rightarrow\ x - \epsilon < x_n < x + \varepsilon \ \Rightarrow\ x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

هذا يعني أن المتتالية متقاربة إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد بحيث $n \geq N$، فإن $x_n \in V_\varepsilon(x)$ لكل $N \in \mathbb{N}$. أي إن جميع حدود المتتالية ما عدا ربما $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ تقع في $V_\varepsilon(x)$.



يمكن تعميم الملاحظة (3) لأي جوار.

تعريف 3.3: الجوار

إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن $V \subset \mathbb{R}$ جوار (neighborhood) للنقطة x إذا وجد $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ بحيث $V_\varepsilon(x) \subset V$

لتكن $x_n \to x$، وليكن V جوارا للنقطة x. إذا يوجد $\varepsilon > 0$، بحيث $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$. وبالتالي يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n \in V_\varepsilon(x)$ لكل $n \geq N$، إذا $x_n \in V$. نستطيع تعريف التقارب باستخدام لغة الجوار كما يلي:
المتتالية (x_n) متقاربة ونهايتها x، إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي كل حدود المتتالية ما عدا عدد منته منها.

نختم هذا الفصل بخاصيتين مهمتين للمتتاليات المتقاربة.

مبرهنة 3.1

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فإن نهايتها وحيدة

البرهان: لنفرض أن $x_n \to x$ و $x_n \to y$، إذا لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N_1$$

$$|x_n - y| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N_2$$

وهذا يعني أنه إذا كان $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$، فإن

$$|x - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < 2\varepsilon$$

وبما أن العبارة صحيحة لكل $\varepsilon > 0$، إذا $|x - y| = 0$، أي إن $x = y$. $\square$

تعريف 3.4: المتتالية المحدودة

المتتالية (x_n) محدودة (bounded) إذا وجد $K > 0$ بحيث

$$|x_n| \leq K \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

أي إن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة .

الآن نعطي شرطا ضروريا ولكنه ليس كافيا حتى تكون المتتالية متقاربة، وهو أن تكون المتتالية محدودة.

مبرهنة 3.2

المتتالية المتقاربة محدودة.

البرهان: لنفرض أن $x_n \to x$، وبما أن هدفنا إيجاد حد علوي للأعداد $|x_n|$، فإننا نختار قيمة محددة للعدد ε، ولتكن $\varepsilon = 1$. إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < 1 \qquad \forall\ n \geq N$$

ولكن

$$|x_n| - |x| \leq |x_n - x| < 1 \ \Rightarrow\ |x_n| < |x| + 1 \qquad \forall\ n \geq N$$

نختار

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x| + 1\}$$

ونجد أن

$$|x_n| \leq K \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$\square$

عكس المبرهنة السابقة غير صحيح، حيث إن المتتالية $((-1)^n)$ محدودة وغير متقاربة.

تمارين 3.1

1. هل العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة مع التبرير؟

(ا) إذا كانت $x_n \to 0$، فإنه لكل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.
(ب) إذا كان لكل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n < \varepsilon$ لكل $n \geq N$، فإن $x_n \to 0$.

2. أوجد عددين $k > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث $5n^3 + 12n \leq kn^3$ لكل $n \geq N$.

3. أثبت ما يلي باستخدام التعريف:

(ا) ⋆ $\lim \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3}$
(ب) $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$
(ج) $\lim \frac{2n^2+1}{4n^2+3n} = \frac{1}{2}$
(د) $\lim \frac{n^2}{2n^3+3n^2} = 0$
(هـ) $\lim \frac{2}{n} + \frac{2n}{n+2} = 2$
(و) ⋆ $\lim \frac{n^3+1}{2n^3+n} = \frac{1}{2}$.

4. أثبت أن المتتالية الثابتة متقاربة.

5. ⋆ إذا كانت $\lim x_n = L$ و $\lim y_n = L$، فأثبت أن المتتالية $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ متقاربة ونهايتها L.

6. أثبت أن المتتالية $\cos \frac{n\pi}{3}$ ليست متقاربة.

7. أثبت أن الفترة (a, b) جوار لكل عنصر من عناصرها.

3.2 العمليات على المتتاليات

في الفصل 3.1، لاحظنا أن استخدام التعريف لإثبات وجود النهاية يقود أحيانا لحسابات مقعدة. في هذا الفصل نعطي عددا من النتائج المفيدة والتي تساعدنا في إيجاد النهاية بشكل مبسط. ونبدأ هذا الفصل بالمبرهنة الآتية والتي سوف نحتاجها عند الحديث عن العمليات على النهايات.

مبرهنة 3.3

إذا كانت $x_n \to x \neq 0$ ، فإنه يوجد $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n| > M \quad \forall\ n \geq N$$

البرهان: لنفرض أن $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$، فيمكن أن نجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \frac{|x|}{2} \qquad \forall\ n \geq N$$

وباستخدام متباينة المثلث نجد أنه لكل $n \geq N$، فإن

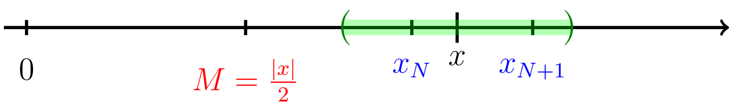
$$\begin{aligned} ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| &< \frac{|x|}{2} \\ -\frac{|x|}{2} < |x_n| - |x| &< \frac{|x|}{2} \\ \frac{|x|}{2} < |x_n| &< \frac{3|x|}{2} \end{aligned}$$

نختار

$$M = \frac{|x|}{2}$$

ونجد أن

$$|x_n| > M \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$



□

إذا كان لدينا متتاليتان، فإننا نستطيع جمع المتتاليتين عن طريق جمع كل حد من المتتالية الأولى مع الحد الذي يقابله في المتتالية الثانية، وكذلك بقية العمليات الأربع. المبرهنة الآتية تعطي العلاقة بين نهاية كل متتالية، والنهاية الناتجة عن جمع المتتاليتين أو ضربهما أو قسمتهما.

مبرهنة 3.4

إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتان متقاربتين، وكان $\lim x_n = x$ و $\lim y_n = y$، فإن

1. $\lim(x_n + y_n) = x + y$
2. $\lim(x_n y_n) = xy$
3. إذا كان $k \in \mathbb{R}$، فإن $\lim(kx_n) = kx$
4. إذا كانت $y_n \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، و $y \neq 0$، فإن $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$.

البرهان:

1. لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

إذا اخترنا $N = \max\{N_1, N_2\}$، وكانت $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $x_n + y_n \to x + y$.

2. لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

الآن نحسب

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \end{aligned}$$

وبما أن x_n محدودة، إذا يوجد $K > 0$ بحيث $|x_n| \leq K$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا اخترنا $N = \max\{N_1, N_2\}$، وكانت $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq K\varepsilon + |y|\varepsilon \\ &= (K + |y|)\varepsilon = C\varepsilon \end{aligned}$$

حيث $C = K + |y|$، وهذا يعني أن $x_n y_n \to xy$.

3. يمكن اختيار $y_n = k$ في الفقرة الثانية.

4. لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

الآن نحسب

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \frac{|x_n y - x y_n|}{|y_n||y|} \\ &= \frac{|x_n y - xy + xy - x y_n|}{|y_n||y|} \\ &\leq \frac{|y||x_n - x| + |x||y - y_n|}{|y_n||y|} \end{aligned}$$

وبما أن $y_n \to y \neq 0$ ، إذا يوجد $M > 0$ و $N_3 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|y_n| \geq M \qquad \forall\, n \geq N_3$$

الآن إذا اخترنا $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$، وكانت $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &\leq \frac{|y|\varepsilon + |x|\varepsilon}{M|y|} \\ &\leq \frac{|y| + |x|}{M|y|}\,\varepsilon = C\varepsilon \end{aligned}$$

حيث $C = \dfrac{|y| + |x|}{M|y|}$، وهذا يعني أن $\dfrac{x_n}{y_n} \longrightarrow \dfrac{x}{y}$.

□

مثال 3.10. 1.

$$\lim \frac{2n+1}{n} = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

.2

$$\lim \frac{5n+1}{2n^2+4} = \lim \frac{\frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{4}{n^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

حيث قمنا بقسمة جميع الحدود على n^2.

مبرهنة 3.5

إذا كانت المتتاليتان (x_n) و (y_n) متقاربتان، بحيث $x_n \to x$ و $y_n \to y$ ، وكان

$$x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$x \leq y$$

البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \implies \underbrace{x - \varepsilon < x_n} < x + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_1$$

$$|y_n - y| < \varepsilon \implies y - \varepsilon < \underbrace{y_n < y + \varepsilon} \qquad \forall\, n \geq N_2$$

الآن إذا كانت $N = \max\{N_1, N_2\}$، فإن:

$$x - \varepsilon < x_n \leq y_n < y + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

$$x < y + 2\varepsilon$$

وبما أن المتباينة صحيحة لكل $\varepsilon > 0$ إذا $x \leq y$. □

ملاحظة

لو كانت $x_n < y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فلا نستطيع أن نستنتج أن $x < y$، مثلا $x_n = \frac{-1}{n}$ و $y_n = \frac{1}{n}$ ولكن $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

مبرهنة 3.6: الحصر

إذا كانت

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n \geq N_0$$

وكان $\lim x_n = \lim z_n = L$ ، فإن (y_n) متقاربة ونهايتها L .

البرهان: لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |z_n - L| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

الآن إذا كانت $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$، وكانت $n \geq N$، فإن:

$$\underbrace{L - \varepsilon < x_n} < L + \varepsilon, \qquad L - \varepsilon < \underbrace{z_n < L + \varepsilon}$$

ونحصل على

$$L - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \varepsilon$$
$$L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon$$
$$|y_n - L| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\lim y_n = L$ □

وفيما يلي عدد من الأمثلة التي توضح أهمية مبرهنة الحصر في إيجاد النهاية أو إثبات وجود النهاية بدون استخدام التعريف.

مثال 3.11.
لإيجاد النهاية $\lim \dfrac{\sin n}{n^2}$ ، نستخدم مبرهنة الحصر.

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$
$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

وبما أن

$$\lim \frac{-1}{n^2} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

إذا

$$\lim \frac{\sin n}{n^2} = 0$$

مثال 3.12.
إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x_n| \to |x|$. هل العكس صحيح؟

الحل
من متباينة المثلث،

$$0 \leq ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| \qquad \forall\ n \in N$$

وبما أن $|x_n - x| \longrightarrow 0$، إذا $|x_n| - |x| \longrightarrow 0$. أي إن

$$|x_n| \longrightarrow |x|$$

ولكن العكس غير صحيح، ويمكن اختيار $x_n = (-1)^n$
في الأمثلة التالية نحتاج مبرهنة ذات الحدين، والتي نوردها بدون برهان.

مبرهنة 3.1: ذات الحدين

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

مثال 3.13. إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن $\lim a^n = 0$.

الحل

يمكن كتابة $a = \dfrac{1}{1+b}$ حيث $b > 0$. ومن مبرهنة ذات الحدين

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \ldots + b^n > nb$$

لاحظ أن

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{nb}$$

وبما أن $\dfrac{1}{nb} \longrightarrow 0$، إذا $a^n \longrightarrow 0$.

مثال 3.14. إذا كان $c > 0$ ، فإن $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.

الحل

نبحث 3 حالات

1. إذا كان $c > 1$، فإنه يوجد $d_n > 0$ بحيث
$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + d_n$$
ومن مبرهنة ذات الحدين
$$c = (1+d_n)^n > nd_n$$
وهذا يعني أن
$$0 < d_n < \frac{c}{n}$$
وبالتالي $d_n \to 0$، إذا
$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + d_n \to 1$$

2. إذا كان $0 < c < 1$، فيمكن وضع $b = \dfrac{1}{c} > 1$، وبالتالي $b^{\frac{1}{n}} \to 1$. وهذا يعني أن
$$c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 1$$

3. إذا كان $c = 1$، فإن $\left(c^{\frac{1}{n}}\right)$ متتالية ثابتة ونهايتها 1.

مثال 3.15. إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، وكان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

الحل

نبحث حالتين: الأولى إذا كان $x = 0$، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - 0| < \varepsilon^2 \qquad \forall\ n \geq N$$

$$x_n < \varepsilon^2$$
$$\sqrt{x_n} < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\sqrt{x_n} \longrightarrow 0$.
الحالة الثانية إذا كان $x > 0$، فإن

$$0 \leq \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{\left|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right|} \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}}$$

وبما أن $|x_n - x| \longrightarrow 0$، إذا $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \longrightarrow 0$. أي إن

$$\sqrt{x_n} \longrightarrow \sqrt{x}$$

مثال 3.16. $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$

الحل
إذا كانت $n > 1$، فإن $n^{\frac{1}{n}} > 1$، وهذا يعني وجود $a_n > 0$ بحيث

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$$

ومن مبرهنة ذات الحدين

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \ldots + a_n^n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

أي إن

$$n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

وهذا يعني أن

$$0 < a_n^2 < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} \qquad \forall\ n > 1$$

وهذا يعني أن $a_n^2 \longrightarrow 0$، إذا $a_n \longrightarrow 0$، وهذا يثبت أن

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n \longrightarrow 1$$

3.2 تمارين

1. بين ما إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة أم لا، وأوجد النهاية إن وجدت.

(ا) $\star$ $\quad x_n = \dfrac{n^2 + 1}{n^3 + n}$

(ب) $\quad x_n = \dfrac{n^2 + n - 1}{n + 1}$

(ج) ⋆ $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{3n-1}$

(د) $x_n = \dfrac{\sin n}{2n+1}$

(هـ) $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

2. أوجد النهايات التالية

(ا) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)^2} \right)$

(ب) $\lim \left(\dfrac{1}{2n} + \dfrac{\sin(n^2)}{n+2} \right)^n$

(ج) $\lim \tan^{-1} n$

3. أعط مثالا لما يلي:

(ا) ⋆ متتاليتان $(x_n), (y_n)$ بحيث تكون $(x_n + y_n)$ متقاربة، بينما (x_n) متباعدة.

(ب) متتاليتان $(x_n), (y_n)$ غير متقاربتين، ولكن $(x_n + y_n)$ متقاربة.

(ج) متتالية (x_n) غير متقاربة، ولكن $(|x_n|)$ متقاربة. ثم وضح متى نضمن تقارب المتتالية (x_n) إذا كانت $(|x_n|)$ متقاربة؟

4. إذا كانت $x_n \to x$، وكانت $x_n \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن $x \leq M$.

5. إذا كانت $x_n \to x$، وكان $x > 0$ فأثبت أن يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n > 0$ لكل $n \geq N$.

6. إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة من الأعداد الصحيحة، فماذا نستنتج؟

7. إذا كانت $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$، فأثبت أن $(\sqrt{n}\, x_n)$ متقاربة.

8. تعرف متتالية فيبوناتشي بالعلاقة

$$x_1 = 1, x_2 = 1$$
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ متقاربة، وأوجد نهايتها.

9. ⋆ إذا كانت $(x_n + y_n)$ متقاربة و (x_n) متقاربة، فأثبت أن (y_n) متقاربة. هل نستطيع استنتاج نتيجة مشابهة للمتتالية $(x_n y_n)$؟

10. إذا كانت (x_n) متقاربة، (y_n) غير متقاربة، ماذا نستنتج عن $(x_n + y_n)$ و $(x_n y_n)$.

11. إذا كانت $x_n \neq 0$ و $x_n \to 0$، فأثبت أن $(1/x_n)$ غير محدودة.

12. ⋆ إذا كان $0 < a < 1$، فأثبت أن $\lim n a^n = 0$

13. إذا كان $0 < a < b$، فأثبت أن $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

14. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق $|x_n - x_{n+1}| > c$ لعدد حقيقي $c > 0$، ولكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن (x_n) متباعدة.

15. إذا كانت (x_n) متتالية من الأعداد الموجبة، وكانت $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ فأثبت أن $x_n \to 0$. ماذا لو كانت $L = 1$؟ $L > 1$؟

16. بين هل المتتالية (x_n) متقاربة حيث $0 < a < 1 < b$

(ا) $x_n = \frac{n^3}{2^n}$

(ب) $x_n = n^2 a^n$

(ج) $x_n = \frac{b^n}{n^2}$

(د) $x_n = \frac{b^n}{n!}$

(هـ) $x_n = \frac{n!}{n^n}$

17. ⋆ إذا كانت $\lim \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0$، فأثبت أن (x_n) محدودة، ثم أثبت أن نهايتها تساوي 1.

18. أثبت أن المتتالية $(\sin n)$ غير متقاربة. (إرشاد: افرض أن المتتالية متقاربة، وأوجد $\lim \cos 2n$ ثم لاحظ أن $\sin 2n = \sin[(2n+2) - (2n)]$)

19. أثبت أنه لكل $x \in \mathbb{R}$، توجد متتالية $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ و $x_n \to x$. كما يوجد متتالية $(y_n) \subset \mathbb{Q}^c$ و $y_n \to x$.

20. إذا كانت $x_n \to x$، فأثبت أن

$$a_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to x$$

هل العكس صحيح؟

21. إذا كانت $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وكانت $((-1)^n x_n)$ متقاربة، فأثبت أن (x_n) متقاربة، ثم أوجد نهايتها.

22. إذا كانت (x_n) تحقق

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

فأثبت أن (x_n) متقاربة.

23. إذا كانت (x_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة، وكان $c \in (0,1)$، بحيث

$$x_{n+1} < c x_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

فأثبت أن (x_n) متقاربة، وأوجد نهايتها. ثم بين هل المتتالية $(1 + \frac{1}{n})$ تحقق هذه الخاصية.

24. إذا كانت (x_n) متقاربة، فأثبت أنه لكل $k \in \mathbb{N}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0$$

هل العكس صحيح؟

3.3 المتتاليات المطردة

في هذا الفصل نركز اهتمامنا على المتتاليات المطردة (monotone sequences) . ومن أهم خصائصها أنها تكون متقاربة، أو أن نهايتها ∞ أو $-\infty$.

تعريف 3.5: المتتالية المطردة

1. نقول إن المتتالية (x_n) متزايدة (increasing) إذا كان $x_{n+1} \geq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أما إذا كانت $x_{n+1} > x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإننا نقول إن (x_n) متزايدة فعلا (strictly increasing) .
2. نقول إن المتتالية (x_n) متناقصة (decreasing) إذا كان $x_{n+1} \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أما إذا كانت $x_{n+1} < x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإننا نقول إن (x_n) متناقصة فعلا (strictly decreasing) .
3. إذا كانت (x_n) متزايدة أو متناقصة فهي تسمى مطردة (monotone) .

ملاحظة

المتتالية (x_n) متزايدة، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(-x_n)$ متناقصة.

مثال 3.17.

1. المتتالية $(\frac{1}{n})$ متناقصة فعلا
2. المتتالية (n^2) متزايدة فعلا.
3. المتتالية $((-1)^n)$ ليست مطردة.
4. المتتالية $(\frac{(-1)^n}{n})$ ليست مطردة.

مثال 3.18.
نستطيع إثبات أن المتتالية (x_n) متناقصة فعلا بعدة طرق، حيث

$$x_n = \frac{2}{n+3}$$

1. البدء بشكل عكسي

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\overset{?}{<} x_n \\ \frac{2}{(n+1)+3} &\overset{?}{<} \frac{2}{n+3} \\ n+3 &< n+4 \end{aligned}$$

وبما أن المتباينة الأخيرة صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$، إذا المتتالية متناقصة فعلا.

2. إثبات أن $x_{n+1} - x_n < 0$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2}{(n+1)+3} - \frac{2}{n+3} = \frac{-2}{(n+4)(n+3)} < 0$$

3. إثبات أن $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2}{(n+1)+3}}{\frac{2}{n+3}} = \frac{n+3}{n+4} < 1$$

4. حساب المشتقة للدالة $f(x) = \frac{2}{x+3}$، وإثبات أنها سالبة في الفترة $[1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} < 0 \qquad \forall x \in [1, \infty)$$

تمرين 3.19. أثبت أن المتتالية (x_n) متناقصة فعلا، حيث

$$x_n = \frac{n}{n^2+1}$$

كقاعدة عامة، المتتالية المحدودة ليست بالضرورة متقاربة، فمثلا المتتالية $((-1)^n)$ محدودة، وغير متقاربة. لكن لو كانت مطردة ومحدودة فهي متقاربة كما توضح المبرهنة التالية.

مبرهنة 3.7: المتتاليات المطردة

إذا كانت (x_n) متتالية مطردة ومحدودة فهي متقاربة. كما أنه

1. إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة، فإن

$$\lim x_n = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ونكتب $x_n \uparrow \sup \{x_n\}$

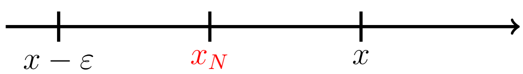
2. إذا كانت (x_n) متناقصة ومحدودة، فإن

$$\lim x_n = \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ونكتب $x_n \downarrow \inf \{x_n\}$

البرهان: سنثبت صحة المبرهنة إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة. إن المجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير خالية ومحدودة من أعلى، ومن مسلمة التمام لها حد علوي أصغر وليكن $x = \sup A$. لإثبات أن $x_n \to x$، نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، ومن تعريف $\sup A$، فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_N \in A$،

$$x - \varepsilon < x_N \leq x$$

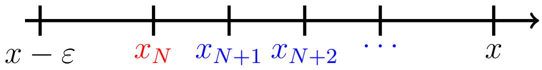


وبما أن

$$x_n \geq x_N \qquad \forall\, n \geq N$$

إذا

$$x - \varepsilon < x_n \leq x \qquad \forall\, n \geq N$$



ونحصل على

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

وهذا يعني أن $x_n \to x$. □

مثال 3.20.

إذا كانت $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 3$، فأثبت أن (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

الحل

نبدأ بحساب بعض حدود المتتالية لمعرفة هل المتتالية مطردة أم لا.

$$x_1 = 0 < x_2 = 3 < x_3 = 4.5$$

هذا يعطي انطباعا أن المتتالية متزايدة، ويبقى إثبات أنها متزايدة. باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

$$x_{n+1} \geq x_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 0 < x_2 = 3$.

2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_{n+1} \geq x_n$، فإن

$$\frac{x_{n+1}}{2} + 3 \geq \frac{x_n}{2} + 3 \Rightarrow x_{n+2} \geq x_{n+1}$$

وهذا يعني أن المتتالية متزايدة.

يبقى إثبات أن المتتالية محدودة. باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

$$x_n \leq 6 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

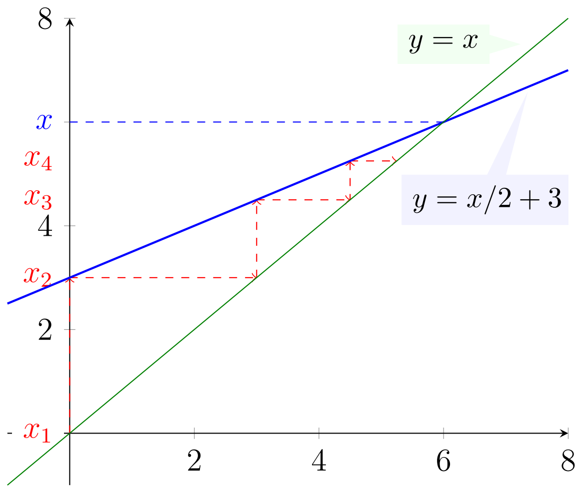
1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 0 < 6$.

2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_n \leq 6$، فإن

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 3 \leq \frac{6}{2} + 3 = 6$$

وهذا يعني أن المتتالية محدودة. إذا (x_n) متقاربة، ولإيجاد قيمة النهاية نفرض أن $x_n \to x$، إذا $x_{n+1} \to x$، وبأخذ النهاية للطرفين $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 3$، نحصل على

$$x = \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$$



تمرين 3.21.
ماذا لوكانت $x_1 = 10$؟

تمرين 3.22.
إذا كان $x_1 = 0,\ x_{n+1} = 2x_n + 3$ فهل المتتالية (x_n) متقاربة؟

مثال 3.23.
إذا كانت $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

الحل
نبدأ بحساب بعض حدود المتتالية لمعرفة هل المتتالية مطردة أم لا.

$$x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{2} < x_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

هذا يعطي انبطاعا أن المتالية متزايدة ومحدودة
أولا: المتتالية متزايدة: باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

$$x_{n+1} \geq x_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{2}$.

2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_{n+1} \geq x_n$، فإن

$$2x_{n+1} \geq 2x_n \Rightarrow \sqrt{2x_{n+1}} \leq \sqrt{2x_n} \Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

وهذا يعني أن المتتالية متزايدة.

ثانيا: المتتالية محدودة: باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

$$x_n \leq 2 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 1 < 2$.

2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_n \leq 2$، فإن

$$x_{n+1} =\leq \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2\cdot 2} = 2$$

وهذا يعني أن المتتالية محدودة. إذا (x_n) متقاربة، ولإيجاد قيمة النهاية نفرض أن $x_n \to x$، إذا $x_{n+1} \to x$، وبأخذ النهاية للطرفين $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$، نحصل على

$$x = \sqrt{2x} \Rightarrow x = 0, x = 2$$

وبما أن $x \geq x_1 = 1$، إذا $x = 2$.

مثال 3.24. سبق أن أثبتنا إنه إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن $\lim a^n = 0$. يمكن إثبات النهاية باستخدام مبرهنة المتتاليات المطردة. لتكن $x_n := a^n$، من الواضح أن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، إذا (x_n) محدودة من أسفل. كما أن

$$x_{n+1} = aa^n < a^n = x_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

إذا (x_n) متناقصة، فهي متقاربة. لنفرض أن النهاية x، فنحصل على

$$x = \lim x_{n+1} = \lim a^{n+1} = \lim aa^n = ax$$

$$x = ax \;\Rightarrow\; x(1-a) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

مثال 3.25.
أثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها، حيث $x_1 = 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$

الحل
عند حساب بعض الحدودة نلاحظ أن المتتالية متناقصة بعد الحد الثاني

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \frac{7}{4}, \quad x_4 = \frac{97}{56}$$

من الواضح أن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، إذا (x_n) محدودة من أسفل.
ولإثبات أن المتتالية متناقصة، نلاحظ أن

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$
$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 3 = 0$$

وهذا يعني أن x_n حل للمعادلة

$$t^2 - 2x_{n+1}t + 3 = 0$$

إذا المميز $4x_{n+1}^2 - 12$ غير سالب لأن لها حلا حقيقيا. أي إن

$$x_{n+1}^2 - 3 \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ثم نوجد

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2x_n} - x_n \\ &= \frac{3}{2x_n} - \frac{x_n}{2} \\ &= \frac{3 - x_n^2}{2x_n} \\ &\le 0 \qquad \forall\, n \ge 2 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن المتتالية متناقصة من الحد الثاني.
لإيجاد قيمة النهاية، نفرض أن $x_n \to x$، إذا

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \\ 2x^2 &= x^2 + 3 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

وبما أن $x_n > 0$، إذا $x = \sqrt{3}$.
من الملاحظ أن كل حد من حدود المتتالية (x_n) هو عدد نسبي، ولكن نهاية المتتالية عدد غير نسبي.

الأعداد الحقيقية الممتدة (extended real numbers)

إن كلا من المتتاليتين (n) و $((-1)^n n)$ غير متقاربة. ولكن المتتالية الأولى تختلف عن الثانية أنها تتزايد بشكل مطرد وغير محدود، بينما الثانية فهي تتذبذب بين أعداد موجبة وسالبة كبيرة جدا. ومن المهم التفريق بينهما عند بحث النهاية. وهذا يتم من خلال إضافة الرمزين $-\infty$ و ∞ للاعداد الحقيقية.

تعريف 3.6: الأعداد الحقيقية الممتدة

تسمى المجموعة $[-\infty, \infty] = \{-\infty, \infty\} \bigcup \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}}$ ، مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة.

عند اعتبار الأعداد الممتدة، فإننا سوف نتفق اصطلاحا على تعريف الحد العلوي الأصغر والحد السفلي الأكبر للمجموعات غير المحدودة.

1. إذا كانت A غير خالية وغير محدودة من أعلى، فإننا نكتب $\sup A = \infty$

2. إذا كانت A غير خالية ومحدودة من أسفل، فإننا نكتب $\inf A = -\infty$

3. بما أن أي عدد حقيقي هو حد علوي للمجموعة ϕ، فإن $\sup \phi = -\infty$، كما أن $\inf \phi = \infty$.

نقول إن G جوار للنقطة ∞ إذا وجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث $(M, \infty] \subset G$.

تعريف 3.7:

إذا كانت (x_n) متتالية، فإننا نقول إن (x_n) تتباعد إلى ∞، ونكتب

$$\lim x_n = \infty$$

إذا كان لكل $M \in \mathbb{R}^+$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$x_n > M \qquad \forall\, n \geq N$$

ونقول إن (x_n) تتباعد إلى $-\infty$، ونكتب $\lim x_n = -\infty$، إذا كان لكل $M \in \mathbb{R}^-$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$x_n < M \qquad \forall\, n \geq N$$

إذا كانت (x_n) متتالية متزايدة وغير محدودة من أعلى، فإن

$$x_n \to \infty$$

مثال 3.26.
إذا كانت

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

فإن (x_n) متزايدة وغير محدودة. لإثبات أن المتتالية متزايدة، نلاحظ أن

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n$$

ولإثبات أنها غير محدودة، نلاحظ أن

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

وبشكل عام فإن

$$x_{2^n} > 1 + \left(\frac{n}{2}\right)$$

وهذا يقتضي أن (x_n) غير محدودة. وبالتالي $\lim x_n = \infty$.

ملاحظات

1. إذا كانت المتتالية غير محدودة، فليس بالضرورة أن $\lim x_n = \infty$ ، فمثلا المتتالية (x_n) المعرفة بالعلاقة

$$x_n := \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

نهايتها غير موجودة في $\bar{\mathbb{R}}$.

2. قد تكون المتتالية متباعدة إلى ∞ ولكنها ليست مطردة. مثلا إذا كانت $(x_n) = (n(2 + (-1)^n))$، فإن $x_n \to \infty$، لأن $x_n \geq n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

3.3 تمارين

1. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة حيث

(ا) $x_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

(ب) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

(ج) $\star$ $x_n = \frac{n^n}{n!}$

(د) $x_n = \sqrt[n]{a},\ a > 1$

(هـ) $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

2. حدد هل المتتالية (x_n) مطردة، أم لا.

(ا) $x_n = \cos n$

(ب) $x_n = n^3 - 3n + 3$

(ج) $x_n = \dfrac{1-n}{2+n}$

3. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم أوجد نهايتها.

(ا) $\star$ $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

(ب) $\star$ $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{4x_n + 2}{x_n + 3}$

(ج) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$

(د) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$

(هـ) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3 - x_n}$

4. إذا كانت $x_1 = a > 0$، وعرفنا المتتالية (x_n) كما يلي:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

فهل المتتالية متقاربة أم متباعدة؟

5. إذا كانت $0 < x_1 < 1$ وكان $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن x_n متناقصة، وأوجد نهايتها. ثم بين أن $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$

6. أثبت أن المتتالية (x_n) متزايدة، وغير محدودة حيث $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. $\star$ إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$، فأثبت أن (x_n) متناقصة ومحدودة وبالتالي متقاربة.

8. إذا كان $0 < b < 1$ وكانت $x_n = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n$، فأثبت أن (x_n) متزايدة ومحدودة ثم أوجد نهايتها.

9. إذا كانت $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$، فأثبت أن (x_n) متزايدة ومحدودة وبالتالي متقاربة. (إرشاد: إذا كان $k \geq 2$، فإن $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.)

10. إذا كان $0 < x_1 < y_1$، وعرفنا المتتاليتين (x_n) و (y_n) كما يلي:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},$$
$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(ا) أثبت أن $0 < x_n < y_n$ لكل $n \in N$.

(ب) أثبت أن x_n متزايدة ومحدودة من أعلى، و y_n متناقصة ومحدودة من أسفل.

(ج) أثبت أن $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < (y_1 - x_1)/2^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(د) أثبت أن $\lim x_n = \lim y_n$.

11. إذا عرفنا

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$$

فأثبت أن (x_n) متقاربة. ثم أثبت أن $((2n+1)x_n^2)$ متقاربة، وأوجد $\lim x_n$.

12. وضح أن المتتالية $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$ متباعدة إلى ∞.

13. إذا كانت $x_n \to \infty$ و (y_n) متقاربة، فأثبت أن $x_n + y_n \to \infty$.

14. إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتان موجبتان، وكان

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = L > 0$$

فأثبت أن $x_n \to \infty$ إذا وفقط إذا كان $y_n \to \infty$.

15. إذا كان $\lim x_n/n = L > 0$، فأثبت أن $\lim x_n = \infty$.

16. إذا كانت $x_n \to \infty$ و (y_n) محدودة، فهل بالضرورة $x_n + y_n \to \infty$.

17. إذا كانت (x_n) متتالية متزايدة، و (y_n) متتالية متناقصة بحيث $x_n \leq y_n$، فأثبت أن المتتاليتين (x_n) و (y_n) متقاربتان. ثم أثبت أنه إذا كان $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$، فإن $\lim x_n = \lim y_n$.

3.4 المتتاليات الجزئية ومبرهنة بولزانو-فايرشتراس

في هذا الفصل نقدم مفهوم المتتاليات الجزئية. وتعتبر أكثر عمومية من ذيل المتتالية الذين ناقشناه سابقا. وتفيد المتتاليات الجزئية في إثبات تقارب أو تباعد المتتالية. ثم نثبت مبرهنة بولزانو-فايرشتراس أن أي متتالية محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.

تعريف 3.8: المتتالية الجزئية

لتكن (x_n) متتالية، و (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلا، أي $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ، فإننا نسمي المتتالية $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ متتالية جزئية من (x_n) .

وهذا يعني أن المتتالية الجزئية ناتجة عن الاستغناء عن بعض عناصر المتتالية الأصلية وإعادة ترقيم الحدود الباقية بدون الإخلال بالترتيب السابق.

مثال 3.27.

1. كل ذيل من (x_n) هو متتالية جزئية.
2. المتتالية $(1, 4, 7, 10, \dots, 3n-2, \dots)$ تمثل متتالية جزئية من المتتالية (n).
3. الحدود الفردية تشكل متتالية جزئية من (x_n) حيث $n_k = 2k-1$ ، وكذلك الحدود الزوجية.
4. $(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots)$ ليست متتالية جزئية من $(\frac{1}{n})$ لاختلاف الترتيب.
5. $(4, 8, 9, \dots)$ ليست متتالية جزئية من $(2n)$ ، لأن 9 ليس عنصرا في المتتالية.

ملاحظات

1. إذا كانت المتتالية (x_{n_k}) متقاربة، فإن نهايتها تسمى نهاية جزئية (subsequential limit) . فمثلا -1 و 1 نهايتان جزئيتان للمتتالية $((-1)^n)$.
2. الشرط $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ يقتضي أن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

المبرهنة الآتية توضح أن المتتالية الجزئية لمتتالية متقاربة، هي أيضا متقاربة ولنفس النهاية.

مبرهنة 3.8:

إذا كانت (x_n) متقاربة ونهايتها x، فإن كل متتالية جزئية منها (x_{n_k}) متقاربة لنفس النهاية.

البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

وبما أن $n_k \geq k$، لكل $k \in \mathbb{N}$، إذا

$$k \geq N \;\Rightarrow\; n_k \geq N \;\Rightarrow\; |x_{n_k} - x| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $x_{n_k} \to x$. □

ملاحظات

1. إذا أمكن إيجاد متتاليتين جزئيتين (x_{m_n}) و (x_{k_n}) متقاربتين لنهايتين مختلفتين، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.
2. إذا أوجدنا متتالية جزئية (x_{n_k}) غير متقاربة، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.

مثال 3.28.

1. المتتالية $((-1)^n)$ ليست متقاربة. إذا عرفنا $x_n = (-1)^n$، فإن

$$x_{2n-1} \to -1, \quad x_{2n} \to 1$$

وبما أن النهايتين مختلفتان، إذا النهاية غير موجودة.

2. إذا عرفنا

$$x_n := \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

فإن (x_n) ليست متقاربة، لأن المتتالية الجزئية x_{2n-1} غير متقاربة.

تمرين 3.29. أثبت أن المتتالية $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ ليست متقاربة.

مثال 3.30.
سبق أن أثبتنا أنه إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن

$$\lim a^n = 0$$

وذلك باستخدام طريقة الحصر. الآن نوضح طريقة أخرى للإثبات باستخدام المتتاليات الجزئية.
لتكن $x_n := a^n$. من الواضح أن المتتالية (x_n) متناقصة فعلا ومحدودة من أسفل بالعدد 0، وبالتالي فإنها متقاربة لعدد، وليكن x. إذا $x_n \to x$، كما أن المتتالية الجزئية (x_{2n}) متقاربة. ولكن

$$x_{2n} = a^{2n} = (a^n)^2 = (x_n)^2$$

إذا

$$x_{2n} \to x^2$$

وبما أن النهاية وحيدة، فإن $x = x^2$ وهذا يعني أن $x = 0$ أو $x = 1$، ولكن بما أن (x_n) متناقصة فعلا، ومحدودة من أعلى بالعدد $a < 1$، إذا $x = 0$.

نتيجة 3.1:

إذا كانت (x_n) متقاربة ، ولها متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة من x ، فإن $\lim x_n = x$.

البرهان: لتكن $x_n \to y$، وبما أن (x_{n_k}) متتالية جزئية، إذا $x_{n_k} \to y$، ولكن النهاية وحيدة، إذا $x = y$. □

مبرهنة 3.9: المتتالية الجزئية المطردة

إذا كانت (x_n) متتالية، فإن لها متتالية جزئية مطردة.

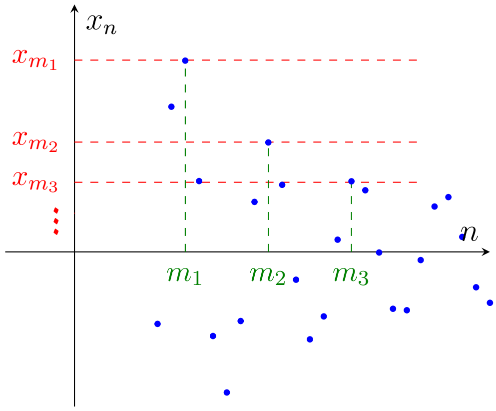
البرهان: نقول إن x_m نقطة قمة إذا كانت أكبر من أو تساوي جميع الحدود التي تليها، أي

$$x_m \geq x_n \qquad \forall\, n \geq m$$

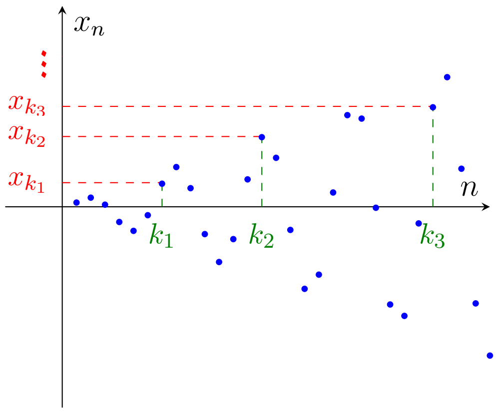
ويوجد حالتان بخصوص عدد نقاط القمة:

1. إذا كان هناك عدد لا نهائي من نقاط القمة فإننا نحصل على المتتالية الجزئية المتناقصة (x_{m_n})

$$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \ldots$$



2. إذا كان هناك عدد منته من نقاط القمة (قد لا يكون هناك أي نقطة قمة)، ولتكن $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_r}$. نعرف المتتالية (x_{k_n}) كما يلي: $k_1 = m_r + 1$، وهو أول حد بعد القمة الأخيرة. وبما أن x_{k_1} ليست نقطة قمة، إذا يوجد $k_2 > k_1$ بحيث $x_{k_2} > x_{k_1}$، وبما أن x_{k_2} ليست نقطة قمة، إذا يوجد $k_3 > k_2$ بحيث $x_{k_3} > x_{k_2}$. فنحصل على المتتالية الجزئية المتزايدة (x_{k_n}).



□

المبرهنة الآتية تعطي شرطا كافيا لضمان أن المتتالية تحتوي متتالية جزئية متقاربة، وتعتبر من المبرهنات المهمة في التحليل الحقيقي كما سنلاحظ في الفصول القادمة.

مبرهنة 3.10: مبرهنة بولزانو-فايرشتراس

إذا كانت (x_n) متتالية محدودة ، فإن لها متتالية جزئية متقاربة.

البرهان: من المبرهنة السابقة، يوجد متتالية جزئية مطردة (x_{n_k})، وبما أن (x_n) محدودة، إذا (x_{n_k}) محدودة، وبالتالي متقاربة. □

المبرهنة التالية تعطي العلاقة بين المتتاليات الجزئية المتقاربة، وتقارب المتتالية المحدودة.

مبرهنة 3.11:

إذا كانت (x_n) محدودة ، وجميع متتالياتها الجزئية المتقاربة متقاربة إلى نفس النهاية، فإن x_n متقاربة إلى هذه النهاية.

البرهان: بما أن (x_n) محدودة، إذا يوجد متتالية جزئية متقاربة ولتكن نهايتها x. لنفرض أن x_n ليست متقاربة إلى x. هذا يعني وجود $\varepsilon > 0$ بحيث لكل $N \in \mathbb{N}$ يوجد $n \geq N$ تحقق

$$|x_n - x| \geq \varepsilon$$

نختار $N = 1$، عندئذ يوجد n_1 بحيث $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon$. ثم نختار $N = n_1 + 1$، فنستطيع أن نجد n_2 بحيث $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon$، وبالاستمرار، نحصل على المتتالية (x_{n_k}) بحيث

$$|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

المتتالية (x_{n_k}) محدودة، وبالتالي لها متتالية جزئية $(x_{n_{k_j}})$ متقاربة. وبما أن $(x_{n_{k_j}})$ متتالية جزئية من (x_n)، فإن $x_{n_{k_j}} \to x$، وهذا تناقض مع

$$|x_{n_{k_j}} - x| \geq \varepsilon \qquad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

إذا $x_n \to x$ $\square$

3.4 تمارين

1. أعط مثالا لما يلي:
   (ا) $\star$ متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة
   (ب) متتالية غير محدودة لها متتالية جزئية متقاربة
2. $\star$ إذا كانت كل متتالية جزئية من (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة إلى 0، فأثبت ان $\lim x_n = 0$.
3. إذا كانت (x_n) متتالية، وكانت متتالياتها الجزئيتان (x_{2n}), (x_{2n-1}), متقاربة إلى x، فأثبت أن $x_n \to x$.
4. إذا كانت (x_n) غير محدودة، فأثبت أنه يوجد متتالية جزئية (x_{n_k}) بحيث $\lim \frac{1}{x_{n_k}} = 0$.
5. إذا كانت (x_n) متتالية، وكانت متتالياتها الجزئية (x_{2n}), (x_{2n-1}), (x_{3n}) متقاربة، فأثبت أن (x_n) متقاربة.
6. إذا كانت (x_n) متزايدة ولها متتالية جزئية محدودة من أعلى، فأثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة.
7. $\star$ أثبت أن المتتالية (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة حيث
$$x_n = \frac{(n^2 + 20n + 30)\sin(n^3)}{n^2 + n + 1}$$
8. إذا كانت (x_n) غير محدودة من أعلى، فأثبت أن لها متتالية جزئية متباعدة إلى ∞.
9. إذا كانت $a > 0$، واخترنا $x_1 > \sqrt{a}$، وعرفنا
$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{x_n + 1}$$
فأثبت أن (x_{2n-1}) متزايدة، و (x_{2n}) متناقصة، ثم أثبت ان (x_n) متقاربة وأوجد نهايتها.
(إرشاد: لاحظ أن $x_{n+1} = x_n + \dfrac{a - x_n^2}{x_n + 1}$).

3.5 متتالية كوشي

تعرفنا في الفصول السابقة على المتتاليات المتقاربة. والتي نحتاج لمعرفة نهايتها حتى يتسنى لنا إثبات تقاربها باستخدام التعريف. بعد ذلك ناقشنا نوعا خاصا من المتتاليات وهي المتتاليات المطردة والمحدودة. حيث نعلم أنها متقاربة، بدون معرفة النهاية. ولكن هذا النوع من المتتاليات يعتبر حالة خاصة، ونحن بحاجة لمعيار يستطيع الحكم على تقارب أي متتالية بدون معرفة نهايتها، وهذا ما نفصله في هذا الفصل.

تعريف 3.9: متتالية كوشي (Cauchy sequence)

تسمى المتتالية (x_n) متتالية كوشي، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq N$$

وهذا يعني أن الحدود المتأخرة للمتتالية قريبة من بعضها.

مثال 3.31.
أثبت أن $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ متتالية كوشي.

الحل
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى،

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

ومن خاصية أرخميدس يوجد عدد $N \ \in \mathbb{N}$، بحيث $\frac{\varepsilon}{2} < \dfrac{1}{N}$. إذا كان $m, n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

حتى نثبت أن متتالية هي متتالية كوشي، لا يكفي أن نثبت أن كل حد قريب من الحد الذي يليه. بل ينبغي أن تكون جميع الحدود بعد حد معين قريبة من بعضها.

مثال 3.32. هل المتتالية $(\sqrt{n})$ متتالية كوشي؟

الحل
لو أخذنا الحدود المتتالية، وكان $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نلاحظ أن

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

ومن خاصية أرخميدس يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon^2$، إذا

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &< \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \forall\, n \geq N \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ولكن المتتالية ليست كوشي، ويمكن إثبات ذلك بملاحظة أن

$$\begin{aligned} |x_{2n} - x_n| &= \sqrt{2n} - \sqrt{n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{2n} + \sqrt{n}} \\ &> \frac{n}{2\sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{n}}{4} \\ &\geq 1 \qquad \forall\, n \geq 16 \end{aligned}$$

إذا لو اخترنا $\varepsilon = \frac{1}{2}$، فإن

$$|x_{2n} - x_n| > \varepsilon \qquad \forall\, n \geq 16$$

وبالتالي المتتالية ليست كوشي.

تمرين 10 : أثبت أن المتتالية (x_n) من نوع كوشي حيث

$$x_n = \frac{2n}{3n+1}$$

ملاحظة

تكون المتتالية (x_n) من نوع كوشي إذا حققت أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ وثابت $C > 0$ بحيث

$$|x_n - x_m| < C\varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq N$$

مبرهنة 3.12

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فإنها من نوع كوشي.

البرهان: لتكن $x_n \to x$، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

الآن، إذا كان $n, m \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x| + |x_m - x| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

إذا (x_n) من نوع كوشي. □

تمهيدية 3.1

إذا كانت (x_n) من نوع كوشي، فإنها محدودة.

البرهان: لتكن (x_n) من نوع كوشي. نختار $\varepsilon = 1$، فيمكن أن نجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \forall\ n, m \geq N$$

نختار $m = N$، ونحصل على

$$|x_n - x_N| < 1 \qquad \forall\ n \geq N$$

ولكن

$$|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N| < 1 \ \Rightarrow\ |x_n| < |x_N| + 1 \qquad \forall\ n \geq N$$

نختار

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$$

ونجد أن

$$|x_n| \leq K \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

□

أثبتنا في مبرهنة 3.12 أن أي متتالية متقاربة فهي من نوع كوشي. لكن هل العكس صحيح؟ الإجابة نعم، كما توضحه المبرهنة التالية.

مبرهنة 3.13: معياركوشي

المتتالية (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت من نوع كوشي.

البرهان: أثبتنا سابقا أن أي متتالية متقاربة، فهي من نوع كوشي.
لنفرض أن (x_n) متتالية كوشي، إذا فهي محدودة. ومن مبرهنة بولزانو-فايرشتراس، فإنه يوجد متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة إلى x. الآن نثبت أن $x_n \to x$.
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى. بما أن (x_n) متتالية كوشي، إذا يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\ n, m \geq N_1$$

وبما أن المتتالية الجزئية (x_{n_k}) متقاربة إلى x، إذا يوجد عدد $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon \qquad \forall\ k \geq N_2$$

نختار عددا ثابتا $N_k \geq N = \max\{N_1, N_2\}$، وبالتالي

$$|x_{N_k} - x| < \varepsilon$$

كما أن

$$|x_{N_k} - x_n| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

إذا لكل $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq |x_n - x_{N_k}| + |x_{N_k} - x| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

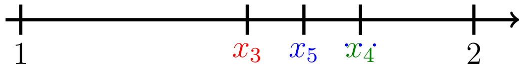
إذا $x_n \to x$. $\square$

مثال 3.33.
إذا كان $x_1 = 1, x_2 = 2$,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن (x_n) متقاربة.

الحل
بحساب أول ثلاثة حدود في المتتالية $x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{7}{4}, x_5 = \frac{13}{8}$، نلاحظ أن المتتالية ليست مطردة.



الآن نوجد حاصل طرح حدين متتاليين في هذه المتتالية.

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{-1}{2}(x_{n-1} - x_n) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(x_1 - x_2) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

إذا كانت $n < m$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots \frac{1}{2^{m-2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \\ &< \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n} < \frac{4}{n} \end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon > 0$، فإنه من خاصية أرخميدس يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$. الآن إذا كان $n, m \ge N$، فإن

$$|x_n - x_m| < \frac{4}{n} \le \frac{4}{N} < 4\varepsilon$$

إذا (x_n) متقاربة. ويمكن إيجاد قيمة النهاية x كما يلي:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_1 &= (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \ldots + (x_2 - x_1) \\ x_{n+1} - 1 &= \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} + \ldots + \left(\frac{-1}{2}\right) + 1 \\ x_{n+1} &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $\lim x_n = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

مثال 3.34. المتتالية (x_n) حيث

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ليست متتالية كوشي. يمكن إثبات ذلك باختيار $m = 2n$.

$$\begin{aligned} |x_{2n} - x_n| &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} \\ &= n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وهذا يقتضي أن (x_n) ليست متتالية كوشي.

3.5 تمارين

1. $\star$ أثبت أن المتتالية (x_n) من نوع كوشي

$$x_n = \frac{5n}{n+3}$$

2. $\star$ إذا كانت (x_n) متتالية تحقق

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$$

فأثبت أن (x_n) متتالية كوشي.

3. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{2n^2 - 1}{5n^2 + 4}$$

فهل (x_n) بالضرورة متتالية كوشي؟

4. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق

$$|x_n| < \frac{2n^2 - 3}{3n^3 + n + 1}$$

فأثبت أن (x_n) متتالية كوشي.

5. إذا كانت $(x_n), (y_n)$ متتاليتان من نوع كوشي، فأثبت أن $(x_n + y_n)$ من نوع كوشي.

6. $\star$ أثبت أن المتتالية $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ من نوع كوشي.

7. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|x_{n+1} - x_n|$$

فأثبت أن (x_n) متتالية كوشي.

8. أثبت أن (x_n) متتالية كوشي حيث $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

9. إذا كانت $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$، فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0$.

10. إذا كانت $x_1 = 0, x_2 = 2$,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 2x_{n-2}}{3}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن (x_n) متقاربة. وأوجد نهايتها.

الباب الرابع

توبولوجيا الأعداد الحقيقية

في هذا الباب نقدم بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمجموعات والنقاط فيها، والتي تفيدنا عند دراسة النهايات والاتصال. ويسمى فرع الرياضيات الذي يهتم بدراسة هذه الموضوعات التوبولوجي. وتعود بداياته إلى منتصف القرن التاسع عشر الميلادي على يد كل من بولزانو، كانتور، وفيرشتراس والذين قاموا بدراسة المجموعات على الأعداد الحقيقية. سوف تقتصر دراستنا على توبولوجيا الأعداد الحقيقية حيث نتطرق لنقاط التراكم، والمجموعات المفتوحة والمغلقة، والمجموعات المتراصة، والتي نحتاجها في الأبواب القادمة.

4.1 نقاط التراكم

تعريف 4.1: نقاط التراكم والنقاط المعزولة

نقول إن $x \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم (cluster point) أو (accumulation point) للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عنصرا $a \in A$ مختلفا عن x . يرمز لنقاط تراكم A بالرمز $\widehat{A}$. أي لكل جوار V للنقطة x ، فإن

$$V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \phi$$

إذا كانت $x \in A \backslash \widehat{A}$ ، فإن x تسمى نقطة معزولة (isolated point) من نقاط A.

نقطة التراكم أحيانا يطلق عليها نقطة نهاية (limit point) .

مثال 4.1. 1. نقاط التراكم للمجموعة $[0,1)$ هي $[0,1]$، وليس لها نقاط معزولة.

2. المجموعة $\{1,2,3\}$ ليس لها نقاط تراكم، وجميع نقاطها معزولة.

3. المجموعة $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ لها نقطة تراكم واحدة هي 0 ، وجميع نقاطها معزولة.

تمرين 4.2. حدد نقاط التراكم والنقاط المعزولة للمجموعة $A = (2,4) \bigcup \{6,9\}$

ملاحظات

1. من التعريف يتضح أن نقطة التراكم للمجموعة A ليست بالضرورة تنتمي إلى A، بينما النقطة المعزولة تنتمي للمجموعة A.

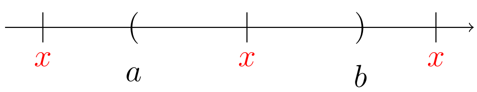
2. $x \in \widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad 0 < |x-a| < \varepsilon$$

3. $x \in \widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان كل جوار V للنقطة x يحتوي عددا غير منته من عناصر A.
(لإثبات ذلك، نفرض أن $x \in \widehat{A}$، وأنه يوجد جوار V للعدد x بحيث يحوي عددا منتهيا من عناصر A، والمختلفة عن x، ولتكن $a_1, \ldots, a_n$. نختار $\varepsilon := \min\{|x-a_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$. من الواضح أن $\varepsilon > 0$، كما أن
$$V_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$$
وهذا تناقض).

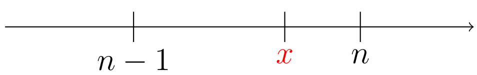
4. $x \in A$ نقطة معزولة ، إذا وفقط إذا وجد جوار V للنقطة x لا يتقاطع مع A إلا في x ، أي
$$V \cap A = \{x\}$$

مثال 4.3.
حدد نقاط التراكم للمجموعات التالية

1. إذا كانت $A = (a, b)$، فإن $\widehat{A} = [a, b]$
لتوضيح ذلك، نلاحظ أنه إذا كانت $x < a$، فإن $V := (x-1, a)$ جوار للنقطة x لا يحوي أي نقطة في A. إذا $x \notin \widehat{A}$، وبالمثل لو كانت $x > b$. كما نلاحظ أن أي جوار للعدد a يحتوي على عدد غير منته من عناصر A، وبالمثل b، إذا $a, b \in \widehat{A}$. وأخيرا إذا كانت $x \in (a, b)$، فإن أي جوار للعدد x يحتوي على عدد غير منته من عناصر A. إذا $\widehat{A} = [a, b]$.



2. $\widehat{\mathbb{Z}} = \phi$
لإثبات ذلك، نلاحظ أنه إذا كان $x \in \mathbb{Z}$، وأخذنا الجوار $V := (x-1, x+1)$ فإن $V \cap \mathbb{Z} = \{x\}$، وبالتالي x نقطة معزولة. إذا كانت $x \notin \mathbb{Z}$، فإنه يوجد $n \in \mathbb{Z}$ بحيث $n-1 < x < n$، نأخذ الجوار $V := (n-1, n)$، ونلاحظ أن $V \cap \mathbb{Z} = \phi$



3. $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
إذا كان $x \in \mathbb{R}$، فإن أي جوار V للعدد x سوف يتقاطع مع $\mathbb{Q}$ في عدد لانهائي من الأعداد.

مبرهنة 4.1:

1. إذا كانت $x \in \widehat{A}$ فإننا نستطيع اختيار متتالية (x_n) في A ذات عناصر مختلفة بحيث $x_n \to x$.
2. إذ كانت (x_n) متقاربة من x والمجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير منتهية ، فإن $x \in \widehat{A}$.

البرهان:

1. إذا كانت $x \in \widehat{A}$ فإننا نختار المتتالية (x_n) كما يلي: عندما $\varepsilon = 1$، نختار $x_1 \in A$ بحيث
$$0 < |x - x_1| < 1$$
وعندما $\varepsilon = \frac{1}{2}$، نختار $x_2 \in A$ بحيث $x_2 \neq x_1$، كما أن
$$0 < |x - x_2| < \frac{1}{2}$$
وهكذا، فنحصل على متتالية (x_n) جميع عناصرها مختلفة، ولا تساوي x، كما أن
$$0 < |x - x_n| < \frac{1}{n}$$
إذا $x_n \to x$.
2. لتكن $x_n \to x$ والمجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير منتهية، وليكن V جوارا للعدد x. بما أن $x_n \to x$، فإنه يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$، بحيث
$$x_n \in V \qquad \forall\ n \geq N$$
وهذا يعني أن V يحوي جميع عناصر A ما عدا عدد منته منها. إذا V يحتوي عددا غير منته من عناصر A، وبالتالي $x \in \widehat{A}$

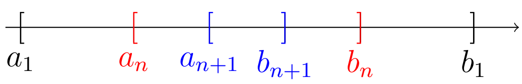
□

ملاحظات

1. أي مجموعة منتهية ليس لها نقاط تراكم (بناء على التعريف، أي جوار لنقطة تراكم يحوي عددا غير منته من عناصر المجموعة).
2. المجموعة غير المنتهية قد لا يكون لها نقاط تراكم ($\mathbb{Z}$) .

الفترات المتداخلة (nested intervals)

نقول عن متتالية من الفترات (I_n) أنها متداخلة، إذا كانت تحقق:
$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$$



على سبيل المثال، لو أخذنا $I_n = [0, \frac{1}{n}]$ حيث $n \in \mathbb{N}$ فإن (I_n) متتالية من الفترات المتداخلة. إن من السهل ملاحظة أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

يمكن استخدام مبرهنة المتتاليات المطردة في إثبات نتيجة مهمة للفترات المتداخلة.

مبرهنة 4.2: مبرهنة كانتور للفترات المتداخلة

إذا كانت $I_n = [a_n, b_n]$ متتالية من الفترات المتداخلة المحدودة والمغلقة، فإن:

.1
$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$$

.2 إذا كان
$$\inf\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$$
حيث $|I_n|$ طول الفترة I_n ، فإن I يحوي نقطة واحدة فقط.

البرهان:

.1 بما أن $I_{n+m} \subset I_n$، لكل $m \in \mathbb{N}$، إذا

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$$

وحيث إن المتتالية (a_n) متزايدة ومحدودة من أعلى بالعدد b_m لكل $m \in N$، إذا المجموعة $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير خالية ومحدودة من أعلى، وبالتالي لها حد علوي أصغر $\beta \in \mathbb{R}$ بحيث $\beta = \lim a_n$. وبما أن

$$a_n \leq b_m, \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$$

إذا

$$a_m \leq \lim a_n = \beta \leq b_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

وبالتالي

$$\beta \in I_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

إذا

$$\beta \in I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

.2 إذا كان

$$\inf\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

وكان $x, y \in I$، فإن $x, y \in I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا

$$|x-y| \leq |I_n| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$|x-y| \leq \inf\{|I_n|\} = 0$$

لأن $|x-y|$ حد سفلي للمجموعة $\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\}$، إذا $x = y$. □

مثال 4.4. خاصية الفترات المتداخلة غير صحيحة إذا حذفنا أحد الشرطين

.1 أن الفترات مغلقة، فمثلا لو اعتبرنا $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

.2 أن الفترات محدودة، فمثلا لو اعتبرنا $I_n = [n, \infty)$، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

المبرهنة التالية تعطي شرطا كافيا لوجود نقطة تراكم لمجموعة ما، وتعرف بمبرهنة بولزانو فايرشتراس للمجموعات غير المنتهية.

مبرهنة 4.3: بولزانو فايرشتراس للمجموعات غير المنتهية

إذا كانت A مجموعة محدودة وغير منتهية، فإن لها نقطة تراكم واحدة على الأقل.

البرهان: بما أن A محدودة، فإنه يوجد فترة $I = [a, b]$ بحيث $A \subset I$. لتكن $c_0 = (a+b)/2$ منتصف الفترة I. بما أن A غير منتهية، إذا أحد الفترتين $[a, c_0]$ أو $[c_0, b]$ تتقاطع مع A في عدد لا نهائي من النقاط، نسمي هذه الفترة $I_1 = [a_1, b_1]$. كما أن $|I_1| = \dfrac{b-a}{2}$. وبالاستمرار نحصل على متتالية من الفترات المتداخلة

$$I \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

بحيث $|I_n| = \dfrac{b-a}{2^n}$، كما أن $A \cap I_n$ مجموعة غير منتهية. ومن مبرهنة كانتور، فإنه يوجد $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. يبقى إثبات أن $x \in \widehat{A}$. ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نستطيع اختيار $n \in \mathbb{N}$، بحيث

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$

وبما أن $|I_n| < \varepsilon$، فإن

$$I_n \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

وحيث I_n تحتوي عددا غير منته من عناصر A، إذا $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ تحتوي عددا غير منته من عناصر A، وبالتالي $x \in \widehat{A}$. $\square$

4.1 تمارين

1. أوجد نقاط التراكم، والنقاط المعزولة للمجموعات الآتية

   (ا) $\left\{2 + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   (ب) $\star$ $(0, 1] \cup \{3, 5\}$

   (ج) $\star$ $\left\{2^n + \dfrac{1}{k} : k, n \in \mathbb{N}\right\}$

   (د) $\left\{\dfrac{(-1)^n n^2}{3n^2 + n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

2. أعط مثالا لمجموعة لها نقطتي تراكم، ومجموعة لها عدد غير منته وقابل للعد من نقاط التراكم.

3. أثبت أن أي مجموعة $A \subset \mathbb{R}$ غير قابلة للعد، لها نقطة تراكم.

4. $\star$ إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة ، و $\sup A \notin A$، فأثبت أن $\sup A \in \widehat{A}$.

5. إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ فأثبت أن

   (ا) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$

   (ب) $\widehat{A \cap B} \subset \widehat{A} \cap \widehat{B}$

4.2 المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة

استخدمنا سابقا الفترات المفتوحة والمغلقة. في هذا الباب نعرف وبشكل دقيق المجموعات المفتوحة والمغلقة. تمثل المجموعات المفتوحة والمغلقة أهمية خاصة في التحليل الحقيقي. في هذا الفصل نتعرف على المجموعات المفتوحة والمغلقة وخصائضها.

تعريف 4.2: المجموعة المفتوحة (open set)

نقول إن المجموعة $A \subset \mathbb{R}$ مفتوحة، إذا كان لكل $x \in A$، يوجد جوار V للنقطة x ، بحيث $V \subset A$.

مثال 4.5.

1. كل فترة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة
2. إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{a\}$، مجموعة مفتوحة.
3. $[a, b)$ ليست مفتوحة، لأن أي جوار للعدد a، فإنه غير محتوى في $[a, b)$.
4. $\mathbb{Z}$ ليست مفتوحة.
5. $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة.

مبرهنة 4.4

1. $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مفتوحتان
2. إذا كانت G_λ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda \in \Lambda$ ، فإن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ مجموعة مفتوحة.
3. إذا كانت $G_1, G_2, \dots, G_n$ مجموعات مفتوحة، فإن $\bigcap_{k=1}^{n} G_i$ مجموعة مفتوحة.

البرهان:

1. $\mathbb{R}$ مفتوحة، لأنه لأي $x \in \mathbb{R}$، فإن $(x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$، كما أن ϕ لا تحتوي أي نقاط، إذا فهي مجموعة مفتوحة.
2. ليكن $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. إذا يوجد λ_0 بحيث $x \in G_{\lambda_0}$. وبما أن G_{λ_0} مفتوحة، إذ يوجد جوار V للنقطة x بحيث
$$x \in V \subset G_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$$
إذا $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ مجموعة مفتوحة.
3. لتكن $x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. إذا $x \in G_k$ لكل $k = 1, 2, \dots n$. وبالتالي يوجد $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$، بحيث
$$V_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k, \quad k = 1, \dots, n$$
نختار $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$، وبالتالي
$$V_\varepsilon(x) \subset G_k, \quad \forall\, k = 1, \dots, n$$
$$V_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k$$
إذا $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ مجموعة مفتوحة.

□

المبرهنة السابقة تبين أن المجموعات المفتوحة تشمل المجموعة الشاملة $\mathbb{R}$ والمجموعة الخالية، كما أنها مغلقة تحت عمليتي الاتحادات العامة، والتقاطعات المنتهية، واي مجموعة مجموعات تحقق هذه الخصائص تسمى تبولوجيا (topology)، أي إن مجموعة المجموعات المفتوحة تمثل تبولوجي على $\mathbb{R}$.

ملاحظة

إن تقاطع أي عدد منته من المجموعات المفتوحة، هو مجموعة مفتوحة، ولكن لو كان التقاطع غير منته، فلا نضمن أن يكون التقاطع مجموعة مفتوحة. فمثلا $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ مجموعات مفتوحة لكل $n \in \mathbb{N}$ ، ولكن

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$$

ليست مجموعة مفتوحة.
المبرهنة التالية تبين العلاقة بين المجموعة المفتوحة، والفترة المفتوحة، ونعطيها بدون برهان.

مبرهنة 4.5:

المجموعة غير الخالية $G \subset \mathbb{R}$ مفتوحة، إذا وفقط إذا كانت اتحادا لعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة.

تعريف 4.3: المجموعة المغلقة (closed set)

المجموعة F مغلقة، إذا كانت متممتها F^c مفتوحة.

مثال 4.6.

1. $[a, b], [a, \infty), (-\infty, b]$ مجموعات مغلقة.
2. $[a, b)$ ليست مغلقة.
3. $\mathbb{Z}$ مغلقة.
4. $\mathbb{Q}$ ليست مغلقة.

لاحظنا من خلال الأمثلة أن هناك مجموعات مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت وهي $\mathbb{R}$ و ϕ وهناك مجموعات ليست مفتوحة ولا مغلقة مثل $[0, 1)$.

مبرهنة 4.6

1. $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مغلقتان .
2. إذا كانت F_λ مجموعة مغلقة لكل $\lambda \in \Lambda$ ، فإن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ مجموعة مغلقة.
3. إذا كانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ مجموعات مغلقة، فإن $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مجموعة مغلقة.

البرهان: يمكن إثباتها باستخدام قوانين دي مورقان. □

ملاحظة

المجموعات $F_n = \left[\frac{1}{n}, 2\right]$ مغلقة لكل $n \in \mathbb{N}$، ولكن

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,2]$$

ليست مجموعة مغلقة.

مبرهنة 4.7

التقارير الثلاثة متكافئة :

1. F مغلقة.
2. $\widehat{F} \subset F$.
3. F تحتوي نهايات متتالياتها المتقاربة، أي إن

$$x_n \in F, \ \ x_n \to x \implies x \in F$$

البرهان: سنثبت أن

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$$

- $(2) \Leftarrow (1)$. إذا كانت F مغلقة، و $x \notin F$، فإن $x \in F^c$، وبما أن F^c مفتوحة، فإنه يوجد جوار V للعدد x بحيث $x \in V \subset F^c$. وهذا يعني أن $V \cap F = \phi$، إذا $x \notin \widehat{F}$. هذا يعني أن أي نقطة تراكم تنتمي للمجموعة F.

- $(3) \Leftarrow (2)$. إذا كانت $\widehat{F} \subset F$ وكانت $x_n \in F$ و $x_n \to x$. فإما $x = x_n$ لقيمة ما n، فإن $x \in F$،أو $x \neq x_n$ لأي عدد n، فإن x نقطة تراكم للمجموعة F، وبالتالي $x \in \widehat{F} \subset F$.

- $(1) \Leftarrow (3)$. لتكن F تحتوي نهايات متتالياتها المتقاربة، ولنفرض أن F ليست مغلقة، إذا F^c ليست مفتوحة، وبالتالي يوجد $x \notin F$، بحيث لكل $\varepsilon > 0$، فإن

$$V_\varepsilon \cap F \neq \phi$$

بوضع $\varepsilon = \frac{1}{n}$، نستطيع تكوين متتالية $x_n \in F$، بحيث

$$|x - x_n| < \frac{1}{n}$$

إذا $x_n \to x \notin F$، وهذا تناقض. إذا F مغلقة.

□

مثال 4.7.

يمكن إثبات أن المجموعة $A = (0,2)$ ليست مغلقة عن طريق تعريف المتتالية (x_n) حيث

$$x_n = \frac{1}{n}$$

وبما أن $x_n \to 0 \notin A$، إذا A ليست مغلقة.

مجموعة كانتور

تعتبر مجموعة كانتور والتي سنرمز لها بالرمز F مثالا على مجموعة مختلفة تماما عما درسناه سابقا، وتتمتع بخصائص قد تبدو غريبة من الوهلة الأولى، وغير متوقعة. فيما يلي نعرف مجموعة كانتور، ونوضح عددا من خصائصها.

لتكن $F_0 = [0,1]$، ولنستبعد الثلث الأوسط $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ، فنحصل على

$$F_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ثم نستبعد الثلث الأوسط من كل من الفترتين الناتجتين

$$F_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

فنحصل على

$$F_0, F_1, F_2, \ldots$$

نعرف مجموعة كانتور بأنها

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

حتى نستطيع فهم مجموعة كانتور، والإلمام بخصائصها المختلفة، نمثل الأعداد فيها باستخدام المفكوك الثلاثي. إذا كانت $x \in F_0$، فإن لها المفكوك الثلاثي

$$x = (0.x_1x_2x_3\ldots)_3, \qquad x_i \in \{0,1,2\}$$

ونختار التمثيل الثلاثي الآتي للعدد 1، $(0.2222222\ldots)_3 = 1$. نلاحظ أنه إذا كان x في الثلث الأول فإن $x_1 = 0$، أما إذا كان في الثلث الأوسط فإن $x_1 = 1$، وأخيرا إذا كان في الثلث الأخير فإن $x_1 = 2$. وبما أننا استبعدنا الثلث الأوسط، فإن $x \in F_1$ إذا وإذا فقط كان $x_1 = 0$ أو $x_1 = 2$، مع ملاحظة أن $(0.2)_3 = \frac{2}{3}, (0.022222\ldots)_3 = \frac{1}{3}$. وبالمثل نجد أن $x \in F_2$ إذا وإذا فقط كان $x_1 \in \{0,2\}$ و $x_2 \in \{0,2\}$، وهكذا. وهذا يعني أن المجموعة F تحتوي جميع الأعداد التي مفكوكها الثلاثي لا يحوي 1 في أي خانة.

خصائص مجموعة كانتور

1. F مغلقة لأنها تقاطع مجموعات مغلقة.

2. من الواضح أن المجموعة F تحتوي على أطراف الفترات مثل $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$، لكنها كذلك تحتوي على أعداد أخرى. والواقع أن $F \sim [0, 1]$ وبالتالي فإن مجموعة كانتور غير قابلة للعد.
حتى نرى ذلك نعرف الدالة

$$f : F \to [0, 1]$$

كما يلي: ليكن $x \in F$، إذا $x = (0.x_1x_2x_3\ldots)_3$ حيث $x_i \in \{0, 2\}$ وليكن $y = (0.y_1y_2y_3\ldots)_2$ مفكوك y الثنائي حيث $y_i \in \{0, 1\}$. نعرف

$$f : (0.x_1x_2x_3\ldots)_3 \to (0.y_1y_2y_3\ldots)_2$$

حيث $y_i = \frac{x_i}{2}$ فمثلا $f((0.002202)_3) = (0.001101)_2$. هذه الدالة غامرة ولكنها ليست أحادية لأن

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

3. طول الفترات المستبعدة يساوي 1.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 1$$

وهذا يعني أن F لا تحتوي على أي فترة، لأنه لو كان هناك فترة $(a, b) \subset F$، فإن $(a, b) \subset F_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكن طول كل فترة في F_n يساوي $\frac{1}{3^n}$ إذا

$$0 < b - a \leq \frac{1}{3^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

وهذا مستحيل.

4. كل نقطة في F نقطة تراكم. مثلا لو أخذنا النقطة $x = (0.2022)_3$ فإننا نستطيع اختيار المتتالية $(a_n) \subset F$ بحيث

$$\begin{aligned} a_1 &= (0.202202)_3 \\ a_2 &= (0.2022002)_3 \\ &\ldots \\ a_n &= (0.2022\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ zeros}}2)_3 \end{aligned}$$

من الواضح أن $a_n \to x$.

تعريف 4.4:

1. نقول إن $x \in A$ نقطة داخلية للمجموعة A، إذا وجد $\varepsilon > 0$، بحيث $V_\varepsilon(x) \subset A$.
ونعرف داخل (interior) A بأنه مجموعة جميع النقاط الداخلية للمجموعة A، وهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A ويرمز لها بالرمز A° .

2. نعرف إنغلاق (closur) A بأنه أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$ ، كما أن

$$\overline{A} = A \cup \widehat{A}$$

3. نقول إن $x \in \mathbb{R}$ نقطة حدية للمجموعة A، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، فإن $V_\varepsilon(x)$ يحوي نقاطا من A و A^c.
ونعرف حدود (boundary) A بأنها مجموعة النقاط الحدية، كما أن

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

مثال 4.8.
إذا كانت $A = (0, 1]$ ، فإن

$$A^\circ = (0, 1)$$
$$\overline{A} = [0, 1]$$
$$\partial A = \{0, 1\}$$

تمارين 4.2

1. أوجد

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

2. بين هل المجموعة $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ مفتوحة؟ مغلقة؟

3. $\star$ إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ غير خالية ومفتوحة ومحدودة، فأثبت أن $\sup A \notin A$

4. أثبت أن أي مجموعة منتهية فهي مغلقة.

5. أوجد داخل وانغلاق وحافة المجموعات التالية

(ا) $\mathbb{Z}$

(ب) $\mathbb{Q}$

(ج) $\mathbb{R}$

(د) $(1, 2] \cup [3, 4)$

4.3 المجموعات المتراصة

يعتبر مفهوم التراص (compactness) من المفاهيم المهمة في التوبولوجيا والتحليل، وخصوصا عند الحديث عن الدوال المتصلة. في هذا الفصل نقوم بتعريف المجموعة المتراصة، ونعطي عددا من الأمثلة على المجموعات المتراصة، ثم نختم الفصل بنظرية هايني بوريل، والتي تعطي شرطا ضروريا وكافيا لمجموعة في $\mathbb{R}$ لتصبح متراصة. حتى نعرف التراص، نحتاج إلى مفهوم الغطاء المفتوح.

تعريف 4.5: الغطاء المفتوح (open cover)

إذا كانت D مجموعة في $\mathbb{R}$، فإن المجموعة $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ حيث $G_\lambda \subset \mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda \in \Lambda$ تسمى غطاء مفتوحا للمجموعة D، إذا كانت

$$D \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

على سبيل المثال، لو أعتبرنا المجموعة $D = [1,3]$، فإن المجموعة $\{(0,2),(1,3),(2,4)\}$ تمثل غطاء مفتوحا للمجموعة D. وفيما يلي نورد عددا من الأمثلة على غطاءات مفتوحة لبعض المجموعات.

مثال 4.9.

1. المجموعة $\{(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للفترة $(0,\infty)$.
2. المجموعة $\{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للأعداد الطبيعية.
3. $\{\mathbb{R}\}$ غطاء مفتوح لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

تعريف 4.6: المجموعة المتراصة (compact set)

المجموعة $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، إذا كان كل غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة D يحوي مجموعة جزئية منتهية $\{G_{\lambda_1}, \dots G_{\lambda_n}\}$ تغطي D.

يتضح من التعريف أن إثبات أن المجموعة متراصة، يتطلب أنه لأي غطاء مفتوح يوجد غطاء منته. أما إثبات أن مجموعة غير متراصة، فيكفي إيجاد غطاء مفتوح لا يحوي غطاء منتهيا.

مثال 4.10.

1. المجموعة $\mathbb{R}$ ليست متراصة.
لإثبات ذلك نلاحظ أن الغطاء المفتوح
$$\{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$$
يغطي $\mathbb{R}$، ولو افترضنا أنه يوجد غطاء جزئي منته منه وليكن
$$\{(-n_1,n_1),\dots,(-n_k,n_k)\}$$
حيث $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$، فإننا سوف نقع في تناقض لأن $n_k+1 \in \mathbb{R}$ ولكنها غير موجودة في الغطاء المنتهي.
2. المجموعة $(0,2)$ ليست متراصة.
لإثبات ذلك نأخذ الغطاء المفتوح
$$\left\{\left(\frac{1}{n},2\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$
ولنفرض أنه يوجد غطاء جزئي منته منه وليكن
$$\{(1/n_1,2),\dots,(1/n_k,2)\}$$
حيث $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. نلاحظ أن $1/(n_k+1) \in (0,2)$ ولكنها غير موجودة في الغطاء المنتهي.

3. المجموعة $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ متراصة.
إذا كان $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ غطاء مفتوحا للمجموعة A، فإنه يوجد n من المجموعات بحيث $x_k \in G_{\lambda_k}$ لكل $k = 1, 2, \ldots, n$. إذا يوجد غطاء منتهي يغطي A.

4. $[0,1]$ متراصة.
سنثبت ذلك في المبرهنة الآتية.

مبرهنة 4.8

الفترة $I = [a,b]$ متراصة.

البرهان: نفرض أنه يوجد غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة $[a,b]$ لا يحوي غطاء منتهيا. لتكن $c_0 = (a+b)/2$ منتصف الفترة، إذا أحد الفترتين $[a, c_0]$ أو $[c_0, b]$ لا يمكن تغطيتها بغطاء منته من عناصر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$، نسمي هذه الفترة $I_1 = [a_1, b_1]$. بالاستمرار نحصل على متتالية من الفترات المغلقة المتداخلة (I_n) والتي لا يمكن تغطية أي منها بعدد منته من عناصر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$، كما أن

$$|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$$

ومن نظرية كانتور للفترات المتداخلة فإنه يوجد نقطة واحدة فقط في التقاطع ولتكن x. إذا يوجد G_{λ_0} بحيث $x \in G_{\lambda_0}$. وبما أن G_{λ_0} مفتوحة، إذا يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_{\lambda_0}$. وبالتالي نستطيع اختيار I_N،

$$I_N \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_{\lambda_0}$$

إذا

$$I_N \subset G_{\lambda_0}$$

وهذا يعني أن عنصرا واحدا من $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ يغطي I_N وهذا تناقض مع أن I_N لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$، إذا I متراصة. $\square$

فيما يلي نقدم خاصية مهمة من خصائص المجموعات المتراصة

تمهيدية 4.1: المجموعة المتراصة محدودة

إذا كانت المجموعة D متراصة، فإنها محدودة.

البرهان: تعتمد فكرة البرهان على اختيار غطاء مناسب للمجموعة D. نلاحظ أن

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$$

وبما أن D متراصة، إذا يوجد غطاء منته، $\{(-n_1, n_1), \ldots, (-n_k, n_k)\}$، حيث $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. وهذا يعني أن $D \subset (-n_k, n_k)$ وبالتالي D محدودة. $\square$

المبرهنة الآتية تعطي الشرط الضروري والكافي للمجموعات المتراصة في $\mathbb{R}$.

مبرهنة 4.9: مبرهنة هايني بوريل

المجموعة D متراصة، إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

البرهان:

1. سبق أن أثبتنا أنه إذا كانت D متراصة فإنها محدودة. لإثبات أن D مغلقة، نثبت أن D^c مفتوحة. لنأخذ $x \in D^c$، ولنعرف

$$G_n = \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right) \bigcup \left(x + \frac{1}{n}, \infty\right)$$

نلاحظ أن

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R} \backslash \{x\}$$

إذا $D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. وبما أن D متراصة، فإنه يوجد غطاء منته يحوي D. إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$D \subset \left(-\infty, x - \frac{1}{N}\right) \bigcup \left(x + \frac{1}{N}, \infty\right)$$

إذا

$$x \in \left(x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}\right) \subset D^c$$

وهذا يعني أن D^c مجموعة مفتوحة.

2. لتكن D مغلقة ومحدودة، إذا $D \subset I_0 = [a_0, b_0]$. والبرهان مشابه للمبرهنة السابقة مع اعتبار $D \cap I_n$ بدلا من I_n.

□

مبرهنة 4.10

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ ، فإن التقارير التالية متكافئة:

1. المجموعة D متراصة.
2. المجموعة D مغلقة ومحدودة.
3. لكل متتالية عناصرها في D، يوجد متتالية جزئية متقاربة نهايتها في D.

البرهان: من مبرهنة هايني بوريل نحصل على تكافؤ (1) و (2). إذا يكفي إثبات تكافؤ (2) و (3).

- $(2) \Rightarrow (3)$ إذا كانت D مغلقة ومحدودة، و (x_n) متتالية في D، فإن (x_n) محدودة. ومن مبرهنة بولزانو-فايرشتراس، فإنها تحتوي على متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة إلى x، وبما أن D مغلفة، إذن $x \in D$.

- $(3) \Rightarrow (2)$ الآن لنفرض أن كل متتالية عناصرها في D، لها متتالية جزئية متقاربة نهايتها في D. لنفرض أن D غير محدودة، إذا يوجد متتالية $(x_n) \subset D$ بحيث

$$|x_n| > n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

وهذه المتتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة، وهذا تناقض، إذا D محدودة.
من جهة أخرى لنفرض أن (x_n) متتالية في D بحيث $x_n \to x$. ومن الشرط (3)، فإن لها متتالية جزئية (x_{n_k}) نهايتها في D. وبما أن (x_{n_k}) متتالية جزئية من (x_n)، إذا فهي متقاربة من x، وبالتالي $x \in D$. إذا D مغلقة.

□

تمارين 4.3

1. عرف غطاء مفتوحا للفترة $[0,1)$ بحيث لا يشمل غطاء جزئيا منتهيا.

2. أوجد غطاء مفتوحا للمجموعة $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ بحيث لا يحتوي غطاء جزئيا منتهيا.

3. إذا كانت K, F مجموعتين متراصتين، فأثبت أن $K \cap F$ و $K \cup F$ متراصة.

4. إذا كانت K_n مجموعة متراصة لكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ متراصة، بينما $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ليست بالضرورة متراصة.

5. إذا كانت K متراصة، فأثبت أن $\sup K, \inf K \in K$.

6. ⋆ أثبت باستخدام التعريف أن المجموعة $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{0\}$ متراصة.

الباب الخامس

نهايات الدوال

تعد النهايات من المفاهيم الأساسية في التحليل حيث تعتمد عليها مفاهيم الاتصال والتفاضل والتكامل. وقد سبق أن تعرضنا لمفهوم النهايات عند دراسة تقارب المتتاليات. في هذا الفصل ندرس النهايات على الدوال، والتي قد سبق للقارئ التعرف عليها، ولكننا نناقشها بشكل أكثر صرامة رياضية، ونوضح العلاقة بين وجود النهاية لدالة ووجود النهاية في المتتاليات.
يعود مفهوم النهايات إلى نهايات القرن السابع عشر على يد نيوتن وليبنز. حيث تم اختراع علم التفاضل والتكامل عن طريقهما. في ذلك الوقت لم تعرف النهاية بشكل دقيق، ويعود التعريف الدقيق للنهاية لكوشي في بدايات القرن التاسع عشر.

5.1 نهاية الدالة

نقول إن للدالة f نهاية L عند c، إذا كانت قيم $f(x)$ قريبة من L عندما تكون x قريبة من c. ويبقى أن نعرف بشكل دقيق ماذا نقصد بقريب من. في النهايات نهتم بالقيم القريبة من النقطة ولا يهمنا قيمة الدالة عند النقطة سواء كانت موجودة أولا. وهذا يعني أنه لا يلزم أن تكون الدالة معرفة عند c ولكن لا بد أن تكون معرفة عند مجموعة من النقاط القريبة من c، وهذا يعني أن c لا بد أن تكون نقطة تراكم. وفيما يلي نعطي تعريفا دقيقا لمفهوم النهاية.

تعريف 5.1:

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و c نقطة تراكم للمجموعة D $(c \in \widehat{D})$. نقول إن L نهاية للدالة f عند c، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

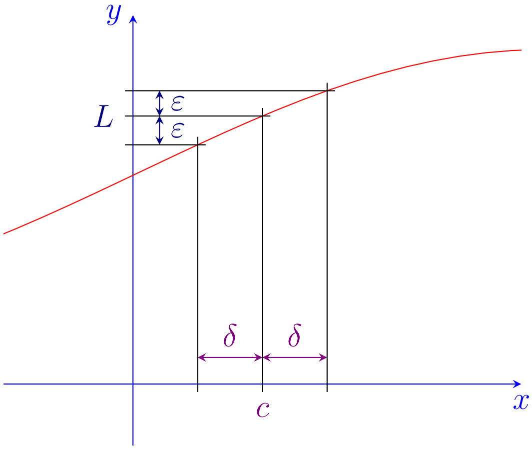
ونكتب

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

أو

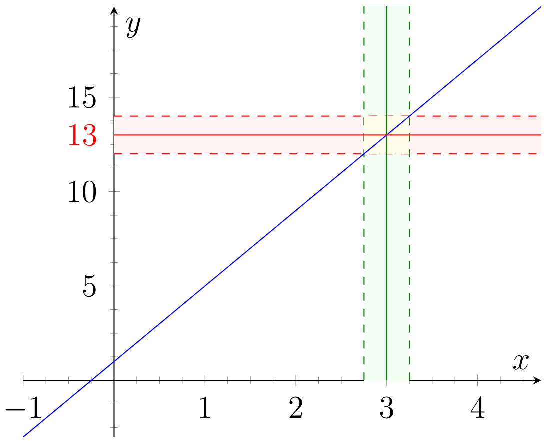
$$x \longrightarrow c \quad \text{عندما} \quad f(x) \longrightarrow L$$

في التعريف السابق الشرط $0 < |x - c| < \delta$ يعني أن $x \neq c$ و $|x - c| < \delta$، ولذا فإننا لا نهتم في النهايات بقيمة الدالة عند c، بل إن الدالة قد لا تكون معرفة عند c.



فيما يلي نقدم عددا من الأمثلة نوضح فيها كيف يمكن استخدام التعريف لإثبات وجود النهاية.

مثال 5.1.
أثبت باستخدام التعريف أن $\lim\limits_{x\to 3} 4x+1=13$.



الحل
ليكن $\varepsilon>0$ معطى، والمطلوب أن نجد $\delta>0$ تحقق

$$0<|x-3|<\delta \quad \Longrightarrow |(4x+1)-13|<\varepsilon$$

الآن نبدأ بالمطلوب $|(4x+1)-13|<\varepsilon$ لإيجاد قيمة δ.

$$\begin{aligned}|(4x+1)-13|<\varepsilon \quad &\Rightarrow \quad |4x-12|=4|x-3|<\varepsilon\\ &\Rightarrow \quad |x-3|<\underbrace{\varepsilon/4}_{=\delta}\end{aligned}$$

نختار $\delta=\varepsilon/4$.

ملاحظات

1. إذا كانت $\delta > 0$ تحقق المطلوب لجعل $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، فإن كل $\delta' \in (0, \delta)$ تضمن تحقق ذلك.
2. لإثبات أن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، يكفي إثبات أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D\ 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < a\varepsilon$$

حيث $a > 0$ لا يعتمد على x ولا ε.
يمكن برهان ذلك كما يلي: إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نختار $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{a} > 0$، وبالتالي يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D\ 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < a\varepsilon_1 = \varepsilon$$

مثال 5.2.
إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$$

فأثبت باستخدام التعريف أن $\lim_{x\to 3} f(x) = 9$.

الحل
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، والمطلوب أن نجد $\delta > 0$ تحقق

$$0 < |x - 3| < \delta \quad \Longrightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$$

الآن نبدأ بالمطلوب $|x^2 - 9| < \varepsilon$ لإيجاد قيمة δ.

$$|x^2 - 9| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x - 3||x + 3| < \varepsilon$$

إذا يجب أن نوجد حدا علويا للمقدار $|x + 3|$. لنفرض أن

$$|x - 3| < 1$$

إذا

$$\begin{aligned} |x - 3| < 1 \quad &\Rightarrow \quad -1 < x - 3 < 1 \\ &\Rightarrow \quad 2 < x < 4 \\ &\Rightarrow \quad 5 < x + 3 < 7 \\ &\Rightarrow \quad |x + 3| < 7 \end{aligned}$$

ونحصل على

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad |x - 3||x + 3| < 7|x - 3| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |x - 3| < \varepsilon/7 \end{aligned}$$

نختار $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$.

مثال 5.3.
أثبت باستخدام التعريف أن $\lim\limits_{x\to c}\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$ حيث $c>0$.

الحل
ليكن $x>0$ و $\varepsilon>0$ معطى، والمطلوب أن نجد $\delta>0$ تحقق

$$0<|x-c|<\delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|<\varepsilon$$

الآن نبدأ بالمطلوب ثم نوجد قيمة δ.

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \frac{|x-c|}{cx}<\varepsilon$$

إذا يجب أن نوجد حدا علويا للمقدار $\frac{1}{cx}$. بما أن $x>0$ ولنفرض أن

$$|x-c|<\frac{c}{2}$$

إذا

$$\begin{aligned}
|x-c|<\frac{c}{2} \quad&\Rightarrow\quad \frac{-c}{2}<x-c<\frac{c}{2}\\
&\Rightarrow\quad \frac{c}{2}<x<\frac{3c}{2}\\
&\Rightarrow\quad \frac{2}{c}>\frac{1}{x}>\frac{2}{3c}\\
&\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{2}{c^2}>\frac{1}{cx}}>\frac{2}{3c^2}
\end{aligned}$$

ونحصل على

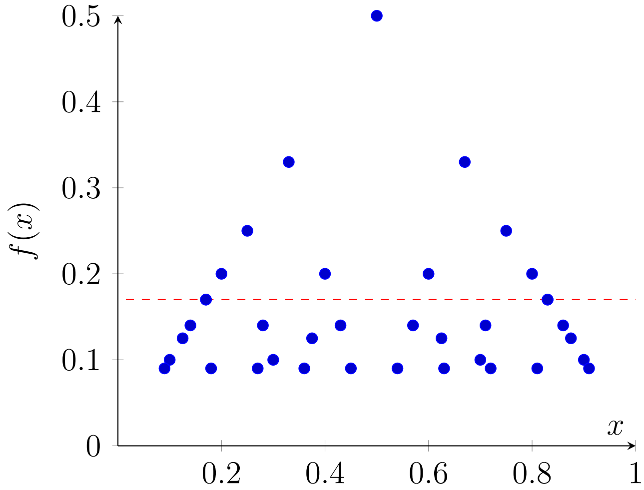
$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|<\varepsilon \quad&\Rightarrow\quad \frac{|x-c|}{cx}<\frac{2\,|x-c|}{c^2}<\varepsilon\\
&\Rightarrow\quad |x-c|<\frac{c^2}{2}\varepsilon
\end{aligned}$$

نختار $\delta=\min\{\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}c^2\varepsilon\}$.

مثال 5.4.
إذا كانت $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}^c\\ \dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q},(p,q)=1\end{cases}$$

حيث $(p,q)=1$ تعني أن القاسم المشترك الأكبر للعددين p و q هو 1، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ لكل $c\in(0,1)$.



الحل

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\varepsilon < \frac{1}{N}$. لاحظ أن النقاط الموجودة فوق الخط المستقيم $y = \frac{1}{N}$ عددها محدود وهي

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N-1}\right\}$$

وهي صور للأعداد

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1} \dots, \frac{N-2}{N-1}\right\}$$

نعرف المجموعة A بأنها جميع هذه الأعداد، باستثناء c، أي

$$A := \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1} \dots, \frac{N-2}{N-1}\right\} \setminus \{c\}$$

نعرف

$$\delta := \min\{|a-c| : a \in A\}$$

وبما أن A منتهية، إذا $\delta > 0$. كما أن

$$|a-c| \geq \delta \qquad \forall\, a \in A$$

إذا كانت $x \in (0,1)$ و $0 < |x-c| < \delta$، فإن لدينا حالتين

1. إذا كانت $x \notin \mathbb{Q}$، فإن

$$|f(x) - 0| = |0-0| < \varepsilon$$

2. إذا كانت $x \in \mathbb{Q}$، فإن $x \notin A$، كما أن $x = p/q$ و $q \geq N$. ونحصل على

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

إذا

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

تمرين 5.5.
أثبت باستخدام التعريف أن $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4}{x^2+1}=\dfrac{4}{5}$

فكرة الحل
بفرض $|x-2|<1$ نحصل على

$$\left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|\leq\frac{15}{2}|x-2|$$

ونختار $\delta=\min\{1,\frac{2}{15}\varepsilon\}$.

تمرين 5.6.
أثبت باستخدام التعريف أن $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

ملاحظات

1. باستخدام لغة الجوارات ، $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ تعني أنه لكل جوار V للنقطة L يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x\in U\cap(D\setminus\{c\})\Longrightarrow f(x)\in V$$

2. إذا كانت c نقطة تراكم للمجموعة D، فإن L ليست نهاية للدالة f عند c، أي

$$\lim_{x\to c}f(x)\neq L$$

إذا وُجد $\varepsilon>0$، بحيث لكل $\delta>0$، يوجد $x\in D$ و $0<|x-c|<\delta$، ولكن

$$|f(x)-L|\geq\varepsilon$$

تمارين 5.1

1. باستخدام التعريف أثبت ما يلي:

(ا) $\star$ $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

(ب) $\lim\limits_{x\to 2}x^2+2x-3=5$

(ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sin^2 x}=0$

(د) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{2-x^2}=2$

(هـ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=12$

(و) $\star$ $\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$

2. أثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\neq L$ لأي عدد حقيقي L.

3. أعط مثالا لدالة f تحقق
$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon$$
ولكن لا تحقق
$$0 < |x-a| < \delta/2 \implies |f(x)-L| < \varepsilon/2$$

4. أوجد مثالا يوضح أن التعريف الآتي للنهاية $\lim_{x\to c} f(x) = L$ غير صحيح
$$\forall \delta > 0 \ \ \exists\, \varepsilon > 0 : \quad x \in D, \\ 0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

5. لتكن A_n مجموعة منتهية من الأعداد في الفترة $[0,1]$ بحيث لا يوجد عناصر مشتركة في A_n و A_m إذا كانت $m \neq n$. ولنعرف
$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x \in A_n \\ 0 & x \notin \cup_{n=1}^{\infty} A_n \end{cases}$$
أثبت أنه لكل $c \in [0,1]$، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

6. إذا كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، وكان $\lim_{x\to 0} f(x) = L$، وكان $a > 0$، فأثبت أن $\lim_{x\to 0} f(ax) = L$.

7. ⋆ إذا كانت $f : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ إذا كانت $\lim_{x\to c}[f(x)]^2 = 0$، فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. ماذا لو كانت $\lim_{x\to c}[f(x)]^2 = L^2 \neq 0$

5.2 المتتاليات ونهاية الدالة

مبرهنة 5.1

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in \widehat{D}$، فإن التقريرين التاليين متكافآن

1. $\lim_{x\to c} f(x) = L$

2. لكل متتالية $(x_n) \subset D$ تحقق $x_n \neq c$ و $x_n \to c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها L.

البرهان:

1. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ و (x_n) تحقق الشروط في (2)، وكان $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $\delta > 0$ بحيث
$$x \in D,\ 0 < |x-c| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon$$
وبما أن $x_n \to c$، فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث
$$0 < |x_n - c| < \delta \qquad \forall\, n \geq N$$
إذا
$$|f(x_n) - L| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$
وهذا يعني أن $f(x_n) \to L$.

2. نثبت باستخدام البرهان عكس المباشر. نفرض أن $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$، ونبين وجود متتالية تحقق الشروط في (2) ولكن $f(x_n) \not\longrightarrow L$. بما أن $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$، إذا يوجد $\varepsilon > 0$، بحيث لكل $\delta > 0$، يوجد $x \in D$ تحقق

$$0 < |x-c| < \delta, \qquad |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

نختار $\delta = \dfrac{1}{n}$، وبالتالي يوجد $x_n \in D$ تحقق

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon$$

وهذا يعني أن $x_n \to c$، ولكن $f(x_n) \not\longrightarrow L$.

□

مثال 5.7.
لاحظ أن $\lim_{x\to 0} x^2+2 = 2$. ولنأخذ المتتالية $(x_n) = (1/n)$. $0 \neq x_n \longrightarrow 0$، وبالتالي $x_n^2+2 = (1/n)^2+2 \longrightarrow 2$.

نتيجة 5.1

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in \widehat{D}$. ولنعرف $S := \{(x_n) \subset D : x_n \neq c, x_n \to c\}$

1. إذا وجدت متتالية (x_n) في S بحيث $(f(x_n))$ غير متقاربة ، فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة.
2. إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (y_n) في S بحيث $\lim_{x\to c} f(x_n) \neq \lim_{x\to c} f(y_n)$ ، فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة.

مثال 5.8.
الدالة $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ليس لها نهاية عند 0.
حتى نثبت ذلك نختار المتتالية $x_n = 1/n$، ونلاحظ أن $0 \neq x_n \to 0$. ولكن $f(x_n) = n^2$ ليست متقاربة، إذا $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة.

مثال 5.9.
الدالة $\text{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ليس لها نهاية عند 0.
حتى نثبت ذلك نختار المتتاليتين $x_n = 1/n$ و $y_n = -1/n$، ونلاحظ أن

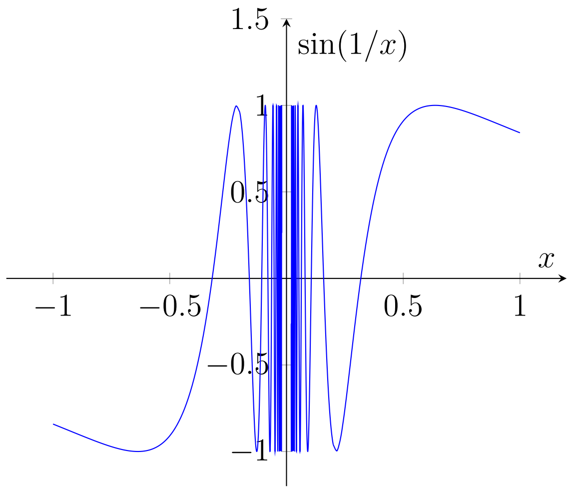
$$0 \neq x_n \longrightarrow 0$$
$$0 \neq y_n \longrightarrow 0$$

ولكن

$$\text{sgn}(x_n) = 1 \longrightarrow 1$$
$$\text{sgn}(y_n) = -1 \longrightarrow -1$$

إذا $\lim_{x\to 0} \text{sgn}(x)$ غير موجودة.

مثال 5.10.
الدالة $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عند 0.



حتى نثبت ذلك نختار المتتاليتين

$$x_n=\frac{1}{n\pi}\qquad y_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$$

ونلاحظ أن

$$0\neq x_n\longrightarrow 0\qquad 0\neq y_n\longrightarrow 0$$

ولكن

$$f(x_n)=\sin(n\pi)=0\longrightarrow 0\qquad f(y_n)=\sin(2n\pi+\pi/2)=1\longrightarrow 1$$

إذا $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ غير موجودة.

مثال 5.11.
الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

ليس لها نهاية عند أي عدد $c\in\mathbb{R}$.
من كثافة $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ في $\mathbb{R}$، فإننا نستطيع اختيار متتاليتن $x_n\in\mathbb{Q}$ و $y_n=\in\mathbb{Q}^c$ بحيث

$$c\neq x_n\longrightarrow c\qquad c\neq y_n\longrightarrow c$$

ونحصل على

$$f(x_n)=1\longrightarrow 1\qquad f(y_n)=0\longrightarrow 0$$

إذا $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ غير موجودة.

في المبرهنة الآتية، نشترط أن جميع المتتاليات $(f(x_n))$ متقاربة فقط دون اشتراط أن تكون النهاية متساوية لجميع المتتاليات.

مبرهنة 5.2

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in \widehat{D}$. فإن التقريرين التاليين متكافآن

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة.
2. لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة.

البرهان:

1. لتكن $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، فإننا نحصل من المبرهنة السابقة على (2).
2. بما أن c نقطة تراكم للمجموعة D، إذا يوجد متتالية (x_n) في D بحيث $c \neq x_n \longrightarrow c$، وبالتالي $f(x_n) \longrightarrow L$.
يكفي إثبات أنه لأي متتالية (y_n) في D تحقق $c \neq y_n \longrightarrow c$، فإن $f(y_n) \longrightarrow L$.
لنفرض أن $f(y_n) \longrightarrow M$، ونختار المتتالية

$$(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$$

من الواضح أن $c \neq z_n \longrightarrow c$، وبالتالي $(f(z_n))$ متقاربة. ولكن $f(z_{2n-1}) \longrightarrow L$ و $f(z_{2n}) \longrightarrow M$، إذا $M = L$.

□

تمارين 5.2

1. أثبت أن النهايات الآتية غير موجودة
   (ا) ⋆ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   (ب) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\log x}$
   (ج) $\lim\limits_{x\to 2} \cos \dfrac{1}{x-2}$
   (د) ⋆ $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{2x}$
   (ه) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$
2. باستخدام المتتاليات، أثبت أن $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3}{x+4} = \dfrac{1}{6}$
3. ⋆ إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$. متى يكون العكس صحيحا؟
4. إذا كانت $x_n = 2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}$، و $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x$، فما نهاية المتتالية $(f(x_n))$؟

5. إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & x\in\mathbb{Q}^c \\ 6-x & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

فأثبت أن $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ موجودة، ولكن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة لكل $c\neq 4$.

6. إذا كانت $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$، دالة محدودة، وكانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة، فأثبت أنه يوجد متتاليتان (x_n) و (y_n) في D بحيث $x_n\neq c$ و $y_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=c$ ولكن $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

5.3 المبرهنات الأساسية

في هذا الفصل نعطي عددا من المبرهنات التي تفيد في حساب النهايات دون الحاجة لاستخدام التعريف. وهذه المبرهنات مشابهة للمبرهنات
التي أوردناها في المتتاليات، كما أن جميع هذه النظريات يمكن إثباتها باستخدام المتتاليات، ولكننا سنقوم ببرهنتها باستخدام تعريف النهاية.

مبرهنة 5.3

لتكن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ، و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة فهي وحيدة.

البرهان لنفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to c} f(x)=M$، وليكن $\varepsilon>0$ معطى، إذا يوجد $\delta_1,\delta_2>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta_1 \implies |f(x)-L|<\varepsilon/2$$

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta_2 \implies |f(x)-M|<\varepsilon/2$$

إذا كانت $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$، وكانت $x\in D, 0<|x-c|<\delta$، فإن

$$|L-M|=|L-f(x)+f(x)-M|\le|f(x)-L|+|f(x)-M|<\varepsilon$$

إذا $L=M$. □

مبرهنة 5.4

لتكن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ، $c\in\widehat{D}$. إذا كان للدالة f نهاية عند c فإن f محدودة في جوار c. أي يوجد جوار-δ $U_\delta(c)$ للنقطة c و $M>0$ بحيث

$$|f(x)|\le M \qquad \forall x\in U_\delta(c)\cap D$$

البرهان لنفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$، وليكن $\varepsilon=1$، إذا يوجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \implies |f(x)-L|<1$$

إذا كانت $x \in U_\delta(c) \cap D\backslash\{c\}$، فإن

$$|f(x)| - |L| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| < |L| + 1$$

إذا كانت $c \notin D$، نأخذ $M := |L| + 1$، أما إذا كانت $c \in D$، فإننا نأخذ $M := \max\{|f(c)|, |L| + 1\}$ □

مبرهنة 5.5

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = L$ حيث $L \neq 0$ ، فإنه يوجد جوار $U_\delta(c)$ للنقطة c و $M > 0$ بحيث

$$|f(x)| > M \qquad \forall x \in U_\delta(c) \cap D\backslash\{c\}$$

البرهان: ليكن $\varepsilon = |L|/2$، إذا يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < |L|/2$$

إذا كانت $x \in U_\delta(c) \cap D\backslash\{c\}$، فإن

$$\begin{aligned} ||f(x)| - |L|| < |L|/2 \quad &\Longrightarrow \quad |L| - |L|/2 < |f(x)| < |L| + |L|/2 \\ &\Longrightarrow \quad |L|/2 < |f(x)| < 3|L|/2 \end{aligned}$$

نأخذ $M = |L|/2$. □

مبرهنة 5.6

لتكن $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، $\lim_{x \to c} g(x) = K$ ، فإن

1. $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = L + K$
2. $\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = LK$ ، كما أن
   - $\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] = L - K$
   - $\lim_{x \to c} rf(x) = rL, \quad \forall r \in \mathbb{R}$
3. إذا كان $K \neq 0$ ، فإن $g(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ في جوار ما للنقطة c ، كما أن $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$

البرهان:
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $\delta_1, \delta_2 > 0$ بحيث

$$\begin{aligned} x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta_1 &\implies |f(x) - L| < \varepsilon \\ x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta_2 &\implies |g(x) - K| < \varepsilon \end{aligned}$$

1. إذا كان $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$، وكان $x \in D, 0 < |x - c| < \delta$، فإن

$$|[f(x) + g(x)] - [L + K]| \leq |f(x) - L| + |g(x) - K| < 2\varepsilon$$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to c}[f(x) + g(x)] = L + K$

2.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LK| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LK| \\ &\leq |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - K| \end{aligned}$$

وبما أن الدالة g لها نهاية عند c، إذا يوجد $M > 0, \delta_3 > 0$ بحيث $|g(x)| < M$، لكل $x \in D$ و $0 < |x - c| < \delta_3$.
الآن إذا عرفنا $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$، وكان $x \in D, 0 < |x - c| < \delta$، فإن

$$|g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - K| \leq M\varepsilon + |L|\varepsilon = (M + |L|)\varepsilon$$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = LK$

3.

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{K}\right| &= \frac{|Kf(x) - Lg(x)|}{|g(x)||K|} \\ &= \frac{|Kf(x) - LK + LK - Lg(x)|}{|g(x)||K|} \\ &\leq \frac{|K||f(x) - L| + |L||K - g(x)|}{|g(x)||K|} \end{aligned}$$

وبما أن الدالة g لها نهاية عند c، إذا يوجد $M > 0$ و $\delta_3 > 0$ بحيث $|g(x)| > M$، لكل $x \in D$ و $0 < |x - c| < \delta_3$.
الآن إذا عرفنا $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$، وكان $x \in D, 0 < |x - c| < \delta$، فإن

$$\frac{|K||f(x) - L| + |L||K - g(x)|}{|g(x)||K|} < \frac{|K| + |L|}{M|K|} \varepsilon$$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$

□

مبرهنة 5.7

لتكن $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كان لكل من f, g نهاية عند c ، وكان

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in U_\delta(c) \cap D \backslash \{c\}$$

فإن

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

البرهان: لتكن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، $\lim_{x\to c} g(x) = K$، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $\delta_1, \delta_2 > 0$ بحيث

$$\begin{aligned} x \in D,\ 0 < |x-c| < \delta_1 &\implies |f(x) - L| < \varepsilon \\ &\implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \\ x \in D,\ 0 < |x-c| < \delta_2 &\implies |g(x) - K| < \varepsilon \\ &\implies K - \varepsilon < g(x) < K + \varepsilon \end{aligned}$$

إذا كان $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$، وكان $x \in D$ و $0 < |x-c| < \delta$، فإن

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < f(x) \le g(x) < K + \varepsilon \\ L < K + 2\varepsilon \\ L \le K \end{aligned}$$

□

مبرهنة 5.8: مبرهنة الحصر

لتكن $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كان هناك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad \forall x \in U \cap D \backslash \{c\}$$

وكان $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ ، فإن $\lim_{x\to c} g(x) = L$

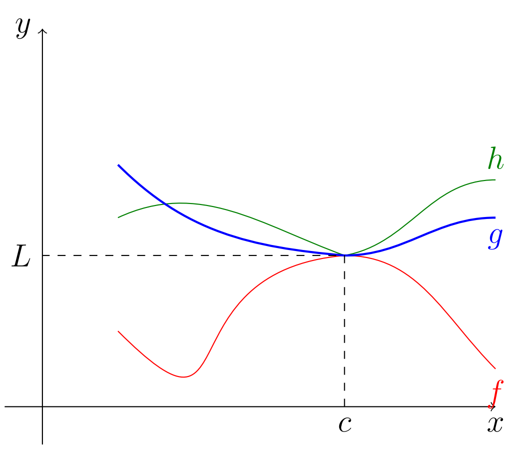
البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $\delta_1, \delta_2 > 0$ بحيث

$$\begin{aligned} x \in D,\ 0 < |x-c| < \delta_1 &\implies |f(x) - L| < \varepsilon \\ &\implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \\ x \in D,\ 0 < |x-c| < \delta_2 &\implies |h(x) - L| < \varepsilon \\ &\implies L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

ليكن $U_{\delta_3}(c) \subset U$. إذا كان $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$، وكان $x \in D$ و $0 < |x-c| < \delta$، فإن

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon \\ |g(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

إذا $\lim_{x\to c} g(x) = L$. □



مثال 5.12.

1. إذا كانت f كثيرة حدود، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ لكل $c \in \mathbb{R}$
إذا كانت

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

فإن

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= \lim_{x\to c} a_n x^n + \ldots + \lim_{x\to c} a_1 x + \lim_{x\to c} a_0 \\ &= a_n c^n + \ldots + a_1 c + a_0 \end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2}{x+1} = \dfrac{3}{2}$، وذلك بتطبيق المبرهنة مباشرة.

3. لإيجاد النهاية $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$، نلاحظ أننا لا نستطيع تطبيق المبرهنة لأن $\lim_{x\to 3} x^2 - 9 = 0$. ولكن بما أن $x \neq 3$، إذا

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

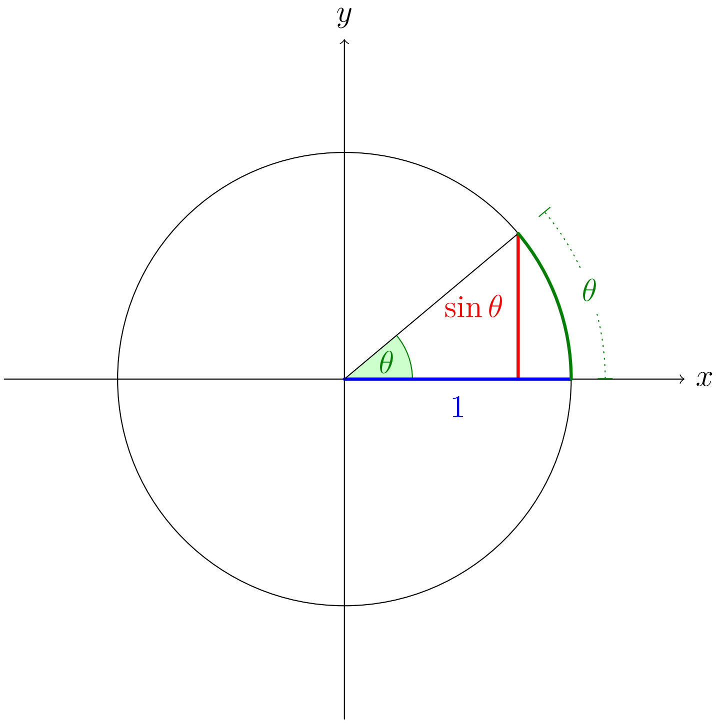
4. $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$
إذا كانت $0 < \theta \le \pi/2$، فإنه واضح من الشكل أن

$$\text{طول القوس } \theta < \text{ارتفاع المثلث } \sin\theta$$

وبالتالي

$$0 < \sin\theta < \theta$$

وبما أن $\theta \to 0$، إذا $\sin\theta \to 0$.
وبالمثل إذا كانت $-\pi/2 \le \theta < 0$، وحيث إن $\sin$ دالة فردية، إذا $0 < \sin\theta \le \theta$، وبالتالي $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.



5. إذا كانت $f : D \to \mathbb{R}$ و $f(x) \geq 0$ لكل $x \in D$، وكانت $c \in \widehat{D}$ و $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، فأثبت أن

$$\lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

يمكن إثبات ذلك باستخدام تعريف النهاية، ولكننا سنثبته باستخدام المتتاليات.
لكل متتالية $(x_n) \subset D$ تحقق $x_n \neq c$ و $x_n \to c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها L. وبالتالي فإن المتتالية $(\sqrt{f(x_n)})$ متقاربة إلى $\sqrt{L}$. إذا $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

6. $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$
إذا كانت $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$، فإن $\cos\theta \geq 0$، كما أن

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

وبما أن $1-\sin^2\theta \to 1$، إذا $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$.

7. $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\cos\theta = \cos\theta_0 \qquad \lim\limits_{\theta\to\theta_0}\sin\theta = \sin\theta_0,$
يمكن أن نرى ذلك بالنسبة للدالة sin كما يلي

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin(\theta_0+(\theta-\theta_0))\\ &= \sin\theta_0\cos(\theta-\theta_0)+\cos\theta_0\sin(\theta-\theta_0)\\ &\longrightarrow \sin\theta_0\cdot 1+\cos\theta_0\cdot 0 = \sin\theta_0\end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات النهاية الثانية.

8. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$
إذا كانت $0 < \theta \leq \pi/2$، فإنه واضح من الشكل أن

مساحة المثلث الكبير > مساحة القطاع الدائري > مساحة المثلث الصغير

$$\frac{1\cdot\sin\theta}{2} < \frac{1^2\cdot\theta}{2} < \frac{1\cdot\tan\theta}{2}$$

وبالضرب في $2/\sin\theta$، نحصل على

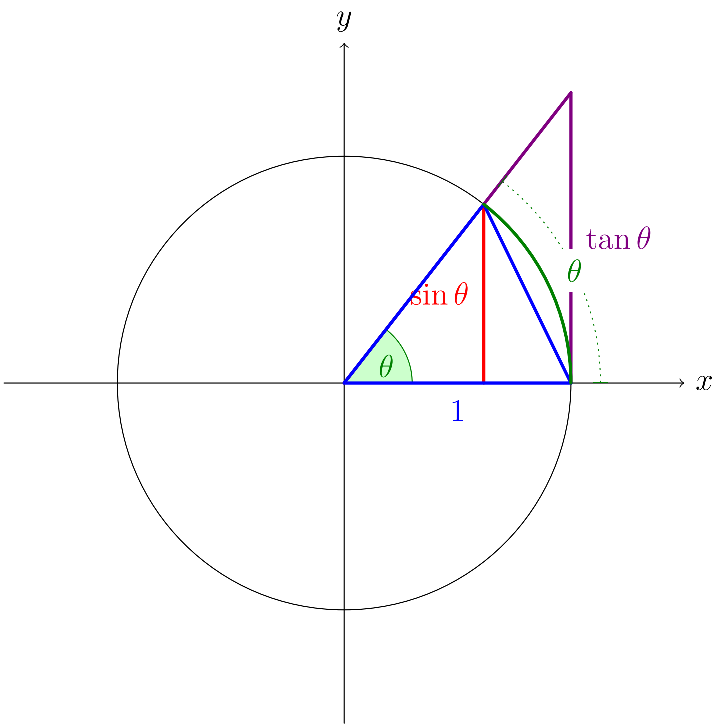
$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

وبما أن $0 \to \theta$، إذا $1 \to \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

وبالمثل إذا كانت $-\pi/2 \le \theta \le 0$، وحيث إن sin دالة فردية، فإن

$$1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$$

إذا $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.



9. $\lim_{x\to 0} x^{3/2}, (x>0)$

إذا كان $0 < x < 1$، فإن

$$x < x^{1/2} < 1$$

$$x^2 < x^{3/2} < x$$

ومن نظرية الحصر، وحيث $\lim_{x\to 0} x = 0$ و $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$، إذا $\lim_{x\to 0} x^{3/2} = 0$.

10. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$
إذا كان $x \neq 0$، فإن

$$0 \leq \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$0 \leq \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

ومن نظرية الحصر، وحيث $\lim_{x\to 0} x = 0$ ، فإن $\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$، وبالتالي $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

5.3 تمارين

1. (ا) ⋆ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة، فهل ممكن أن تكون النهاية $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ موجودة؟ ماذا عن $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$؟
(ب) ⋆ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة و $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ غير موجودة فهل يمكن أن تكون $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودة؟

2. إذا كانت $\lim_{x\to 0} f(x)/x = L$ و $b \neq 0$، فأثبت أن $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bL$.

3. أوجد قيم النهايات الآتية إن وجدت

(ا) ⋆ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}$

(ب) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

(ج) $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$

(د) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{x^2-3x}$

(ه) ⋆ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(3+\sin x)}{(x+\sin x)^2}$

(و) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

4. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ موجودة، فهل نضمن وجود النهاية $\lim_{x\to c} g(x)$؟

5. ⋆ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ و g محدودة في جوار ما للنقطة c، فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

6. إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تحقق $f(x+y)=f(x)+f(y)$، وكان $\lim_{x\to 0} f(x) = L$، فأثبت أن $L=0$، ثم أثبت أن f لها نهاية عند كل عدد $c\in\mathbb{R}$. (إرشاد: لاحظ أن $f(2x)=2f(x)$، كما أن $f(x)=f(x-c)+f(c)$.)

7. إذا كانت

$$4x-9 \leq f(x) \leq x^2-4x+7 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

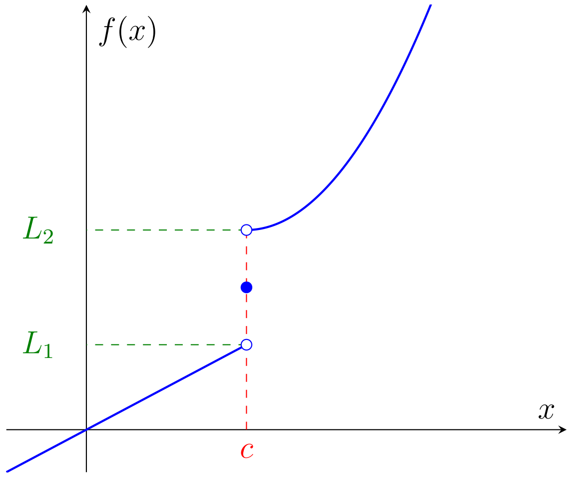
أوجد جميع القيم c التي نضمن وجود النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$.

5.4 امتداد تعريف النهايات

في هذا الفصل نقدم امتدادا لتعريف النهايات، وذلك من خلال تعريف ثلاثة أنواع خاصة من النهايات.

النهايات من اتجاه واحد (One-Sided Limits)

في بعض الأحيان تكون النهاية غير موجودة عند نقطة c، ولكن لو قصرنا الدالة على يمين النقطة أو يسارها فقط فإن النهاية تكون موجودة. الدالة f في الشكل الآتي ليس لها نهاية عند c. ولكن لو قصرنا الدالة على الفترة (c,∞) أي $f|_{(c,\infty)}$، فإن النهاية موجودة، وتساوي L_2. وبالمثل لو قصرنا تعريف الدالة على $(-\infty,c)$، فإن النهاية موجودة وتساوي L_1.



فيما يلي نورد تعريفا للنهاية اليمنى والنهاية اليسرى، ثم نوضح علاقة هاتين النهايتين مع وجود النهاية للدالة.

تعريف 5.2:

1. لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن c نقطة تراكم للمجموعة $D \cap (c,\infty)$. فإن النهاية اليمنى للدالة f عند c تساوي L إذا كان

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad & x \in D, \\ & 0 < x - c < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

أي إن نهاية الدالة $f|_{D\cap(c,\infty)}$ عند c تساوي L، ونكتب

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

2. لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن c نقطة تراكم للمجموعة $D \cap (-\infty,c)$. فإن النهاية اليسرى للدالة f عند c تساوي K إذا كان

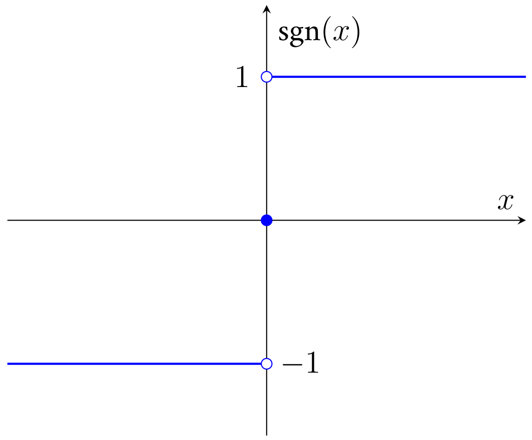
$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad & x \in D, \\ & 0 < c - x < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon \end{aligned}$$

أي إن نهاية الدالة $f|_{D\cap(-\infty,c)}$ عند c تساوي L، ونكتب

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = K$$

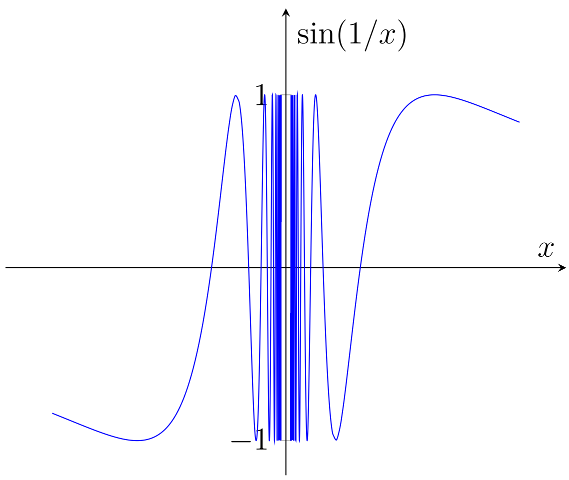
مثال 5.13. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$

سبق أن أثبتنا أن هذه النهاية غير موجودة، ، ولكن لو قصرنا المجال على $(0,\infty)$، فإن $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ ، كما أن $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$.



2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

سبق أن أثبتنا أن هذه النهاية الآتية غير موجودة. لكن لو قصرنا المجال على $(0,\infty)$، فإن النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ كذلك غير موجودة، وبالمثل فإن النهاية اليسرى غير موجودة.



مبرهنة 5.9

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$ فإن

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

البرهان:

1. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، و $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

وبالتالي، فإنه إذا كانت $x \in D$ و $0 < x - c < \delta$ أو $0 < c - x < \delta$، فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$. وهذا يعني أن $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$

2. إذا كانت $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$ ، و $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $\delta_1, \delta_2 > 0$ بحيث

$$x \in D,\ 0 < x - c < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$x \in D,\ 0 < c - x < \delta_2 \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

وباختيار $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ، فإن

$$x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

إذا $\lim_{x \to c} f(x) = L$

□

مثال 5.14.

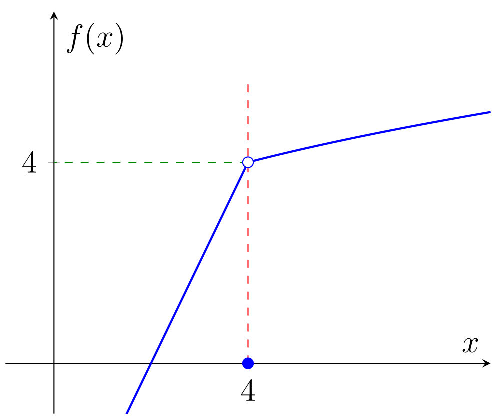
ما قيمة $\lim_{x \to 4} f(x)$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & x > 4 \\ 0 & x = 4 \\ 2x - 4 & x < 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4^+} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x} + 2 = 4$$

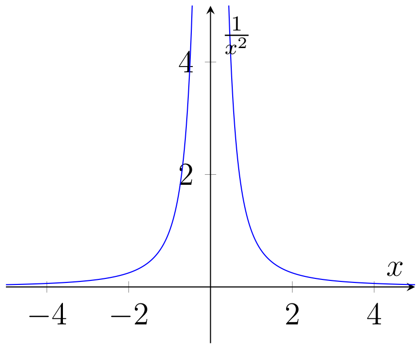
$$\lim_{x \to 4^-} 2x - 4 = 4$$

إذا $\lim_{x \to 4} f(x) = 4$



النهايات اللانهائية (Infinite Limits)

لاحظ أن الدالة $f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ غير محدودة في جوار 0. وبما أن الدالة تتزايد كلما اقتربنا من 0، فإن النهاية تساوي ∞، ونكتب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$. وفيما يلي نعطي تعريفا لنهاية الدالة غير المحدوة التي تحقق شروطا معينة.



تعريف 5.3:

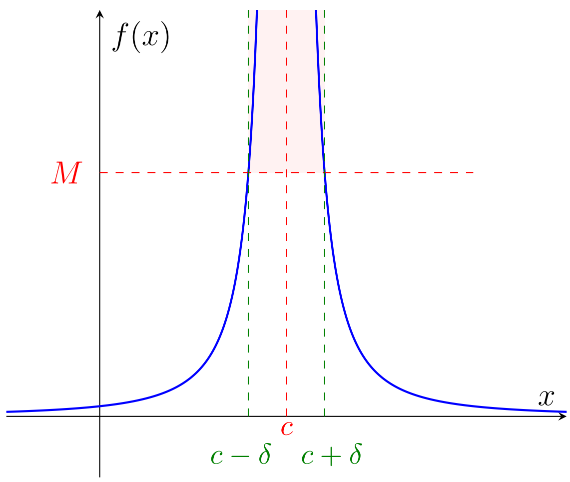
لتكن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$، نقول إن

1. $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$ إذا كان

$$\forall M\in\mathbb{R}\quad\exists\,\delta>0:\quad x\in D,\quad 0<|x-c|<\delta\quad\Rightarrow f(x)>M$$

2. $\lim\limits_{x\to c}f(x)=-\infty$ إذا كان

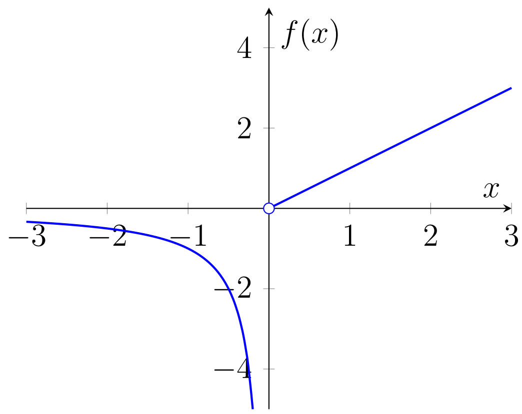
$$\forall M\in\mathbb{R}\quad\exists\,\delta>0:\quad x\in D,\quad 0<|x-c|<\delta\quad\Rightarrow f(x)<M$$



مثال 5.15. إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

فإن $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ، و $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ، وهذا يعني أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة.



النهايات عند مالانهاية (Limits at Infinity)

من المهم في الدوال معرفة تصرف الدالة عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$.

تعريف 5.4:

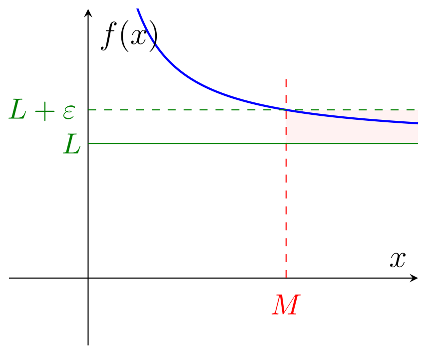
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

1. إذا كانت $(a, \infty) \subset D$ ، فإننا نقول إن $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, M \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} & x \in D, \\ & x > M \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

2. إذا كانت $(-\infty, b) \subset D$ ، فإننا نقول إن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, M \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} & x \in D, \\ & x < M \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$



مثال 5.16.
أثبت باستخدام التعريف

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

ليكن $M > 0$ معطى، بحيث $\frac{1}{x^2} > M$. إذا

$$x^2 < \frac{1}{M} \implies |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

نختار $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، بحيث $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$. إذا

$$x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \implies x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

نختار $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

5.4 تمارين

1. أوجد قيم النهايات الآتية

   (ا) ⋆ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+2x+1}{3x^3+x^2}$

   (ب) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

   (ج) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

   (د) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

   (هـ) ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   (و) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos\frac{1}{x}$

2. هل النهاية موجودة $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin^2 x$

3. ⋆ أثبت باستخدام التعريف $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

4. ⋆ إذا كانت $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

5. إذا كان $f(x) > a > 0$ و $g(x) > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$، وكان $\lim_{x\to c} g(x) = 0$، فأثبت أن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

6. إذا كانت $f(x) = f(x+2)$ لكل $x \in \mathbb{R}$، وكان $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. فأثبت أن f دالة ثابتة، ثم استنتج أن $\lim_{x\to\infty} \cos x$ غير موجودة.

7. إذا كانت $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ وكان $\lim_{x\to\infty} xf(x) = L$ ، فأثبت أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

8. إذا كانت $f, g : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ إذا كان هناك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall\ x \in D \cap U\setminus\{c\}$$

إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$، فأثبت أن $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.

9. إذا كانت $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ وكانت

$$g(x) > 0 \qquad \forall\ x \in (0,\infty)$$

وكانت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

فأثبت أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

10. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$ و $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$، فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$. ماذا لو كانت $L = 0$؟

الباب السادس

الاتصال

تعتبر الدوال المتصلة من أهم أنواع الدوال في التحليل الحقيقي. حيث تتميز بالعديد من الخصائص مثل خاصية القيمة البينية، وكذلك ضمان وجود القيم العظمى والصغرى في حال تحقق شروط معينة على المجال.

6.1 الدوال المتصلة

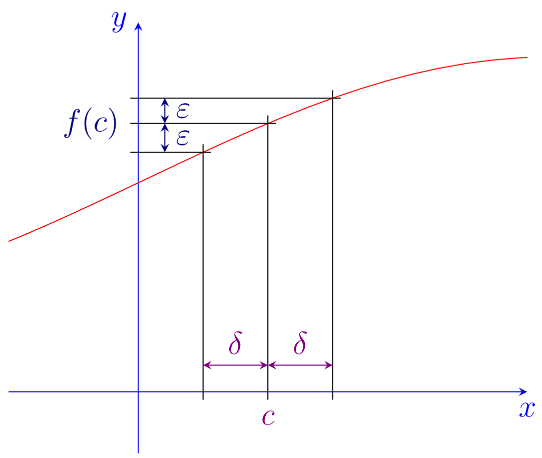
في هذا الفصل نهتم بالدوال المتصلة. ونلاحظ أن بحث الاتصال يكون عند نقطة موجودة في مجال الدالة، ولا يشترط أن تكون هذه النقطة نقطة تراكم. وسوف نورد عددا من الأمثلة والمبرهنات المشابهة لما ورد في باب النهايات. وفيما يلي نعطي تعريف الدالة المتصلة.

تعريف 6.1:

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$، و كانت $c \in D$. فإن الدالة f متصلة عند c إذا كان

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \\ x \in D,\ |x - c| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(x) - f(c)| < \varepsilon \end{array}$$

وتكون الدالة متصلة على D، إذا كانت متصلة عند كل $x \in D$.



ملاحظات

1. في الباب الخامس عرفنا نهاية الدالة f عند نقاط التراكم في $c \in \widehat{D}$ ولم نشترط أن تكون $c \in D$، بينما يُعرف الاتصال عند نقاط D حتى وإن كانت معزولة.

2. تكون الدالة متصلة عند $c \in D \cap \widehat{D}$ إذا وفقط إذا كان

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

3. إذا كانت $c \in D$ نقطة معزولة، فإن f متصلة عند c لأنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$(c-\delta, c+\delta) \cap D = \{c\}$$

وبالتالي، فإنه لأي $\varepsilon > 0$، فإن

$$|f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D$$

4. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنه لكل جوار V للنقطة $f(c)$ يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x \in U \cap D \Longrightarrow \quad f(x) \in V$$

مبرهنة 6.1

الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

البرهان:

1. لنفرض أن f متصلة، ولتكن V مجموعة مفتوحة، ونرغب في إثبات أن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة. لتكن $c \in f^{-1}(V)$ إذا $f(c) \in V$. بما أن V مفتوحة، إذا يوجد $\varepsilon > 0$، وجوار-ε، $V_\varepsilon(f(c))$ بحيث

$$V_\varepsilon(f(c)) \subset V$$

وبما أن f متصلة، إذا يوجد جوار-δ، $U_\delta(c)$ بحيث $f(U_\delta(c)) \subset V$، وهذا يعني أن $U_\delta(c) \subset f^{-1}(V)$ إذا $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة.

2. لنفرض أن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة. إذا كانت $c \in \mathbb{R}$، و $\varepsilon > 0$، ولنعتبر المجموعة المفتوحة $V_\varepsilon(f(c))$. إذا الصورة العكسية لها مفتوحة، وتحتوي c، وبالتالي يوجد مجموعة مفتوحة $U_\delta(c)$ حيث $\varepsilon > 0$ بحيث

$$U_\delta(c) \subset f^{-1}(V_\varepsilon(f(c)))$$

$$f(U_\delta(c)) \subset V_\varepsilon(f(c))$$

إذا f متصلة.

$\square$

نتيجة 6.1

الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة.

البرهان: البرهان ينتج مباشرة بملاحظة أن E مغلقة إذا وفقط إذا كانت E^c مفتوحة، كما أن

$$f^{-1}(E^c)=(f^{-1}(E))^c$$

□

فيما يلي نورد عددا من المبرهنات، وبرهانها مشابه لبراهين الباب الخامس، مع ملاحظة أن البرهان يتطلب بحث حالتين، الأولى عندما تكون النقطة معزولة، والثانية عندما تكون نقطة تراكم.

مبرهنة 6.2

تكون الدالة $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$. إذا وفقط إذا كان لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n\longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها $f(c)$.

نتيجة 6.2

تكون الدالة $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ غير متصلة عند $c\in D$. إذا وفقط إذا وجدت متتالية (x_n) في D تحقق $x_n\longrightarrow c$ ولكن صورتها $(f(x_n))$ غير متقاربة من $f(c)$.

مثال 6.1. 1. كثيرة الحدود دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

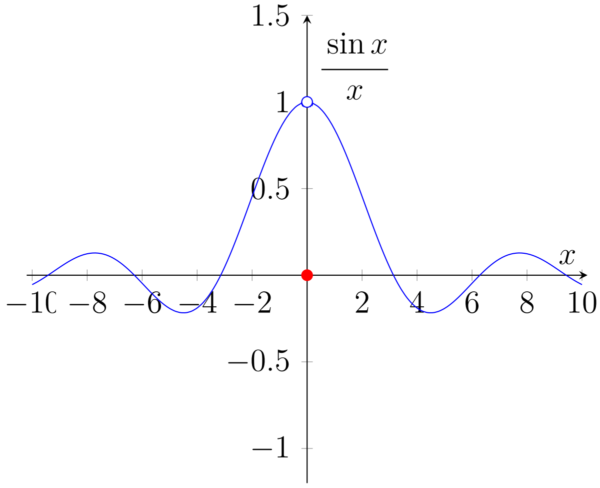
2. الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$، ولكنها غير متصلة عند 0 لأن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq f(0)$$

ولكن لو أعدنا تعريف الدالة عند 0 لتصبح $f(0)=1$، فإن الدالة متصلة على $\mathbb{R}$.



3. الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

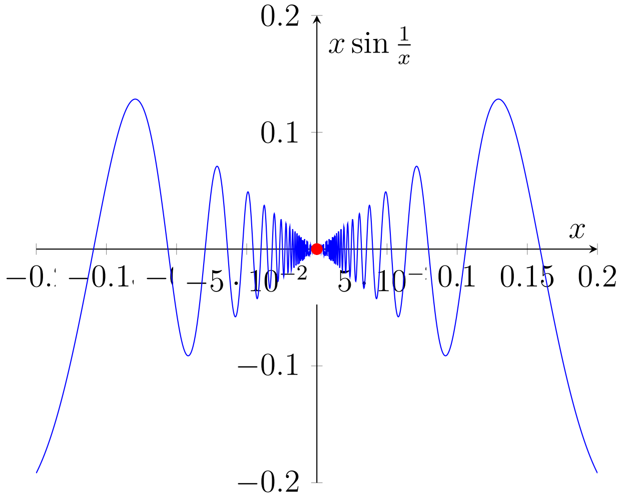
$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

غير متصلة عند أي $c\in\mathbb{R}$، لأن $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة لأي عدد $c\in\mathbb{R}$.

4. إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

متصلة على $\mathbb{R}$، لأن $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.



5. إذا كانت $f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

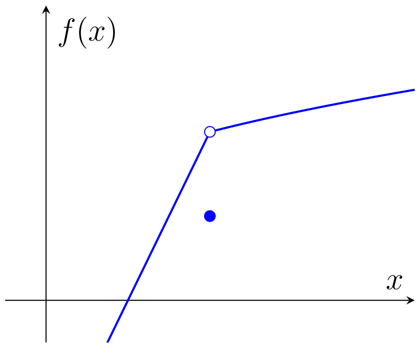
$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}^c\\ \dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ (p,q)=1\end{cases}$$

فإن الدالة متصلة على الأعداد غير النسبية، لأنه لكل عدد غير نسبي c، فإن:

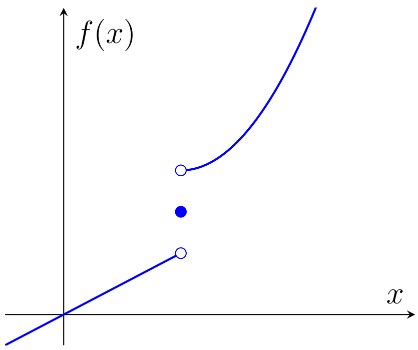
$$\lim_{x\to c} f(x)=0=f(c)$$

أنواع عدم الاتصال

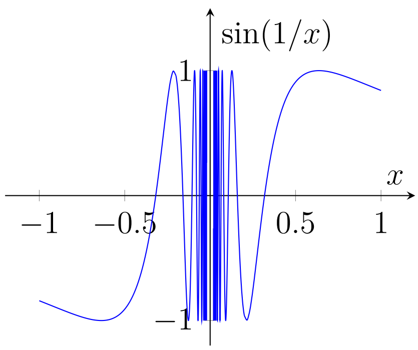
1. عدم الاتصال القابل للإزالة. ويحدث عندما تكون النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ولكن $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$. وفي هذه الحالة يمكن إعادة تعريف الدالة عند c بحيث تساوي قيمة النهاية.



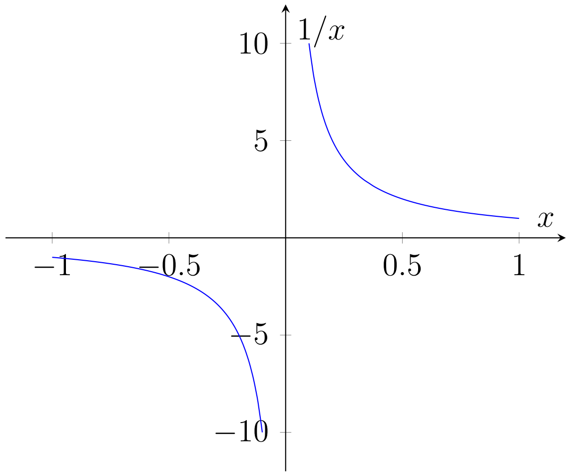
2. عدم الاتصال من نوع القفزة:إذا كانت النهايتان اليمنى واليسرى للدالة f موجودتين عند c ولكنهما غير متساويتين أي $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$.

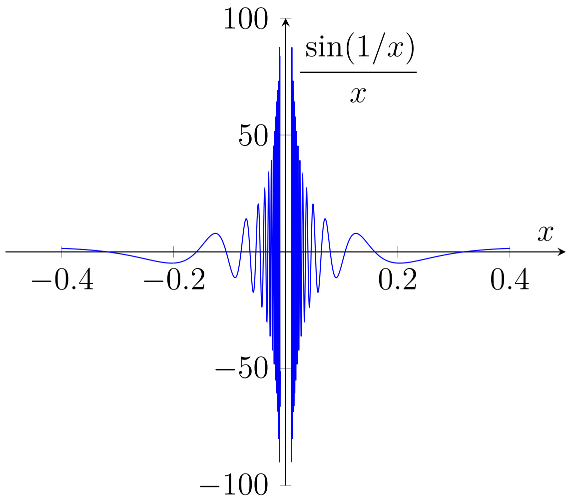


3. عدم الاتصال المتذبذب: إذا كانت أحدى النهايتين $\lim_{x\to c^+} f(x)$ أو $\lim_{x\to c^-} f(x)$ غير موجودة.



4. عدم الاتصال اللانهائي: عندما تكون f غير محدودة في كل جوار للنقطة c. ويحدث ذلك إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ كما في $f(x) = 1/x$، أو متذبذبة وغير محدودة مثل $f(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{x}$.





المبرهنة الآتية توضح أن إجراء العمليات الأربع على دوال متصلة ينتج عنها دالة متصلة، مع اشتراط أن المقام لا يساوي صفر عند القسمة.

مبرهنة 6.3

إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$، فإن $f + g, f - g, fg$ متصلة عند c، كما أن f/g متصلة عند c إذا كانت $g(c) \neq 0$.

البرهان: نقدم برهانا للفقرة (1)، وبقية الفقرات يمكن إثباتها بطريقة مشابهة. إذا كانت c نقطة معزولة، فإن $f + g$ متصلة عند c. أما إذا كانت c نقطة تراكم للمجموعة D، فقط سبق أن أثبتنا أن

$$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = f(c) + g(c)$$

□

نتيجة 6.3

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$، فإن kf متصلة عند c، لأي ثابت k.

نتيجة 6.4

إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D، فإن $f+g, f-g, fg$ متصلة على D، كما أنه إذا كانت $g(x) \neq 0$ لكل $x \in D$، فإن f/g متصلة على D.

مثال 6.2.
الدالة الكسرية p/q حيث p و q كثيرتا حدود، هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ماعدا أصفار q الحقيقية.

1. الدالة $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2. الدالة $f(x) = \dfrac{x+4}{x^4+2}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال 6.3.

1. الدالتان $\sin x, \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$.
2. الدالة $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{(\frac{\pi}{2}+n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$.
3. الدالة $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$.

مبرهنة 6.4

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، و $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتان بحيث $f(D) \subset E$، وكانت f متصلة عند $c \in D$ ، و g متصلة عند $f(c)$ ، فإن دالة التحصيل $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند c.

البرهان: لتكن (x_n) متتالية في D، و $x_n \to c$. يكفي إثبات أن $(g\circ f)(x_n) \to (g \circ f)(c)$. بما أن f متصلة عند c، إذا $f(x_n) \to f(c)$، وبما أن g متصلة عند $f(c)$، إذا $g(f(x_n)) \to g(f(c))$، وبالتالي $g \circ f$ متصلة عند c. □

نتيجة 6.5

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D، والدالة $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على E، وكانت $f(D) \subset E$، فإن الدالة $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D.

ملاحظة

إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim_{x\to L} g(x) = M$، فليس بالضرورة أن $\lim_{x\to c} g(f(x)) = M$. لكن لو كانت g متصلة، فإن $\lim_{x\to c} g(f(x)) = M$.

مثال 6.4. لتكن

$$f(x) = x$$
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

لاحظ أن

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

لكن

$$g\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right) = g(0) = 1$$

وهذا يعني أن

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) \neq g\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right)$$

مثال 6.5.

إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن الدالة $|f|$ متصلة على D.

بأخذ الدالة $g(x) = |x|$، نلاحظ أن هذه الدالة متصلة (يمكن ملاحظة ذلك عن طريق المتباينة $||x| - |c|| \leq |x - c|$)، وبالتالي فإن $g \circ f = |f|$، وبما أن كلا الدالتين متصلة، فإن $|f|$ متصلة.

لكن لو كانت $|f|$ متصلة، فليس بالضرورة أن تكون f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

مثال 6.6.

إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow [0, \infty)$ متصلة، فإن الدالة $\sqrt{f}$ متصلة على D.

لأنها تحصيل دالتين متصلتين $\sqrt{f} = g \circ f$ حيث $g(x) = \sqrt{x}$.

مثال 6.7.

إذا كانت

$$f(x) = \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

فما مجال اتصال الدالة $g \circ f$؟

الحل

تكون x في مجال الدالة $g \circ f$، إذا كانت

1. x في مجال الدالة f وهو $D_f = [2, \infty)$
2. $f(x)$ في مجال الدالة g، إذا كان

$$\begin{aligned} f(x)^2 &\neq 0 \\ x - 2 &\neq 0 \\ x &\neq 2 \end{aligned}$$

إذا مجال الدالة $g \circ f$ هو $(2, \infty) = [2, \infty)\backslash\{2\}$، كما أن $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x-2}$

تمارين 6.1

1. إذا كانت $f(x) = x^2$، فأثبت باستخدام التعريف أن f متصلة عند $x = 1$.

2. حدد مجال اتصال الدوال الآتية المعرفة على $\mathbb{R}$، مع تحديد نوع عدم الاتصال عند نقاط عدم الاتصال.

(ا)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(ب)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(ج)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

3. عرف الدالة f عند $x = 0$ بحيث تكون متصلة إن أمكن:

(ا) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin 2x, \quad x \neq 0$

(ب) $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos x, \quad x \neq 0$

(ج) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin x, \quad x \neq 0$

4. $\star$ إذا كانت $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ تحقق

$$|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in (-1,1)$$

فأثبت أن f متصلة عند $x = 0$.

5. أثبت أنه إذا كانت f متصلة عند c، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|x - c| < \delta, \; |y - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

6. إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ متصلة، فماذا تستنتج؟

7. $\star$ إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، وكان

$$f(q) = 0 \qquad \forall\, q \in \mathbb{Q}$$

فأثبت أن

$$f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

8. إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فأثبت أن المجموعة $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ مجموعة مغلقة.

9. إذا كانت $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وكانت g متصلة، و $\lim_{x\to c} f(x) = L$، فأثبت أن $\lim_{x\to c}(g \circ f)(x) = g(L)$.

10. إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

متصلة عند $x = 0$، فأثبت أن f متصلة على $\mathbb{R}$، ثم أثبت أنه إذا كان $f(1) = k$، فإن $f(x) = kx$.

11. إذا كانت $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ وكانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$، فأثبت أن $\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x) = L$.

12. أعط مثالا لما يلي:

   (ا) دالتان غير متصلتين عند c ولكن مجموعهما دالة متصلة عند c.

   (ب) دالتان أحدهما غير متصلة عند c ولكن حاصل ضربهما دالة متصلة عند c.

   (ج) دالتان أحدهما غير متصلة عند c ولكن تحصيلهما دالة متصلة عند c.

13. أثبت باستخدام التعريف أن الدالة f متصلة عند 2.

$$f(x) = \begin{cases} 8x & x \in \mathbb{Q} \\ 2x^2 + 8 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

هل الدالة متصلة عند 1؟

6.2 خواص الاتصال على فترة

في الفصل السابق، ناقشنا تعريف الاتصال وذكرنا عددا من الخصائض للدوال المتصلة على مجموعة. في هذا الفصل نركز على الدوال المتصلة على فترة والتي تمتع بعدد من الخواص المهمة التي لا تتوفر في غيرها من الدوال المتصلة.

تعريف 6.2

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ محدودة، إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in D$$

هذا يعني أن الدالة f محدودة، إذا وفقط إذا كانت المجموعة $f(D)$ محدودة. فمثلا الدالة $f(x) = \sin x$ محدودة على $\mathbb{R}$، ولكن $g(x) = x + 2$ غير محدودة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة 6.5

إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنها محدودة.

البرهان: لنفرض أن f ليست محدودة، إذا لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in [a, b]$ بحيث

$$|f(x_n)| > n$$

وبما أن (x_n) في $[a,b]$، فإنها محدودة. ومن مبرهنة بولزانو فايرشتراس، فإن لها متتالية جزئية متقاربة (x_{n_k}) ولتكن نهايتها x. وحيث إن $[a,b]$ مغلقة، إذا $x \in [a,b]$. وبما أن f متصلة، إذا

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$$

وبما أن $f(x_{n_k})$ متقاربة، فهي محدودة، وهذا تناقض مع الفرض

$$|f(x_{n_k})| > n_k$$

□

تعريف 6.3: القيم القصوى (extrema)

يكون للدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة صغرى (مطلقة) (minimum) على D إذا وجد $x_m \in D$ بحيث

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in D$$

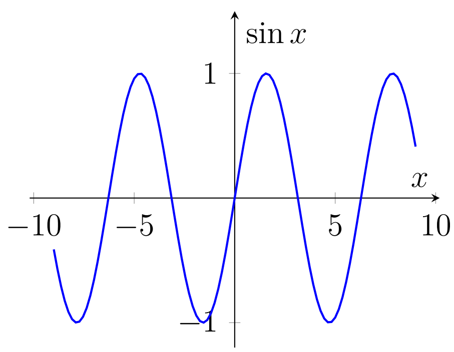
ويكون لها قيمة عظمى (مطلقة) (maximum) على D إذا وجد $x_M \in D$ بحيث

$$f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in D$$

وتسمى القيمتان العظمى والصغرى القيم القصوى للدالة.

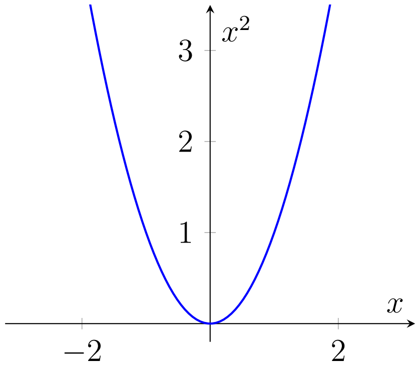
ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة صغرى عند x_m وقيمة عظمى عند x_M، فإن $f(D) \subset [f(x_m), f(x_M)]$.
2. القيم القصوى إذا وجدت فهي وحيدة، ولكن قد تأخذها عند أكثر من نقطة (مثل $\sin x$ تأخذ قيمتها العظمى 1 عند $x = \pi/2 + 2\pi n$، حيث $n \in \mathbb{Z}$، وقيمتها الصغرى -1 عند $x = 3\pi/2 + 2\pi n$)

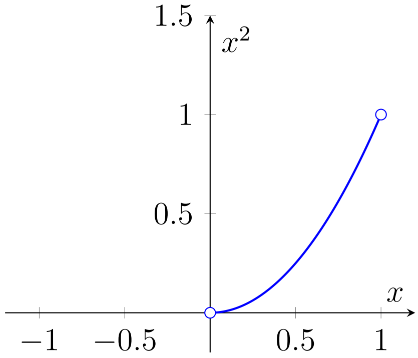


مثال 6.8.

1. الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ لها قيمة صغرى عند 0 وليس لها قيمة عظمى.



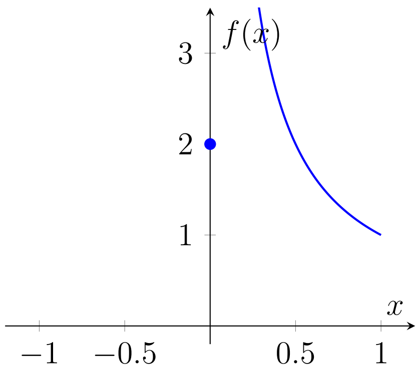
2. الدالة $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2$ ليس لها قيما قصوى.



3. الدالة $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

لها قيمة صغرى عند 1 وتساوي 1، وليس لها قيمة عظمى.



نلاحظ في المثال الأول أن المجال مجموعة غير محدودة، وفي المثال الثاني، المجال مجموعة مفتوحة، وفي المثال الثالث، الدالة غير متصلة. ويمكن استنتاج أن وجود القيم القصوى للدالة يعتمد على سلوك الدالة، وطبيعة مجالها. المبرهنة التالية تعطي شرطا كافيا يضمن وجود القيم القصوى للدالة f على مجالها.

مبرهنة 6.6

إذا كانت $I=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة، وكانت $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة، فإن للدالة f قيمة عظمى وقيمة صغرى على I.

البرهان: من المبرهنة 6.5 ، نستنتج أن f دالة محدودة على I. وبما أن $f(I)$ مجموعة محدودة، إذا

$$m=\inf f(I),\;\; M=\sup f(I)\in\mathbb{R}$$

ويكفي إثبات أن $m,M\in f(I)$. سنثبت أن $M\in f(I)$، أي يوجد $x_M\in I$، بحيث $f(x_M)=M$.

بما أن $M=\sup f(I)$، لكل $n\in\mathbb{N}$، يوجد $x_n\in I$ بحيث

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leq M$$

وهذا يعني أن

$$f(x_n)\longrightarrow M$$

وبما أن (x_n) محدودة، فإن لها متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة من $x_M\in I$ (لأن I مغلقة). وبما أن f متصلة إذا

$$f(x_{n_k})\longrightarrow f(x_M)$$

وبما أن $(f(x_{n_k}))$ متتالية جزئية من $(f(x_n))$، فإن لهما نفس النهاية، إذا

$$f(x_M)=M$$

وبالمثل، يمكن إثبات أنه يوجد $x_m\in I$ بحيث $f(x_m)=m$. □

مبرهنة 6.7: مبرهنة القيمة البينية Intermediate Value Theorem

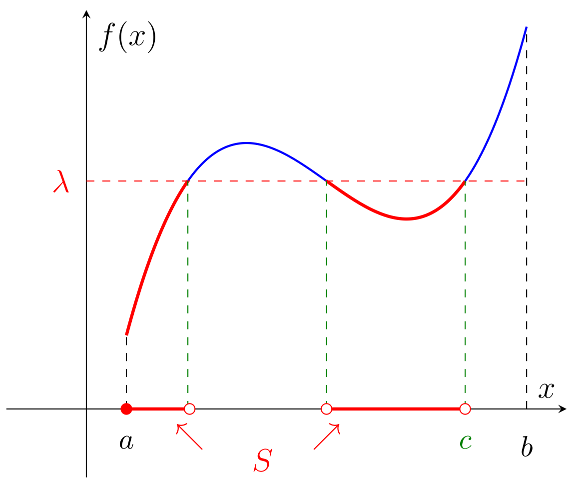
إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة، وكان λ عددا حقيقيا بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد عدد $c\in(a,b)$ بحيث $f(c)=\lambda$.

البرهان: سنفرض أن $f(a)<f(b)$، إذا

$$f(a)<\lambda<f(b)$$

ولتكن

$$S:=\{x\in[a,b]:f(x)<\lambda\}$$



بما أن $S \ni a$، إذا $S \neq \phi$، كما أن S محدودة من أعلى بالعدد b، إذا S لها حد علوي أصغر وليكن $c = \sup S$.
وبالتالي نستطيع اختيار متتالية $(x_n) \subset S$ و $x_n \to c$، ونظرا لاتصال f، فإن $f(x_n) \to f(c)$. وبما أن $f(x_n) < \lambda$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فإن

$$f(c) \leq \lambda < f(b)$$

هذا يعني أن $c < b$، فنستطيع اختيار متتالية (y_n) في $(c, b]$ متقاربة من c. من الممكن اختيار

$$y_n = \min\left\{c + \frac{1}{n}, b\right\}$$

واضح أن $y_n > c$، وبناء عليه، فإن $f(y_n) \geq \lambda$. وبما أن f متصلة، إذا $\lim f(y_n) = f(c)$، ونحصل على

$$f(c) = \lim f(y_n) \geq \lambda$$

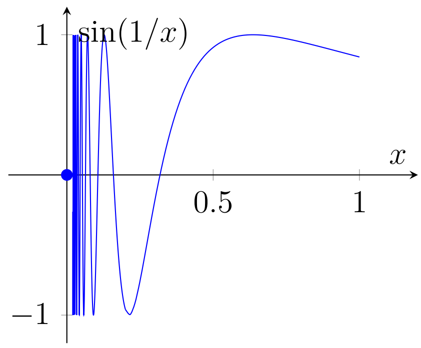
وهذا يعني أن $f(c) = \lambda$.

□

عكس المبرهنة السابقة غير صحيح، بمعنى أنه إذا كانت الدالة تحقق خاصية القيمة البينية على فترة مغلقة، فلا يشترط أن تكون متصلة. مثلا الدالة $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تحقق خاصية القيمة البينية على الفترة $[0, 1]$ ولكنها ليست متصلة.



نتيجة 6.6

إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة وكانت إشارتا $f(a)$ و $f(b)$ مختلفتين ، فإن للدالة f صفرا في الفترة (a, b).

مثال 6.9.
أثبت أنه يوجد جذر حقيقي للمعادلة $x^3 - 2 = 0$ في الفترة $[1, 2]$.

البرهان
لتكن $f(x) = x^3 - 2$ بما أن $f(1) = -1$ و $f(2) = 6$، إذا يوجد $c \in (1, 2)$ بحيث $f(c) = 0$.

مثال 6.10.
لتكن p كثيرة حدود حقيقية من الدرجة n. إذا كان n عددا فرديا، فإن للمعادلة $p(x) = 0$ جذرا حقيقيا واحدا على الأقل.

البرهان
لتكن

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

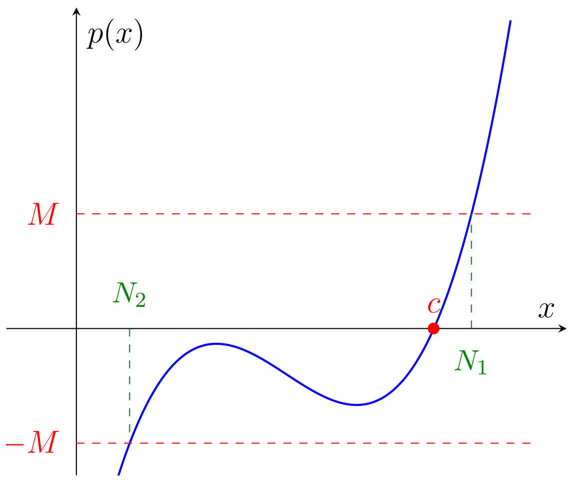
ولنفرض أن $a_n > 0$. وليكن $M > 0$، وبما أن $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$، إذا يوجد عدد N_1، بحيث

$$f(x) \geq M \qquad \forall\ x \geq N_1$$

كما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$، إذا يوجد N_2، بحيث

$$f(x) \leq -M \qquad \forall\ x \leq N_2$$

لنأخذ الفترة $[N_2, N_1]$. بما أن $f(N_1) > 0$ و $f(N_2) < 0$، إذا يوجد عدد $c \in (N_2, N_1)$ بحيث $f(c) = 0$. وبالمثل لو كانت $a_n < 0$.



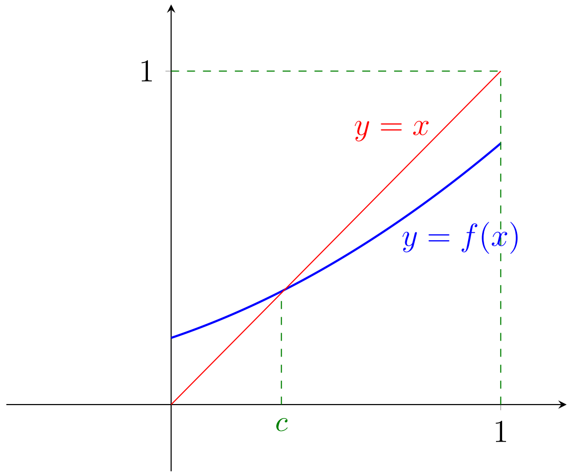
مثال 6.11. مبرهنة النقطة الثابتة (Fixed Point Theorem)
إذا كانت $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ متصلة، فأثبت أن f لها نقطة ثابتة. أي يوجد $c \in [0,1]$ بحيث $f(c) = c$.

البرهان
لنعرف $g(x) := f(x) - x$. من الواضح أن g دالة متصلة، ويصبح المطلوب إثبات وجود صفر للدالة g في الفترة $[0,1]$. إذا كان $f(0) = 0$ أو $f(1) = 1$ فقد توصلنا للمطلوب، وإن لم يكن كذلك فإن

$$g(0) = f(0) - 0 > 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 < 0$$

ومن مبرهنة القيمة البينية، فإنه يوجد $c \in (0,1)$ بحيث $g(c) = 0$، أي إن $f(c) = c$.
وهذا يعني أن منحنى الدالة المتصلة $y = f(x)$ يتقاطع مع المستقيم $y = x$ في المربع $[0,1] \times [0,1]$.



نتيجة 6.7

إذا كانت I فترة، والدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن $f(I)$ فترة.

البرهان: لتكن

$$\alpha = \inf f(I)$$

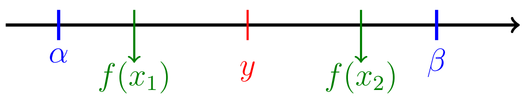
$$\beta = \sup f(I)$$

ولنعرف $\langle \alpha, \beta \rangle$ بأنه الفترة المغلقة التي طرفاها α, β، قد يكون أحدهما أو كلاهما ∞ أو $-\infty$. يكفي إثبات أن

$$(\alpha, \beta) \subset f(I) \subset \langle \alpha, \beta \rangle$$

من تعريف α, β، فإن $f(I) \subset \langle \alpha, \beta \rangle$. الآن لتكن $y \in (\alpha, \beta)$.

(يمكن استخدام محور y أفضل)



بما أن $\alpha = \inf f(I)$، و $\beta = \sup f(I)$ إذا يوجد $x_1, x_2 \in I$ بحيث

$$\alpha \leq f(x_1) < y < f(x_2) \leq \beta$$

إذا $f(x_1) < y < f(x_2)$، ومن مبرهنة القيمة البينية، فإنه يوجد x بين x_1 و x_2 بحيث $y = f(x)$، إذا $y \in f(I)$، أي إن $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. □

نتيجة 6.8

إذا كانت f متصلة على فترة مغلقة ومحدودة $[a, b]$، فإن $f([a, b])$ فترة مغلقة ومحدودة.

البرهان: f تحقق قيمتها العظمى M والصغرى m على مجالها. سنثبت أن $f([a, b]) = [m, M]$. من الواضح أن $f([a, b]) \subset [m, M]$، وبما أن $f([a, b])$ فترة، كما أنها تحتوي على m و M إذا $[m, M] \subset f([a, b])$. □

تمارين 6.2

1. إذا كانت $f(a,b) \to \mathbb{R}$ متصلة وكان

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$$

فأثبت أن f لها قيمة صغرى على (a,b)

2. ⋆ إذا كانت $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دوالا متصلة، وكان $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$ فأثبت أنه يوجد $c \in (a,b)$ بحيث $f(c) = g(c)$.

3. أعط مثالا لدالة $f : [0,1] \to [0,1]$ ليس لها نقطة ثابتة.

4. ⋆ عين فترة طولها 1 تحتوي على جذر للمعادلة $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$.

5. أثبت أن للمعادلة $x \sin x = 2$ حلا في $\mathbb{R}$.

6. أثبت أن للمعادلة $x^3 + x - 3 = 2$ حلا في $\mathbb{R}$.

7. إذا كانت $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكان $f(0) = f(2)$، فأثبت أنه يوجد $x, y \in [0,2]$ بحيث $|x - y| = 1$ و $f(x) = f(y)$. (إرشاد اعتبر الدالة $g(x) = f(x+1) - f(x)$ على $[0,1]$).

8. إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ متصلة، وكان لكل $x \in [a,b]$، فإنه يوجد $y \in [a,b]$، بحيث

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$$

أثبت أنه يوجد $c \in [a,b]$ بحيث $f(c) = 0$.

9. أثبت أنه لا يوجد دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث تأخذ كل قيمة مرتين.

10. إذا كانت $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ متصلة، وكان $f(-1) = f(1)$، فأثبت أنه يوجد $c \in [0,1]$ بحيث $f(c) = f(c-1)$.

11. إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ متصلة، وكان

$$f(x) > 0 \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

فأثبت أنه يوجد $M > 0$ بحيث

$$f(x) > M \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

12. إذا كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متصلة، وكان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. فأثبت أن f تأخذ قيمتها الصغرى على $\mathbb{R}$.

13. إذا كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متصلة، وكان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. فأثبت أن f محدودة وتأخذ قيمتها العظمى، أو الصغرى على $\mathbb{R}$.

14. إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فهل $f^{-1}([a,b])$ محدودة بالضرورة؟

15. ⋆ إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة متصلة ولها قيمة قصوى عند نقطة $c \in (a,b)$، فأثبت أن f ليست أحادية.

16. إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة، فأثبت أنه يوجد فترة $[c,d]$ بحيث تكون الدالة

$$\frac{1}{\lambda-f(x)}$$

متصلة على $[a,b]$ لكل $\lambda\notin[c,d]$.

17. إذا كانت D متراصة و f متصلة على D، فأثبت أن المجموعة $\{x: 0\le f(x)\le 1\}$ متراصة.

6.3 الدوال المطردة ومعكوس الدالة

تعريف 6.4:

1. نقول إن $f:D\to\mathbb{R}$ متزايدة إذا كان

$$x,y\in D,\ x<y \implies f(x)\le f(y)$$

وتكون متزايدة فعلا إذا كان $f(x)<f(y)$.

2. نقول إن $f:D\to\mathbb{R}$ متناقصة إذا كان

$$x,y\in D,\ x<y \implies f(x)\ge f(y)$$

وتكون متناقصة فعلا إذا كان $f(x)>f(y)$.

3. نقول إن f مطردة إذا كانت متزايدة، أو متناقصة. ومطردة فعلا إذا كانت متزايدة فعلا أو متناقصة فعلا.

ملاحظة

1. الدالة f متزايدة إذا وفقط إذا كانت $-f$ متناقصة. لذلك سنكتفي بدراسة الدوال المتزايدة.

2. لا يشترط أن تكون الدالة المطردة متصلة، فمثلا الدالة الآتية مطردة وغير متصلة.

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1\\ x+1 & 1<x\le 2\end{cases}$$

المبرهنة التالية، توضح أن أي دالة مطردة على فترة مغلقة فإن النهايتين اليمنى واليسرى موجودة عند كل نقطة في مجالها.

مبرهنة 6.8:

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متزايدة، فإنه لكل $c\in(a,b)$ تكون $\lim_{x\to c^-} f(x),\ \lim_{x\to c^+} f(x)$ موجودتين، كما أن

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\inf\{f(x): x\in(c,b]\}$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\sup\{f(x): x\in[a,c)\}$$

إضافة لذلك، فإن

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^+} f(x)$$

كما أن $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)$ موجودة وتحقق

$$f(a) \le \lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) \le f(b)$$

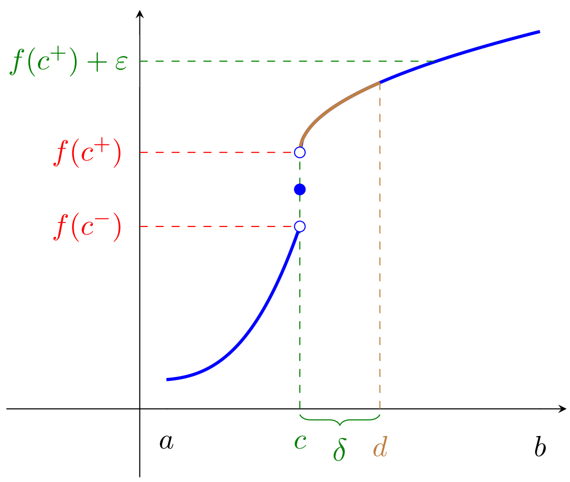
البرهان: بما أن f متزايدة، إذا

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \qquad \forall x \in [a,b]$$

وبالتالي f محدودة. لنعرف

$$f(c^+) := \inf\{f(x) : x \in (c,b]\}$$

سنثبت أن $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c^+)$.



ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، وبما أن $f(c^+)+\varepsilon$ ليس حدا سفليا للمجموعة، إذا يوجد $d \in (c,b]$، بحيث

$$f(c^+)+\varepsilon > f(d)$$

لتكن $\delta := d-c > 0$، وبما أن f متزايدة، فإن

$$\begin{aligned} 0 < x-c < \delta \ &\Rightarrow \ c < x < d \\ &\Rightarrow \ f(c^+) \le f(x) \le f(d) < f(c^+)+\varepsilon \end{aligned}$$

وهذا يعني أن

$$0 < x-c < \delta \Rightarrow |f(c^+) - f(x)| < \varepsilon$$

أي إن $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c^+)$. وبالمثل نستطيع إثبات أن

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c^-) := \sup\{f(x) : x \in [a,c)\}$$

وبما أن f متزايدة، فإن $f(c)$ حد سفلي للمجموعة $\{f(x) : x \in (c,b]\}$ وحد علوي للمجموعة $\{f(x) : x \in [a,c)\}$، وبالتالي

$$f(c^-) \le f(c) \le f(c^+)$$

وبطريقة مماثلة، يمكن إثبات وجود النهاية عند a و b. □

تشير المبرهنة السابقة إلى الدالة المطردة متصلة عند c إذا كان لها نهاية عند c. أما إذا لم تكن متصلة، فإن عدم الاتصال من نوع القفزة.

مبرهنة 6.9:

إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مطردة، وكانت A مجموعة نقاط عدم اتصال f، فإن A قابلة للعد.

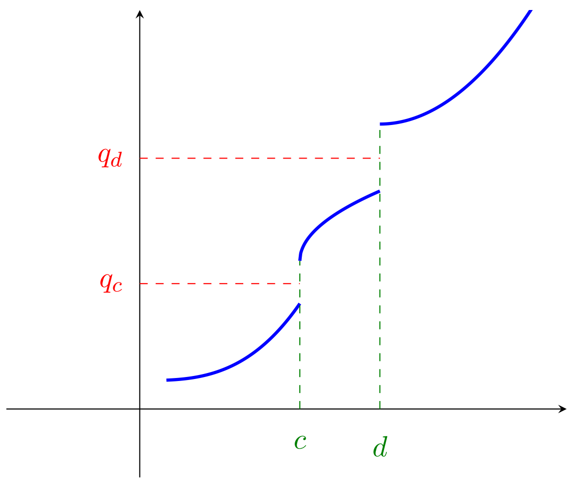
البرهان: لنفرض أن f متزايدة. من المبرهنة السابقة، إذا كان للدالة f نهاية عند c، فإن الدالة متصلة عند c. إذا $c \in A$، إذا وفقط إذا كان $f(c^-) < f(c^+)$. نختار عدد نسبي q_c بحيث

$$f(c^-) < q_c < f(c^+)$$

نعرف الدالة

$$g : A \to \mathbb{Q}$$

$$g : c \to q_c$$



من الواضح أن الدالة متباينة، لأنه لو كان $d \in A$ و $c < d$ فإن

$$f(c^-) < q_c < f(c^+)$$

$$f(d^-) < q_d < f(d^+)$$

وبما أن f متزايدة، إذا

$$f(c^+) \leq f(t) \leq f(d^-) \qquad \forall t \in (c, d)$$

إذا

$$q_c < q_d$$

وهذا يعني أن

$$A \sim B \subset \mathbb{Q}$$

إذا A قابلة للعد. □

مبرهنة 6.10

لتكن I فترة و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة، فإنها مطردة فعلا.

البرهان: سنثبت الحالة عندما $I = [a, b]$، وبما أن f متباينة، إذا $f(x) \neq f(y)$ لكل $x \neq y$. بدون فقدان للعمومية، لنفرض أن $f(a) < f(b)$، ونثبت أن f متزايدة فعلا.

1. نثبت أن

$$f(a) < f(x) < f(b) \qquad \forall x \in (a, b)$$

لنفرض أن

$$f(x) < f(a) < f(b)$$

فإنه من مبرهنة القيمة البينية، يوجد $c \in (x, b)$ بحيث $f(c) = f(a)$ وهذا تناقض. وبالمثل لو كان

$$f(a) < f(b) < f(x)$$

نحصل على تناقض.

2. لنفرض أن $x, y \in [a, b]$، و $x < y$ إذا

$$f(a) < f(y) \leq f(b)$$

لو كان

$$f(a) < f(y) < f(x)$$

فإنه يوجد $c \in (a, x)$ بحيث $f(c) = f(y)$ وهذا تناقض. إذا $f(x) < f(y)$ وبالتالي f متزايدة فعلا.

□

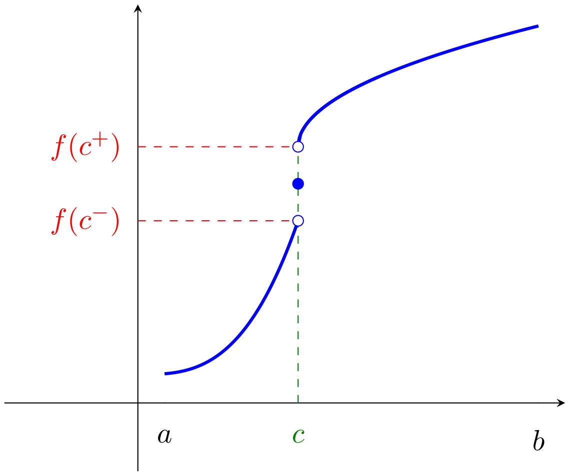
مثال 6.12. لا يكفي أن تكون f متباينة حتى تكون مطردة فعلا، بل لا بد أن تكون متصلة. لاحظ الدالة التالية متباينة ولكنها ليست مطردة فعلا.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

مبرهنة 6.11

لتكن I فترة، و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ مطردة على I. إذا كان مدى f (أي $(f(I))$) فترة، فإن f متصلة.

البرهان: لنفرض أن f متزايدة (إذا كانت f متناقصة، فإنه يمكن الإثبات بطريقة مشابهة). ولنفرض أن f غير متصلة عند نقطة داخلية $c \in I$. بما أن f مطردة، فإن عدم الاتصال من نوع القفزة أي $f(c^-) < f(c^+)$، إذا $f(I)$ ليست فترة. وهذا تناقض. ولو كانت c نقطة حدية، فإننا نستطيع إثباتها بنفس الطريقة.



$\square$

مبرهنة 6.12

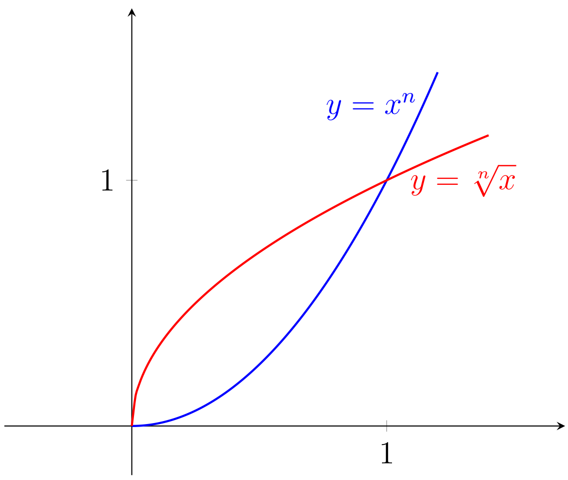
لتكن I فترة. إذا كانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة، فإن f^{-1} متصلة ومطردة فعلا.

البرهان: بما أن f متصلة ومتباينة، فإنها مطردة فعلا. لنفرض أن f متزايدة فعلا، وأن $y_1, y_2 \in f(I)$ بحيث $y_1 < y_2$. ليكن $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$، يبقى إثبات أن $x_1 < x_2$. لنفرض أن $x_1 \geq x_2$، إذا

$$f(x_1) \geq f(x_2) \implies y_1 \geq y_2$$

وهذا تناقض. إذا f^{-1} متزايدة فعلا.
بما أن f متصلة، فإن $f(I)$ فترة، كما أن f^{-1} مطردة فعلا، و $f^{-1} : f(I) \to I$
وكلاهما فترة إذا f^{-1} متصلة $\square$

مثال 6.13.
أثبت أن $\sqrt[n]{x}$ دالة متصلة على $[0, \infty)$.



الدالة $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ المعرفة بالعلاقة $f(x) = x^n$ متصلة ومتزايدة فعلا، إذا $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ متزايدة فعلا ومتصلة.

اتصال f لوحده غير كاف لضمان اتصال f^{-1}.

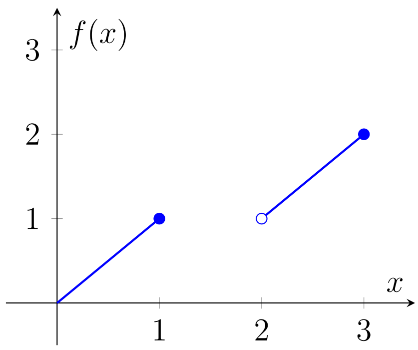
مثال 6.14.
إذا كانت الدالة $f : [0, 1] \cup (2, 3] \longrightarrow [0, 2]$ حيث

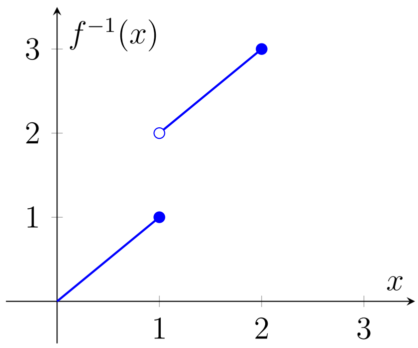
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x - 1 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

فإن f متصلة ومتباينة، ولكن $f^{-1} : [0, 2] \longrightarrow [0, 1] \cup (2, 3]$ حيث

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x + 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

غير متصلة.





الدوال المتصلة على مجموعات متراصة

إن معظم المبرهنات الموجودة في هذا الفصل والتي أثبتناها للدوال المتصلة على فترة مغلقة ومحدودة، تظل صحيحة عند استبدال فترة مغلقة ومحدودة بمجموعة متراصة. سوف نثبت عددا من المبرهنات المهمة والخاصة بالمجموعات المتراصة، وفي البراهين سوف نستخدم مبرهنة التكافؤ للمجموعات المتراصة، والتي تنص على أن المجموعة D متراصة إذا وإذا فقط كانت مغلقة ومحدودة إذا وفقط إذا كان لكل متتالية عناصرها في D، يوجد متتالية جزئية متقاربة نهايتها في D.

المبرهنة التالية توضح أن صورة أي مجموعة متراصة هي مجموعة متراصة.

مبرهنة 6.13

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن $f(D)$ متراصة.

البرهان: لتكن (y_n) متتالية في $f(D)$، يكفي إثبات أن لها متتالية جزئية متقاربة لنهاية في $f(D)$. لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in D$ بحيث $y_n = f(x_n)$. بما أن D متراصة، إذا يوجد متتالية (x_{n_k}) متقاربة من x، و $x \in D$، ومن اتصال f، فإن

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(D)$$

إذا $f(D)$ متراصة. □

ملاحظات

1. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مفتوحة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مفتوحة
   (ا) إذا كانت $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2$، فإن $f((0,1)) = \{2\}$ مجموعة غير مفتوحة.
   (ب) إذا كانت $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = \sin x$ ، فإن $f((0,\infty)) = [-1,1]$ مجموعة غير مفتوحة.
2. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مغلقة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مغلقة.
   (ا) في الدالة $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ نلاحظ أن $f([0,\infty)) = (0,1]$ ليست مجموعة مغلقة.

مبرهنة 6.14

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنه يوجد $x_m, x_M \in D$ بحيث

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \quad \forall x \in D$$

البرهان: من المبرهنة السابقة، $f(D)$ مجموعة متراصة، فهي مغلقة ومحدودة. وبالتالي $\inf f(D),\ \sup f(D) \in f(D)$. إذا يوجد $x_m, x_M \in D$، بحيث

$$f(x_m) = \inf f(D), \qquad f(x_M) = \sup f(D)$$

ونحصل على

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \quad \forall x \in D$$

□

مبرهنة 6.15

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة ، فإن $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ متصلة.

البرهان: لتكن (y_n) متتالية في $f(D)$ بحيث

$$y_n \to y \in f(D)$$

يكفي إثبات أن

$$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$$

من تعريف $f(D)$، يوجد $x, x_n \in D$ بحيث $y = f(x),\, y_n = f(x_n)$، ويصبح المطلوب إثبات أن $x_n \to x$. بما أن D متراصة، فهي محدودة، وبالتالي (x_n) محدودة، ولإثبات أن $x_n \to x$ ، يكفي إثبات أن جميع متتالياتها الجزئية المتقاربة لها نفس النهاية.
لتكن (x_{n_k}) متتالية جزئية متقاربة إلى z. بما أن D مغلقة، إذا $z \in D$. وبما أن f متصلة، إذا

$$f(x_{n_k}) \to f(z)$$

ولكن

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y = f(x)$$

إذا $f(x) = f(z)$، وبما أن f متباينة، إذا $x = z$. إذا f^{-1} متصلة. □

6.3 تمارين

1. ⋆ إذا كانت $f, g : D \to \mathbb{R}$ متزايدتين، فأثبت أن $f + g$ متزايدة. ماذا عن fg؟
2. إذا كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متزايدة، وكانت

$$f(x+2) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

فأثبت ان f دالة ثابتة.

3. ⋆ إذا كانت f متزايدة عل (a, b) وغير محدودة من أعلى، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$.
4. إذا كانت $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ مطردة، وكانت النهاية موجودة عند نقطة $c \in (0, 1)$، فأثبت أن الدالة متصلة عند c.
5. إذا كانت $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ دالة متصلة، ولا تأخذ أي قيمة مرتين، وكانت $f(0) < f(1)$، فأثبت أن f متزايدة فعلا.

6.4 الاتصال المنتظم

إذا كانت الدالة f متصلة عند نقطة $c \in D$، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$x \in D, |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

لكن لو اخترنا نقطة أخرى $d \in D$، فقد لا يكون العدد δ_1 مناسبا، وبالتالي نختار عددا آخرا $\delta_2 > 0$ بحيث

$$x \in D, |x - d| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(d)| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن δ مرتبطة بالنقطة c.

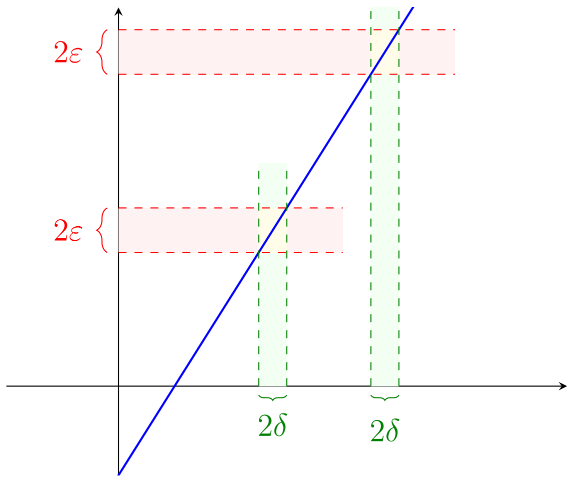
مثال 6.15.
لتكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2x - 1$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$. تكون الدالة متصلة عند c إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، واستطعنا إيجاد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

الآن نوجد

$$|f(x) - f(c)| = |(2x - 1) - (2c - 1)| = 2|x - c| < \varepsilon \Rightarrow |x - c| < \varepsilon/2$$

نختار $\delta = \varepsilon/2$.



نلاحظ في هذا المثال أن δ لا تعتمد على النقطة c، بل تصلح لأي نقطة في مجال الدالة. وهذه الخاصية ليست متوفرة لجميع الدوال. فيما يلي نعطي مثالا على دالة تتغير قيمة δ مع تغير العدد c.

مثال 6.16.
لتكن $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، ولتكن $c\in(0,1)$. تكون الدالة متصلة عند c إذا كان $\varepsilon>0$ معطى، واستطعنا إيجاد $\delta>0$ تحقق

$$x\in(0,1),\ 0<|x-c|<\delta \quad\Longrightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|<\varepsilon$$

الآن نبدأ بالمطلوب ثم نوجد قيمة δ.

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \frac{|x-c|}{cx}<\varepsilon$$

إذا يجب أن نوجد حدا علويا للمقدار $\frac{1}{x}$. لتكن $x\in(0,1)$ ولنفرض أن

$$|x-c|<\frac{c}{2}$$

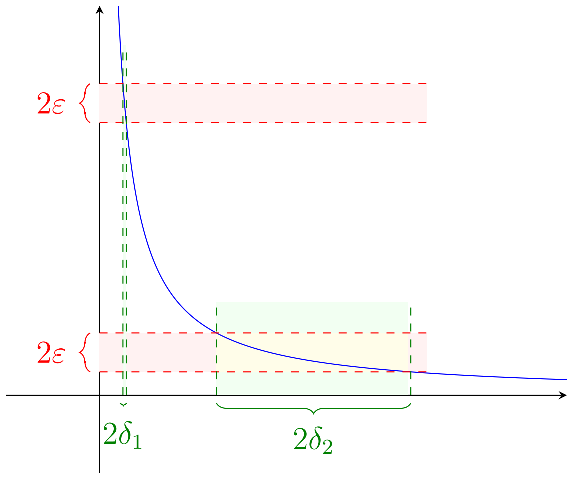
إذا

$$\begin{aligned}\frac{-c}{2}&<x-c<\frac{c}{2}\\ \underbrace{\frac{c}{2}<x}&<\frac{3c}{2}\\ \frac{2}{c}&>\frac{1}{x}\end{aligned}$$

ونحصل على

$$\begin{aligned}\frac{|x-c|}{cx}&\le\frac{2\,|x-c|}{c^2}<\varepsilon\\ |x-c|&<\frac{c^2}{2}\varepsilon\end{aligned}$$

نختار $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c^2\varepsilon\right\}$.
هنا نلاحظ أن قيمة δ تعتمد على العدد c، ونلاحظ أنها تقترب من 0 كلما اقتربت c من 0. إذا لا يوجد عدد δ مناسب لكل الأعداد في الفترة $(0,1)$.



تعريف 6.5: الاتصال المنتظم

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام إذا كان

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \quad & x, t \in D, \\ & |x - t| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

ملاحظات

1. الاتصال المنتظم يكون على مجموعة، وليس عند نقطة.

2. أي دالة متصلة بانتظام، فهي متصلة.

مثال 6.17.
لتكن $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ متصلة بانتظام. لنرى ذلك، إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، ونهدف لإيجاد $\delta > 0$ تحقق

$$x \in [2,3],\ 0 < |x - t| < \delta \quad \Longrightarrow \ \left|x^2 - t^2\right| < \varepsilon$$

ليكن

$$\begin{aligned} |x^2 - t^2| &= |x + t||x - t| \leq 6|x - t| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |x - t| < \varepsilon/6 \end{aligned}$$

نختار $\delta = \varepsilon/6$. إذا f متصلة بانتظام على $[2,3]$.

مثال 6.18.

الدالة $f:[2,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=\frac{1}{x}$ متصلة بانتظام. لنرى ذلك، إذا كان $\varepsilon>0$ معطى، واستطعنا إيجاد $\delta>0$ تحقق

$$x,t\in[2,\infty),\ |x-t|<\delta \quad\Longrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right|<\varepsilon$$

ليكن $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right|<\varepsilon$ وبما أن $x,t\geq 2$، إذا

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right|=\frac{|x-t|}{tx}\leq\frac{|x-t|}{4}<\varepsilon\Rightarrow|x-t|<4\varepsilon$$

نختار $\delta=4\varepsilon$.

مبرهنة 6.16: معيار عدم الاتصال المنتظم

تكون الدالة $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ غير منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (t_n) في D بحيث

1. $|x_n-t_n|\to 0$
2. $|f(x_n)-f(t_n)|\nrightarrow 0$

البرهان: إذا كانت f غير متصلة بانتظام على D ، فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث لكل $\delta>0$، يوجد $x,t\in D$ بحيث $|x-t|<\delta$ و $|f(x)-f(t)|\geq\varepsilon$، وبالتالي نستطيع إيجاد (x_n) و (t_n) في D بحيث

$$|x_n-t_n|<\frac{1}{n},\qquad |f(x_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon$$

وهذا يعني أن $|x_n-t_n|\to 0$ و $|f(x_n)-f(t_n)|\nrightarrow 0$.

لنفرض أن (1) و (2) متحققة، ونسعى لإثبات أن f غير منتظمة الاتصال.
لنفرض أن f متصلة بانتظام، ويوجد متتاليتان (x_n) و (t_n) في D تحققان $|x_n-t_n|\to 0$. سنثبت أن (2) لا يمكن أن تكون متحققة. ليكن $\varepsilon>0$، وبما أن f متصلة بانتظام، فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث

$$x,t\in D,\ |x-t|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon$$

وبما أن $|x_n-t_n|\to 0$، إذا يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n-t_n|<\delta\quad\forall n\geq N$$

وبالتالي

$$|f(x_n)-f(t_n)|<\varepsilon\quad\forall n\geq N$$

إذا

$$|f(x_n)-f(t_n)|\to 0$$

وهذا تناقض. □

النتيجة التالية تعطي شرطا للاتصال المنتظم، ولكن فائدتها محدودة لأنها تتطلب دراسة جميع المتتاليات التي تحقق شرطا معينا.

نتيجة 6.9:

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا كان لكل متتاليتين (x_n) و (t_n) في D تحققان $|x_n - t_n| \to 0$ ، فإن $|f(x_n) - f(t_n)| \to 0$.

مثال 6.19.

الدالة $f : (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$ ليست متصلة بانتظام. لنأخذ $x_n = \dfrac{1}{n}$، $t_n = \dfrac{1}{n+1}$، ونلاحظ أن

$$|x_n - t_n| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$$

ولكن

$$|f(x_n) - f(t_n)| = 1 \not\to 0$$

مثال 6.20.

الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ غير منتظمة الاتصال. لنأخذ $x_n = n + \dfrac{1}{n}$، $t_n = n$، ونلاحظ أن

$$|x_n - t_n| = \frac{1}{n} \to 0$$

ولكن

$$|f(x_n) - f(t_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0$$

من الممكن أن تكون الدالة محدودة ومع ذلك غير متصلة بانتظام.

مثال 6.21.

الدالة $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ غير منتظمة الاتصال. لنأخذ

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \qquad t_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$$

ونلاحظ أن

$$|x_n - t_n| \to 0 - 0 = 0$$

ولكن

$$|f(x_n) - f(t_n)| = 1 \not\to 0$$

مبرهنة 6.17

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، والمجموعة D مغلقة ومحدودة، فإن f متصلة بانتظام.

البرهان: لنفرض أن f غير متصلة بانتظام على D ، فإنه يوجد $\varepsilon > 0$، ومتتاليتان (x_n) و (t_n) بحيث

$$|x_n - t_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$$

بما أن D محدودة، إذا (x_n) محدودة، وبالتالي لها متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة إلى $x \in D$ لأن D مغلقة. وبالمثل يوجد متتالية جزئية (t_{n_k}) متقاربة لنفس العدد x، وبما أن f متصلة إذا

$$f(x_{n_k}) \to f(x)$$

$$f(t_{n_k}) \to f(x)$$

وبالتالي

$$|f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})| \to 0$$

وهذا تناقض مع

$$|f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})| \geq \varepsilon$$

إذا f متصلة بانتظام على D. $\square$

مثال 6.22.

1. الدالة $f : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^3 - x^2$ متصلة بانتظام.

2. الدالة $f : (0, 4) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^4 - x$ متصلة بانتظام على $[0, 4]$، وبالتالي متصلة بانتظام على أي مجموعة جزئية منها. إذا f متصلة بانتظام على $(0, 4)$.

مثال 6.23.
الدالة $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام.
يمكن إثبات ذلك عن طريق إثبات أن f متصلة بانتظام على $[0, 2]$ و $[1, \infty)$.

1. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام لأنها متصلة على فترة مغلقة ومحدودة.

2. $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، لأن

$$|f(x) - f(t)| = |\sqrt{x} - \sqrt{t}| = \frac{|x - t|}{\sqrt{x} + \sqrt{t}} \leq \frac{|x - t|}{2} < |x - t|$$

وهذا يعني أنه إذا كان $\varepsilon > 0$، فإنه يوجد $\delta_1, \delta_2 > 0$ بحيث

$$x, t \in [0, 2],\ |x - t| < \delta_1 \implies |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

$$x, t \in [1, \infty),\ |x - t| < \delta_2 \implies |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

نختار $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

وهذا يعني أن شروط المبرهنة السابقة كافية وليست ضرورية لانتظام الاتصال.

تعريف 6.6: شرط ليبشتز

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز ، إذا كان هناك ثابت $K > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(t)| \leq K|x - t| \quad \forall x, t \in D$$

وهذا يعني هندسيا أن ميل المستقيم عند أي نقطتين $(x, f(x)), (t, f(t))$ محدود.

$$\left|\frac{f(x) - f(t)}{x - t}\right| \leq K$$

لذلك، فإن الدالة التي ميل المماس لها غير محدود، لا تحقق شرط ليبشتز، فمثلا الدالة $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$، والمعرفة بالعلاقة $f(x) = \tan(x)$ لا تحقق شرط ليبشتز.

مثال 6.24.

1. الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = 4x - 5$ تحقق شرط ليبشتز لأن

$$|f(x) - f(t)| = |(4x - 5) - (4t - 5)| = 4|x - t|$$

نختار $K = 4$.

2. الدالة $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$، $a > 0$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$ تحقق شرط ليبشتز لأن

$$|f(x) - f(t)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right| = \frac{|x - t|}{tx} \leq \frac{|x - t|}{a^2}$$

نختار $K = \frac{1}{a^2}$.

3. $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ تحقق شرط ليبشتز (لماذا؟).

نتيجة 6.10:

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز، فإن f متصلة بانتظام على D

البرهان: نختار $\delta = \varepsilon/K$. □

مثال 6.25. الدالة $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ تحقق شرط ليبشتز (لماذا؟)، وبالتالي متصلة بانتظام.

إن عكس النتيجة السابقة غير صحيح، وهذا يعني أنه ليست كل دالة متصلة بانتظام فهي تحقق شرط ليبشتز.

مثال 6.26. سبق أن أثبتنا أن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام على $[0, 2]$. ولكنها لا تحقق شرط ليبشتز. لنفرض أن f تحقق شرط ليبشتز، إذا يوجد $K > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(t)| \leq K|x - t|$$

لنأخذ $t=0, x>0$، إذا

$$\sqrt{x} \le Kx \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x}} \le K \quad \forall x \in (0,2)$$

وهذا تناقض، لأن $\frac{1}{\sqrt{x}}$ غير محدودة في الفترة $(0,2)$.

مبرهنة 6.18

إذا كانت $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، وكانت $(x_n) \subset D$ من نوع كوشي، فإن $(f(x_n))$ من نوع كوشي.

البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، وبما أن f متصلة بانتظام إذا يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|x-t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

وبما أن (x_n) متتالية كوشي، إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x_m| < \delta \qquad \forall\, n, m \ge N$$

بوضع $x = x_n$, $t = x_m$ نجد أن

$$|x_n - x_m| < \delta \;\Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \ge N$$

إذا $(f(x_n))$ من نوع كوشي. $\square$

إذا كانت الدالة $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ، وكانت $(x_n) \subset D$ من نوع كوشي، فإننا لا نضمن أن تكون $(f(x_n))$ من نوع كوشي.

مثال 6.27. الدالة $f: (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$، المعرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة، كما أن $(x_n) = (\frac{1}{n})$ متتالية كوشي لكن $f(x_n) = n$ ليست متتالية كوشي.

مبرهنة 6.19

الدالة $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، إذا وفقط إذا أمكن تمديدها لتصبح متصلة على $[a,b]$.

البرهان: إذا كانت f متصلة على $[a,b]$، فإنها متصلة بانتظام على $[a,b]$ وبالتالي متصلة بانتظام على (a,b).
لنفرض أن f متصلة بانتظام على (a,b)، فيكفي إثبات أن $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ موجودة. سنكتفي بإثبات أن النهاية $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ موجودة. لتكن (x_n) متتالية في D بحيث $x_n \to a$، إذا فهي متتالية كوشي، ومن المبرهنة السابقة $(f(x_n))$ متتالية كوشي، فهي متقاربة، ولتكن نهايتها L.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

حتى نثبت أن $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ يكفي إثبات أن أي متتالية $t_n \to a$، فإن $f(t_n) \to L$. لتكن $t_n \to a$، إذا

$$\lim_{n\to\infty} (t_n - x_n) = a - a = 0$$

وبما أن f متصلة بانتظام، فإن

$$|f(x_n) - f(t_n)| \to 0$$

ونحصل على

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(t_n) &= \lim_{n\to\infty} (\underbrace{f(t_n) - f(x_n)}_{\longrightarrow 0} + f(x_n)) \\ &= 0 + L = L\end{aligned}$$

وهذا يعني أن $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ ، وعند تعريف $f(a) = L$ تصبح الدالة متصلة عند a. □

مثال 6.28. 1. الدالة $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ متصلة على $(0, 1)$ ولكن نهايتها غير موجودة عند 0، لذلك لا يمكن تمديدها لتصبح متصلة عند 0، إذا فهي غير متصلة بانتظام على $(0, 1)$.

2. الدالة $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ متصلة على $(0, 1)$ ونهايتها موجودة عند 0، فيمكن تمديدها لتصبح متصلة عند $x = 0$ و $x = 1$، إذا فهي متصلة بانتظام على $(0, 1)$.

المبرهنة السابقة يمكن تعميمها على أي مجموعة D.

مبرهنة 6.20

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على D . فإنه يمكن تمديد الدالة f لتصبح متصلة بانتظام على $\overline{D} = D \cup \widehat{D}$.

البرهان: طريقة البرهان مشابهة لبرهان المبرهنة السابقة. □

مبرهنة 6.21

1. إذا كانت $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وكانت $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $[a, \infty)$.
2. إذا كانت $f : (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وكانت $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $(-\infty, a]$.
3. إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وكانت $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

البرهان: سنثبت (1) والبقية يمكن إثباتها بشكل مشابه. لنفرض أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. ليكن $\varepsilon > 0$، إذا يوجد $M > a$، بحيث

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \forall x \geq M$$

بما أن الفترة $[a, M+1]$ مغلقة ومحدودة، إذا f متصلة بانتظام، وبالتالي يوجد δ بحيث

$$x, t \in [a, M+1],\ |x - t| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

كما أن

$$x, t \in [M, \infty), \Rightarrow |f(x) - f(t)| \leq |f(x) - L| + |L - f(t)| < 2\varepsilon$$

بقي أن نبحث الحالة $x \leq M \leq t$

$$|x - t| < \delta \implies |f(x) - f(t)| \leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(t)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

□

ملاحظة: عكس المبرهنة غير صحيح فمثلا $f(x) = x$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

مثال 6.29.

1. أثبت الدالة $f(x) = \tan^{-1}(x)$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.
بما أن f متصلة على $\mathbb{R}$، كما أن

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pi/2, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi/2$$

إذا f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

2. أثبت أن الدالة $f(x) = e^x$ متصلة بانتظام على $(-\infty, b]$.
بما أن f متصلة على $\mathbb{R}$ و

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

إذا f متصلة بانتظام على $(-\infty, b]$.

6.4 تمارين

1. أثبت ان الدوال الآتية متصلة بانتظام على مجالها
   (ا) ⋆ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ على $[2, \infty)$.
   (ب) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ على $\mathbb{R}$.
   (ج) ⋆ $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ على $(0, \infty)$.
   (د) ⋆ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ على $(0, \infty)$
   (ه) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ على $[1, \infty)$
   (و) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ على $[1, \infty)$.

2. أثبت أن الدوال الآتية غير متصلة بانتظام على مجالها
   (ا) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ على $(0, 1)$.
   (ب) ⋆ $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ على $[1, \infty)$
   (ج) ⋆ $f(x) = x \sin x$ على $\mathbb{R}$.

(د) $f(x) = e^x$ على $[-2, \infty)$.

3. أثبت ان الدوال الآتية تحقق شرط ليبشتز على مجالها

(ا) $\star$ $f(x) = x^2 + 2x + 3$ على $[0, 5]$.

(ب) $f(x) = \sin x$ على $[0, \infty)$.

(ج) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ على $(0, \infty)$.

4. أثبت أن $f(x) = x^2$ متصلة بانتظام على الفترة $(-1, 2)$.

5. أثبت أن الدالة f متصلة على $[-1, 1]$، ولكنها غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

6. $\star$ إذا كانت كل من $f, g : D \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام ومحدودة، فأثبت أن fg متصلة بانتظام على D.

7. لأي قيمة $m = 1/3, 1/2, 2, 3$ تكون الدالة $f(x) = x^m$ متصلة بانتظام عل $[0, \infty)$.

8. أعط مثالا

(ا) دالة f متصلة ومحدودة على $(0, 1]$ ولكنها ليست متصلة بانتظام.

(ب) دالة f متصلة ومحدودة على $[0, \infty)$ ولكنها ليست متصلة بانتظام.

9. إذا كانت $f : D \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام وكانت

$$f(x) \geq k > 0 \qquad \forall x \in D$$

فأثبت أن $\dfrac{1}{f}$ متصلة بانتظام على D.

10. حدد قيم α بحيث تكون الدالة $f(x) = x^\alpha \sin(1/x)$ متصلة بانتظام على الفترة $(0, 1)$.

11. إذا كانت f متصلة على $[0, \infty)$ ومتصلة بانتظام على كل فترة $[a, \infty)$، حيث $a > 0$، فأثبت أن f متصلة بانتظام على $[0, \infty)$.

12. إذا كانت $f : D \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام وكانت D محدودة، فأثبت أن المجموعة $f(D)$ محدودة.

13. تكون الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دورية، إذا وجد ثابت $T > 0$ بحيث

$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

أثبت أنه إذا كانت f متصلة ودورية، فإنها متصلة بانتظام.

14. $\star$ إذا كانت $f, g : D \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، فأثبت أن $f + g$ متصلة بانتظام على D. ثم أوجد مثالا يوضح أن fg ليست بالضرورة متصلة بانتظام على D.

15. لتكن $(x_n), (y_n)$ متتاليتين في (a,b)، ولتكن $x_n \to x, y_n \to x$ حيث $x \in (a,b)$. إذا كانت $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز، فأثبت أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ موجودة، كما أن

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

16. أثبت أن $f(x) = x$ و $g(x) = \cos x$ دوالا متصلة بانتظام على R. هل $(fg)(x)$ متصلة بانتظام؟ مع التبرير.

17. أثبت أن $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ غير متصلة بانتظام على $[0,\infty)$.

الباب السابع

الاشتقاق

نشأة الاشتقاق

ظهر علم الاشتقاق في منتصف القرن السابع عشر حيث ساهم نيوتن في نشأة التفاضل والتكامل عام 1666 واستخدمه في حل مسائل فيزيائية في السرعة والحركة، ثم ظهرت مساهمة ليبنز من خلال دراسته لمماسات المنحنيات ومسائل المساحة. ثم بعد ما يقارب 150 سنة عرف كوشي النهاية عام 1821. ثم استخدمت النهايات لتعريف المشتقة.

7.1 المشتقة وقوانين الاشتقاق

تعريف 7.1: المشتقة

لتكن I فترة، ولتكن f دالة معرفة على I. إذا كانت $c \in I$ وكانت النهاية

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

موجودة، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق عند c، ونكتب

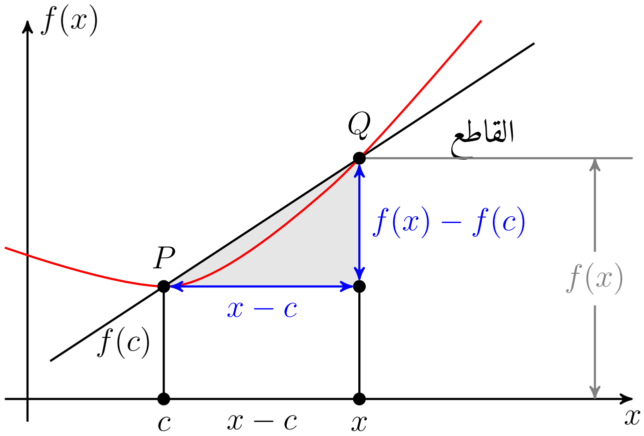
$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في I، فإن f قابلة للاشتقاق على I.

إذا كانت $I=[a,b]$ فإن المشتقة عند a, b تعرف كما يلي

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$



مثال 7.1.
أوجد مشتقة الدوال الآتية عند النقطة $c \in \mathbb{R}$.

1. الدالة الثابتة $f(x) = k$.

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{k-k}{x-c} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{x^n-c^n}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{(x-c)(x^{n-1}+x^{n-2}c+\ldots+c^{n-1})}{x-c} \\ &= (c^{n-1}+c^{n-2}c+\ldots+c^{n-1}) \\ &= nc^{n-1} \end{aligned}$$

3. $f(x) = |x|$.

إذا كانت $c > 0$، وليكن $x > 0$،

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{|x|-|c|}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{x-c}{x-c} \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذا كانت $c < 0$، وليكن $x < 0$،

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{|x|-|c|}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{(-x)-(-c)}{x-c} \\ &= -1 \end{aligned}$$

إذا كانت $c = 0$،

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

إذا الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $c = 0$.

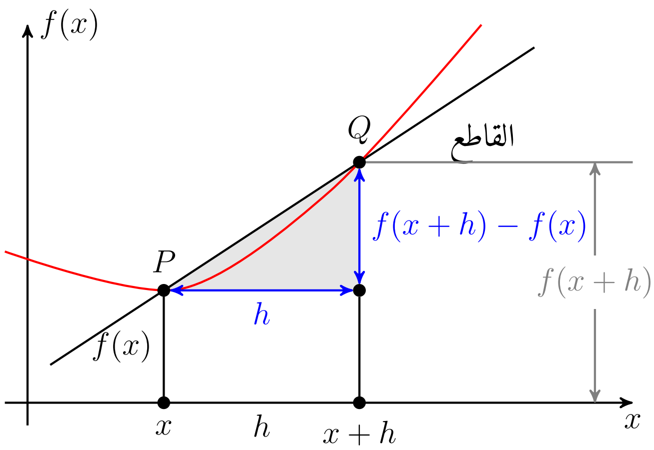
يمكن كذلك تعريف المشتقة للدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

إذا كانت $x \in (a, b)$. وتعرف المشتقة عند a, b كما يلي:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$



تعريف 7.2: المشتقة اليمنى واليسرى

إذا كانت الدالة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة c فإن المشتقة اليمنى واليسرى تعطى بالعلاقة

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

مثال 7.2.
لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \sin x$، نحسب النهاية

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

مبرهنة 7.1

إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فهي متصلة عند c.

البرهان:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) &= f(c) \end{aligned}$$

إذا الدالة متصلة عند c. □

لاحظ أن اتصال f عند c لا يكفي لضمان وجود $f'(c)$، فمثلا $f(x) = |x|$ متصلة عند 0 ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0.

مبرهنة 7.2

إذا كانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فإن

1. $f + g$ قابلة للاشتقاق $(g + f)'(c) = g'(c) + f'(c)$
2. fg قابلة للاشتقاق $(fg)'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$
3. إذا كانت $g(c) \neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

البرهان:

.1

$$\begin{aligned} (f+g)'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right] \\ &= g'(c) + f'(c) \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}(fg)'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{[f(x)g(x)]-[f(c)g(c)]}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\left[g(x)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]\\ &= g(c)f'(c)+f(c)g'(c)\end{aligned}$$

لأن g متصلة.

.3

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(c)}{g(c)}}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\frac{\dfrac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)}}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}\\ &= \lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)g(c)}\left[g(c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+f(c)\frac{g(c)-g(x)}{x-c}\right]\\ &= \frac{1}{g(c)^2}[g(c)f'(c)-f(c)g'(c)]\end{aligned}$$

لأن g متصلة.

□

إذا أخذنا $f = g$، ثم استخدمنا الاستقراء الرياضي نحصل على النتيجة الآتية.

نتيجة 7.1

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن

1. f^2 قابلة للاشتقاق عند c و $(f^2)'(c) = 2f(c)f'(c)$
2. f^n قابلة للاشتقاق عند c و $(f^n)'(c) = nf^{n-1}(c)f'(c)$

مثال 7.3. 1. من النتيجة السابقة $f(x) = x^n$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقتها $f'(x) = nx^{n-1}$.

2. كثيرة الحدود

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}\ldots + a_1 x + a_0$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقتها

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}\ldots + a_1$$

3. الدالة

$$f(x) = x^{-n}, \quad x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$، ويمكن اشتقاقها باستخدام قانون القسمة.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^n} \\ f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= \frac{-n}{x^{n+1}} \\ &= -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

مبرهنة 7.3: قاعدة السلسلة Chain Rule

إذا كانت I, J فترتين وكانت $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$، وكانت $f(I) \subset J$ و $g : J \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $f(c)$، فإن $gof : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند c ومشتقتها

$$(gof)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

قد يبدو البرهان الآتي مباشرا، ولكنه غير صحيح.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} &= \lim_{x\to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= g'(f(c)) \cdot f'(c) \end{aligned}$$

السبب أننا لا نضمن أن $f(x) - f(c)$ لا تساوي 0.

البرهان: لتكن $y = f(x)$ و $d = f(c)$، ولنعرف الدالة $h : f(I) \to \mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(d)}{y - d} & y \neq d \\ g'(d) & y = d \end{cases}$$

من الواضح أن h متصلة عند d. كما أنه لكل $y \in f(I)$، فإن

$$g(y) - g(d) = h(y)(y - d)$$

الآن إذا كان $x \in I$ و $x \to c$، فإن $y \to d$ لأن f متصلة.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} &= \lim_{x\to c} \frac{g(y) - g(d)}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{h(y)(y - d)}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c} h(y) \frac{(f(x) - f(c))}{x - c} \\ &= h(d) \cdot f'(c) \\ &= g'(d) \cdot f'(c) \\ &= g'(f(c)) \cdot f'(c) \end{aligned}$$

□

ملاحظات

1.
$$(gof)' = (g'of)\cdot f'$$

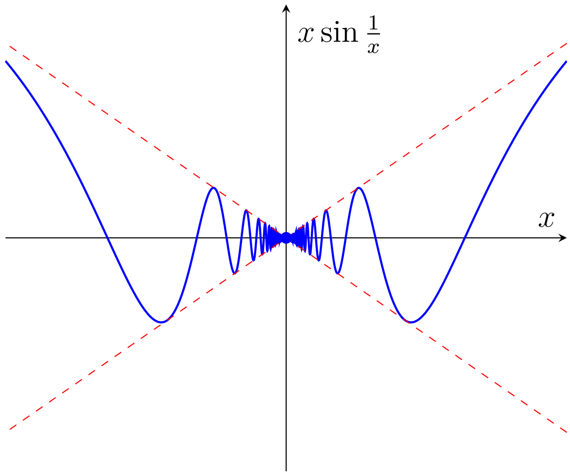
2. إذا كان
$$y = f(x), \qquad w = g(y)$$
فإن
$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

مثال 7.4. يمكن استخدام قاعدة السلسلة في إثبات
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
وذلك باعتبار
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x)$$
لتكن $h(y) = \frac{1}{y}$ و $y \neq 0$، وبالتالي $h'(x) = \frac{-1}{y^2}$
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = (h\circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

مثال 7.5.
ابحث قابلية الدوال الآتية للاشتقاق عند $x = 0$.

1.
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
هذه الدالة ليست متصلة فهي غير قابلة للاشتقاق عند 0.

2.
$$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
حتى نبحث قابلية الاشتقاق عند 0، نحسب النهاية الآتية
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$
وهذه النهاية غير موجودة، إذا الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0. ولو تأملنا شكل الدالة، فإننا نلاحظ أن اختيار أي نقطة قريبة من 0 ثم إيجاد ميل المستقيم المار بهذه النقطة والنقطة $(0,0)$ فإنه يمكن أن يساوي أي عدد بين -1 , 1.



.3

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

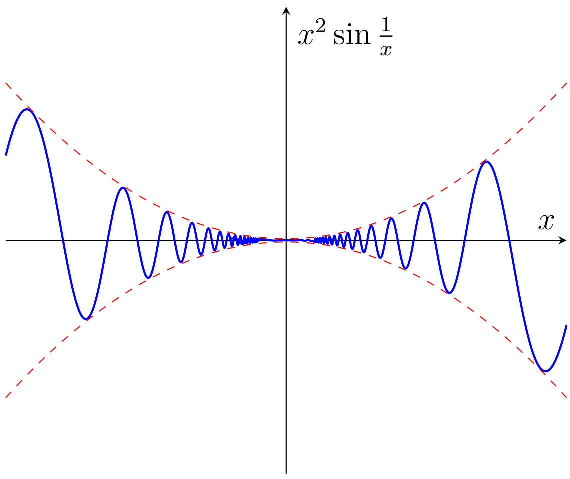
حتى نبحث قابلية الاشتقاق عند 0، نحسب النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

إذا $f'(0) = 0$. وهذا يعني أن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقتها

$$h'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

من الواضح أن $\lim_{x \to 0} h'(x)$ غير موجودة، إذا $h'(x)$ ليست متصلة.



تعريف 7.3:

نقول إن $f \in C^n[a,b]$ إذا كانت المشتقات $f', \ldots, f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a,b]$. ونقول إن $f \in C^\infty[a,b]$ إذا كانت جميع المشتقات موجودة، وتسمى f دالة ناعمة smooth funtion.

الدالة العكسية

إذا كانت f متصلة ومتباينة على فترة I، فإن

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in I$$

إذا كانت f و f^{-1} قابلة للاشتقاق، وكانت $f'(x) \neq 0$، فإن

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))\, f'(x) = 1$$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

مبرهنة 7.4: مشتقة الدالة العكسية

إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة على الفترة وقابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق عند $d = f(c)$ إذا وفقط إذا كانت $f'(c) \neq 0$

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

أو

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

البرهان: لنفرض أن $f'(c) \neq 0$ ولتكن $d = f(c)$ و $y = f(x)$، إي إن $c = f^{-1}(d)$ و $x = f^{-1}(y)$. وبما أن f^{-1} متصلة إذا

$$y \to d \quad \Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(d) \quad \Rightarrow x \to c$$

الآن نوجد النهاية

$$\lim_{y \to d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \lim_{x \to c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)}$$
$$= \frac{1}{f'(c)}$$

إذا

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

□

مثال 7.6.

1. الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^3$ متباينة وقابلة للاشتقاق. لإيجاد $(f^{-1})'(8)$، نلاحظ أن $y=8=2^3$، إذا $x=2$ إذا

$$(f^{-1})'(8)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3x^2|_{x=2}}=\frac{1}{12}$$

لاحظ أن f^{-1} غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن $f'(0)=0$.

2. الدالة $f:[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=\sin x$ متباينة وقابلة للاشتقاق. وبما أن

$$f'(x)=\cos x>0 \quad \forall\, x\in(-\pi/2,\pi/2)$$

فإن الدالة $f^{-1}(x):[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$ المعرفة بالقاعدة

$$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$$

كما يرمز لها بالرمز $\arcsin x$ قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\sin^{-1}x\right)&=x\\ \cos(\sin^{-1}x)(\sin^{-1}x)'&=1\\ (\sin^{-1}x)'&=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

وهذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 1 و -1 لأن

$$f'(\pi/2)=f'(-\pi/2)=0$$

مثال 7.7.

1. إذا كانت $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ معرفة على

$$D=\begin{cases}\mathbb{R}-\{0\} & n \text{ فردي}\\ (0,\infty) & n \text{ زوجي}\end{cases}$$

فإن f قابلة للاشتقاق على D.
حتى نرى ذلك، لنعرف $g:D\to\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$g(x)=x^n$$

هذه الدالة متزايدة فعلا وقابلة للاشتقاق على D، وبالتالي دالتها العكسية $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ متزايدة فعلا وقابلة للاشتقاق على D، ونحصل على المشتقة كما يلي

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n&=x\\ n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'&=1\\ \left(x^{\frac{1}{n}}\right)'&=\frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}\\ &=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

2. إذا كانت $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$ معرفة على

$$D = \begin{cases} \mathbb{R} - \{0\} & \text{فردي } n \\ (0, \infty) & \text{زوجي } n \end{cases}$$

فإن f قابلة للاشتقاق على D. ولإيجاد المشتقة

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \\ h'(x) &= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \\ &= mx^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}\ \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

تمارين 7.1

1. باستخدام التعريف أوجد مشتقات الدوال الآتية

(ا) $f(x) = x^2$

(ب) $\star$ $f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$

(ج) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \neq 0$

2. أثبت أن الدالة $f(x) = x^{1/3}$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

3. أوجد مجموعة النقاط التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.

(ا) $\star$ $f(x) = |x^2 - 1|$

(ب) $f(x) = |x| + |x + 1|$

(ج) $\star$ $f(x) = x|x|$

(د) $f(x) = |\sin x|$

4. $\star$ أثبت أن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند $x = 0$، ثم أوجد $f'(0)$.

5. $\star$ إذا كانت f تحقق

$$|f(x)| \leq |x|^r$$

في جوار 0 وكان $r > 1$، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

6. إذا كانت f تحقق

$$|f(x)| \geq |x|^\alpha$$

و $f(0) = 0$، وكان $0 < \alpha < 1$، فأثبت أن f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

7. إذا كانت $n \in \mathbb{N}$، وكانت
$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
ما قيم n التي تكون فيها f' متصلة؟ وما قيم n التي تكون فيها الدالة f' قابلة للاشتقاق عند 0.

8. إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c، فأثبت أن
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}$$
ثم أعط مثالا على دالة غير قابلة للاشتقاق عند c ولكن النهاية موجودة.

9. $\star$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق، فأثبت أن f' فردية إذا كانت f زوجية، و f' زوجية إذا كانت f فردية.

10. إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند c، و $f(c) = 0$، فأثبت أن $g(x) = |f(x)|$ قابلة للاشتقاق عند c، إذا وفقط إذا كانت $f'(c) = 0$.
أثبت أنه يوجد $c \in [0,1]$ بحيث $g'(c) = 1$.

11. إذا كانت
$$f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$$
فإن f أحادية، ولها معكوس
$$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x, \quad x \in [-1, 1]$$
أثبت أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$، وأوجد مشتقتها، ثم بين أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند -1 و 1

12. $\star$ إذا كانت $g(0) = g'(0) = 0$، فأوجد $f'(0)$ حيث
$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

13. إذا كان $r \in \mathbb{Q}^+$، وكانت
$$f(x) = \begin{cases} x^r \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
وكانت $f'(0)$ موجودة، فأوجد جميع القيم الممكنة للعدد r.

14. إذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} x^{2r} \tan^{-1} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
وكانت $f'(0)$ موجودة، فأوجد جميع القيم الممكنة للعدد $r \in \mathbb{Q}^+$.

15. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند c، فأثبت أن
$$f'(c) = \lim(n[f(c + 1/n) - f(c)]$$
ثم أوجد مثالا يوضح أن وجود النهاية غير كاف لضمان وجود $f'(c)$.

16. أثبت أن الدالة $f(x) = x^3 + 2x + 1$ أحادية، لها معكوس، ثم أوجد مشتقة دالتها العكسية.

7.2 مبرهنة القيمة المتوسطة

تعتبر مبرهنة القيمة المتوسطة من المبرهنات المهمة في حساب التفاضل، ويمكن من خلالها إثبات العديد من المبرهنات المتعلقة بتصرف الدالة.

تعريف 7.4: القيم القصوى المحلية

نقول إن للدالة $f : D \to \mathbb{R}$ قيمة عظمى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار $U = (c-\delta, c+\delta)$ بحيث

$$f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in U \cap D$$

ولها قيمة صغرى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار $U = (c-\delta, c+\delta)$ بحيث

$$f(x) \geq f(c) \qquad \forall x \in U \cap D$$

المبرهنة الآتية تعطي شرطا ضروريا ولكنه غير كاف حتى يكون للدالة القابلة للاشتقاق قيمة قصوى عند نقطة.

مبرهنة 7.5: قيمة المشتقة عند القيم القصوى

إذا كان للدالة f قيمة قصوى على الفترة المفتوحة (a, b) عند النقطة c وكانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن

$$f'(c) = 0$$

البرهان: لنفرض أن $f(c)$ قيمة عظمى، إذا لكل $x \in (a, b)$، فإن

$$f(x) \leq f(c) \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(c) \leq 0$$

الآن إذا كانت $x \in (a, c)$، فإن

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$
$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

أما إذا كانت $x \in (c, b)$، فإن

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$
$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

إذا $f'(c) = 0$. وبالمثل يمكن الإثبات لو كانت $f(c)$) قيمة صغرى. □

تعريف 7.5: النقاط الحرجة

نقول إن c نقطة حرجة للدالة f إذا كانت

1. f غير قابلة للاشتقاق عند c
2. أو كانت $f'(c) = 0$

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند نقطة c فإن c نقطة حرجة للدالة f. (مثلا الدالة $f(x) = |x|$ المعرفة على الفترة $(-1, 1)$ لها قيمة صغرى عند 0)
2. إذا كان للدالة $f : D \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند نقطة c حيث c تقع داخل D فإن c نقطة حرجة للدالة f.
3. إذا كان للدالة $f : D \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى عند c حيث c تقع في حافة D فإن c ليست بالضرورة نقطة حرجة للدالة f

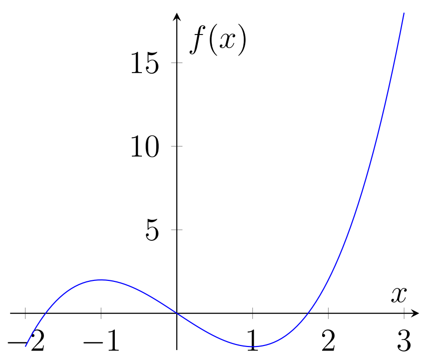
   مثال: $f(x) = x^2$ لها قيمة عظمى على الفترة $[1, 2]$ وهي $f(2) = 4$ ولكن 2 ليست نقطة حرجة.
4. إذا كانت c نقطة حرجة للدالة f فليس من الضروري أن يكون للدالة قيمة قصوى عند c

   مثال: $f(x) = x^3$ عند $x = 0$

مثال 7.8.

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 - 3x$$



نوجد النقاط الحرجة

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

ونوجد قيمة الدالة عند أطراف الفترة والقيم الحرجة.

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(-2) = -2, \quad f(3) = 18$$

إذا القيمة العظمى 18، والقيمة الصغرى -2

مبرهنة 7.6: مبرهنة رول

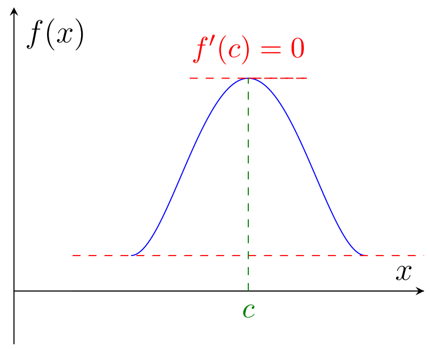
إذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f'(c) = 0$$

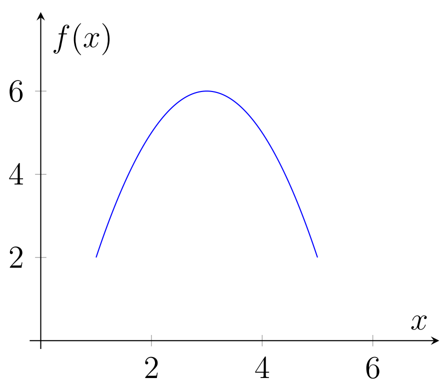
البرهان: إذا كانت $f(x) = k$ دالة ثابتة فإن $f'(x) = 0$، وبالتالي نستطيع اختيار أي عدد $c \in (a, b)$، وتكون $f'(c) = 0$.
إذا كانت f ليست ثابتة، فإنها تأخذ قيمتها العظمى والصغرى على الفترة $[a, b]$، وبالتالي أحد القيمتين يظهر عند $c \in (a, b)$، وبالتالي $f'(c) = 0$. □



مثال 7.9.
لتكن $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = -x^2 + 6x - 3$$

أوجد c التي تحقق مبرهنة رول.



الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق على مجالها، كما أن $f(1) = f(5) = -1$. نوجد مشتقة الدالة

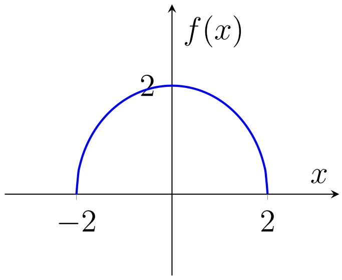
$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

نختار $c = 3 \in (1, 5)$.

في مبرهنة رول، لايشترط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند أطراف الفترة. المثال التالي يوضح ذلك.

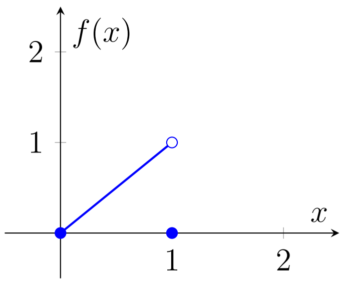
مثال 7.10.
الدالة $f(x) = \sqrt{4-x^2}$، تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-2,2]$، وذلك باختيار $c = 0$، رغم أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $2, -2$.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$



مثال 7.11.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$



هذه الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول، لأنها غير متصلة.

إذا أهملنا الشرط الأخير في مبرهنة رول، نحصل على مبرهنة أعم تعرف بمبرهنة القيمة المتوسطة. وتكمن أهمية هذه المبرهنة أنها تربط بين الدالة ومشتقتها بدون استخدام النهاية. وهذا يعني أننا نستطيع الحصول على معلومات عن الدالة بمعرفة بعض خواص المشتقة.

مبرهنة 7.7: مبرهنة القيمة المتوسطة

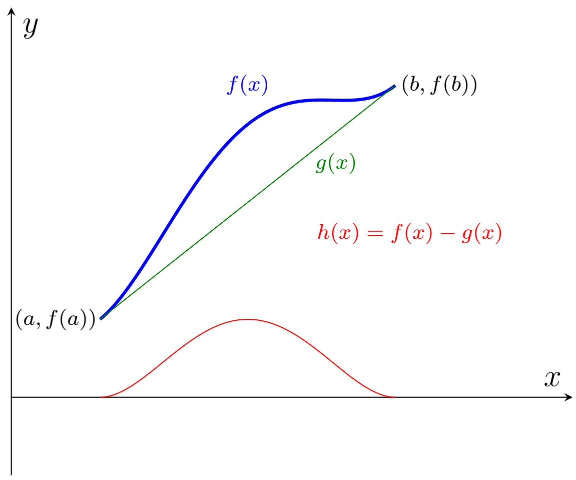
إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a,b]$
2. قابلة للاشتقاق على (a,b)

فإنه يوجد $c \in (a,b)$ بحيث

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

البرهان:



لتكن $g(x)$ تمثل معادلة المستقيم الواصل بين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ ، إذا

$$\frac{g(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ولنعرف

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

بالتعويض نحصل على $h(a) = h(b) = 0$. ومن مبرهنة رول يوجد $c \in (a, b)$، بحيث

$$h'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

مثال 7.12.
لتكن $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = x^3$$

أوجد c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة.

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$
$$8 = (3c^2)(2)$$
$$c = \pm\sqrt{2}$$

نختار القيمة الموجودة في $(0, 2)$، أي $c = \sqrt{2}$.

من الممكن الوصول لمتباينات مهمة عن طريق تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة، وفيما يلي نورد مثالا لذلك.

مثال 7.13.
أثبت أن
$$\sin x \leq x \qquad \forall x \geq 0$$
إذا كان $x = 0$، فإن المتباينة متحققة. إذا كان $x > 0$، فإن الدالة $f(x) = \sin x$ متصلة على $[0, x]$، وقابلة للاشتقاق على $(0, x)$، ومن مبرهنة القيمة المتوسطة، فإنه يوجد $c \in (0, x)$ بحيث
$$\sin x - \sin 0 = \cos c\,(x - 0)$$
$$\sin x \leq x$$
تمرين 7.14. أثبت أن
$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \geq 0$$
تساعد مبرهنة القيمة المتوسطة في إثبات العديد من المبرهنات المهمة، وفيما يلي نوضح العلاقة بين مشتقة الدالة وتحقيق الدالة لشرط ليبشتز.

مبرهنة 7.8

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة I، فإن f' محدودة على I، إذا وفقط إذا كانت f تحقق شرط ليبشتز على I.

البرهان: إذا كانت f' محدودة بالعدد $K > 0$، وكان $x, y \in I$ و $x \neq y$، فإنه من مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد c بين x و y بحيث
$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \leq K$$
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$
إذا f تحقق شرط ليبشتز.
لنفرض أن f تحقق شرط ليبشتز، إذا يوجد عدد K بحيث لكل $c \in I$
$$|f(x) - f(c)| \leq K|x - c|$$
$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right| \leq K$$
$$\lim_{x \to c}\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right| \leq K$$
$$|f'(c)| \leq K$$
□

ملاحظة

أي دالة تحقق شرط ليبشتز، فهي متصلة بانتظام.

مثال 7.15.

1. الدالة $f(x) = \sin x$ قابلة للاشتقاق، ومشتقتها محدودة $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$، إذا فهي تحقق شرط ليبشتز على $\mathbb{R}$. وهذا يعني أنها متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \tan^{-1} x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، كما أن

$$|f'(x)| = \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

إذا f تحقق شرط ليبشتز على $\mathbb{R}$. وهذا يعني أنها متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

3. الدالة $f(x) = \log x$ قابلة للاشتقاق على $[2, \infty)$، كما أن

$$|f'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

إذا f تحقق شرط ليبشتز على $[2, \infty)$. وهذا يعني أنها متصلة بانتظام على $[2, \infty)$.

4. الدالة $f(x) = \log x$ قابلة للاشتقاق على $(0, 1)$، كما أن

$$|f'(x)| = \frac{1}{x}$$

ليست محدودة على الفترة $(0, 1)$، إذا f لا تحقق شرط ليبشتز على $(0, 1)$.

مبرهنة 7.9:

إذا كانت الدالة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ متصلة، وقابلة للاشتقاق (ماعدا ربما عند $c \in (a, b)$) وكانت $\lim_{x\to c} f'(x)$ موجودة، فإن $f'(c)$ موجودة، كما أن

$$f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x)$$

البرهان: الدالة f متصلة على $[c, x] \subset (a, b)$، وقابلة للاشتقاق على (c, x)، ومن مبرهنة القمية المتوسطة يوجد $\alpha_x \in (c, x)$ بحيث

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\alpha_x)$$

وبما أن النهاية $\lim_{x\to c^+} f'(\alpha_x)$ موجودة، إذا النهاية

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة، وبطريقة مشابهة $f'_-(c)$ موجودة، وبالتالي $f'(c)$ موجودة، كما أن

$$f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x)$$

□

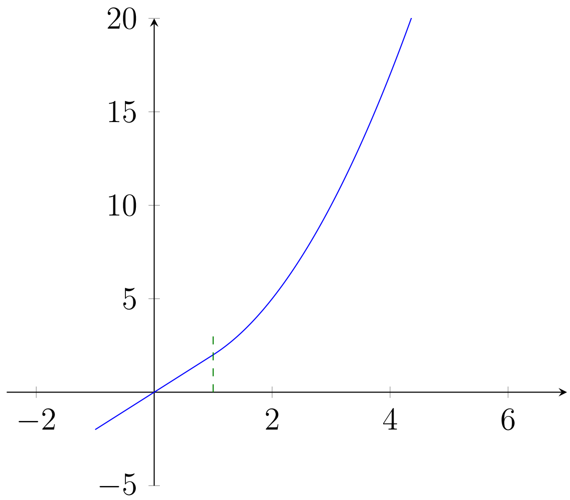
المبرهنة تعطي شرطا كافيا لوجود المشتقة، وهو وجود النهاية $\lim_{x\to c} f'(x)$. فإذا كانت النهاية موجودة، فالدالة قابلة للاشتقاق، أما إذا كانت النهاية غير موجودة، فقد تكون المشتقة موجودة وقد لا تكون.
إذا كانت كل من $f'_+(c)$ و $f'_-(c)$ موجودة، فإن $f'(c)$ موجودة إذا وفقط إذا كان $f'_+(c) = f'_-(c)$. أما إذا كانت إحدى النهايتين غير موجودة فلا نستنتج شيئا عن وجود المشتقة.

مثال 7.16.
الدالة
$$f(x)=\begin{cases}2x^2+4 & x\geq 2\\ 8x & x<2\end{cases}$$
غير متصلة عند $x=2$، فهي غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$.

مثال 7.17.
إذا عرفنا f على $\mathbb{R}$ كما يلي
$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ 2x & x<1\end{cases}$$
فإن هذه الدالة متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$، ومشتقتها
$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 2 & x<1\end{cases}$$

وبما أن
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=2$$

إذا
$$f'(1)=\lim_{x\to 1} f'(x)=2$$



مثال 7.18.
إذا عرفنا f على $\mathbb{R}$ كما يلي
$$f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\geq 1\\ 3x & x<1\end{cases}$$
فإن هذه الدالة متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$، ومشتقتها
$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 3 & x<1\end{cases}$$

كما أن

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 3$$

وبما أن النهاية اليمنى واليسرى للمشتقة موجودة وغير متساوية، إذا $f'(1)$ غير موجودة.

مثال 7.19.
الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ على الرغم من أن $\lim_{x\to 0} f'(x)$ غير موجودة، وقيمة المشتقة تساوي:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

لاحظ أن عدم اتصال المشتقة ليس من نوع القفزة

مبرهنة 7.10

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على (a,b)

1. إذا كان $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f دالة ثابتة على $[a,b]$
2. إذا كان $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f دالة متباينة على $[a,b]$

البرهان:

1. إذا كانت $f'(x) = 0$، فإنه لكل $x, y \in [a,b]$، و $x < y$، فإنه من مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد $c \in (x,y)$ بحيث
$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) = 0$$
أي
$$f(x) = f(y)$$
إذا f دالة ثابتة.
2. لنفرض أن f ليست متباينة، إذا يوجد $x, y \in [a,b]$، و $x < y$ بحيث $f(x) = f(y)$. من مبرهنة رول يوجد $c \in (x,y)$ بحيث
$$f'(c) = 0$$
وهذا تناقض.

□

نتيجة 7.2

لتكن $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ متصلة على $[a, b]$ و قابلة للاشتقاق على (a, b)
إذا كان
$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in (a, b)$$
فإنه يوجد ثابت $c \in \mathbb{R}$ بحيث
$$f(x) = g(x) + c \qquad \forall x \in [a, b]$$

البرهان: نأخذ $h(x) = f(x) - g(x)$ في المبرهنة السابقة. □

مبرهنة 7.11

لتكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ متصلة على $[a, b]$ و قابلة للاشتقاق على (a, b)

1. إذا كان $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f متزايدة على $[a, b]$
2. إذا كان $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f متناقصة على $[a, b]$
3. إذا كان $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f متزايدة فعلا على $[a, b]$
4. إذا كان $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f متناقصة فعلا على $[a, b]$

البرهان: سنثبت الحالة الأولى عندما تكون $f'(x) \geq 0$. ليكن $x, y \in [a, b]$ و $x < y$. من مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد $c \in (x, y)$ بحيث
$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) \geq f(x)$$
إذا f متزايدة. ويمكن إثبات بقية الحالات بطريقة مشابهة. □

ملاحظات

1. في المبرهنتين السابقتين، إذا أسقطنا شرط الاتصال على الفترة $[a, b]$ فإن النتيجة صحيحة، لكن على الفترة (a, b)
2. f متزايدة على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كان $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in (a, b)$
3. f متناقصة على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كان $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in (a, b)$
4. إذا كانت f متزايدة فعلا فلا يشترط أن يكون $f'(x) > 0$، فمثلا الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة فعلا، ولكن $f'(0) = 0$.

مبرهنة 7.12: اختبار المشتقة الأولى

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة متصلة، و c نقطة حرجة للدالة f

1. إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث
$$f'(x) < 0 \qquad \forall x \in U, x < c$$

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in U, x > c$$

فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

2. إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in U, x < c$$

$$f'(x) < 0 \qquad \forall x \in U, x > c$$

فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

3. إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D$ حول c بحيث يكون للمشتقة $f'(x)$ نفس الإشارةلكل $x \in U - \{c\}$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى للدالة f

البرهان: سنثبت (1)، والبقية يمكن إثباتها بطريقة مشابهة. إذا كانت $x < c$ و $x \in U$، فإن $f'(x) < 0$، وبالتالي f متناقصة فعلا، إذا

$$f(c) < f(x) \qquad \forall\ x \in U, x < c$$

أما إذا كانت $x > c$ و $x \in U$ ، فإن $f'(x) > 0$ ، وبالتالي f متزايدة فعلا، إذا

$$f(c) < f(x) \qquad \forall\ x \in U, x > c$$

إذا $f(c)$ قيمة صغرى محلية. □

المبرهنة التالية تعميم لمبرهنة القيمة المتوسطة، وتعرف بمبرهنة كوشي للقيمة المتوسطة.

مبرهنة 7.13: مبرهنة كوشي للقيمة المتوسطة

إذا كانت $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. متصلة على $[a, b]$

2. قابلة للاشتقاق على (a, b)

فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

البرهان: نعرف h على $[a, b]$ كما يلي

$$h(x) := [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

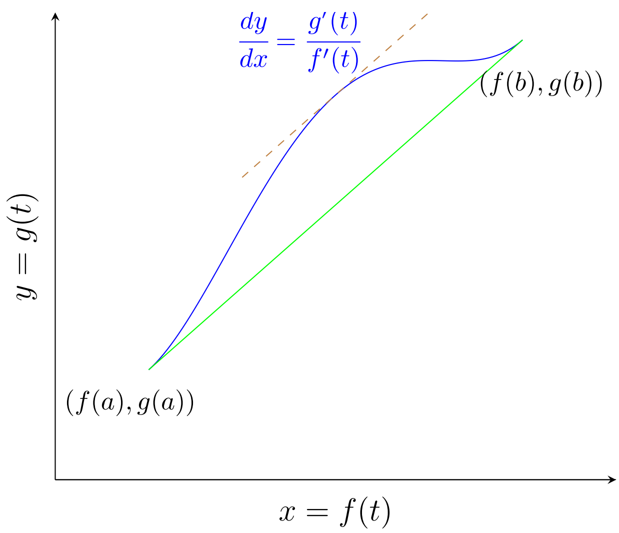
هذه الدالة تحقق شروط مبرهنة رول، وبالتالي يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$$

إذا

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

□



بوضع $g(x) = x$ نحصل على مبرهنة القيمة المتوسطة.

المبرهنة التالية توضح متى تكون المشتقة العكسية موجودة حتى ولو لم تكن الدالة متباينة في مجالها.

مبرهنة 7.14: مشتقة الدالة العكسية

إذا كانت $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ومشتقتها f' متصلة على I وكانت $b \in I$ و $f'(b) \neq 0$ فإنه يوجد فترة مفتوحة $J \subset I$ تحتوي b بحيث تكون الدالة $f|_J$ متباينة والدالة $(f|_J)^{-1}$ قابلة للاشتقاق عند $f(b)$

$$\left((f|_J)^{-1}\right)'(f(b)) = \frac{1}{f'(b)}$$

البرهان: بما أن f' متصلة عند b إذا يوجد $\delta > 0$ و $M > 0$ بحيث

$$|f'(x)| > M \quad \forall x \in J = (b - \delta, b + \delta)$$

وبالتالي $f|_J$ متباينة، إذا $(f|_J)^{-1}$ قابلة للاشتقاق عند $f(b)$ ومشتقتها تساوي

$$\left((f|_J)^{-1}\right)'(f(b)) = \frac{1}{f'(b)}$$

□

نختم هذا الفصل بتوضيح أن المشتقة تتمتع بخاصية القيمة البينية رغم أننا لا نضمن أن تكون المشتقة موجودة. وهذا يعني أنه لا يمكن أن يكون نوع عدم الاتصال في المشتقة من نوع القفزة، وتعرف بمبرهنة داربو Darboux.

مبرهنة 7.15: مبرهنة داربو: الخاصية البينية للمشتقة

إذا كانت $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وكانت λ تقع بين $f'(a)$ و $f'(b)$ أي إن

$$f'(a) < \lambda < f'(b) \qquad \text{أو} \qquad f'(b) < \lambda < f'(a)$$

فإنه يوجد فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f'(c) = \lambda$$

البرهان: لنفرض أن

$$f'(a) < \lambda < f'(b)$$

وإلا فيمكن استخدام $-f$. نعرف

$$g(x) := f(x) - \lambda x \quad \forall x \in [a, b]$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[a, b]$

$$g'(x) = f'(x) - \lambda$$

إذا وُجد $c \in (a, b)$ بحيث $g'(c) = 0$، فإن $f'(c) = \lambda$. إما إذا لم يوجد c بحيث $g'(c) = 0$، فإن $g'(x) \neq 0$. لنفرض أن $g'(x) > 0$، إذا g متزايدة فعلا، وبالتالي

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

وبالتالي

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$$

$$f'(a) - \lambda \geq 0$$

$$f'(a) \geq \lambda$$

وهذا تناقض مع

$$f'(a) < \lambda$$

وبطريقة مشابهة نثبت الحالة التي تكون فيها $g'(x) < 0$، ونجد أن

$$g'(b) \leq 0$$

وهذا تناقض مع المعطى. □

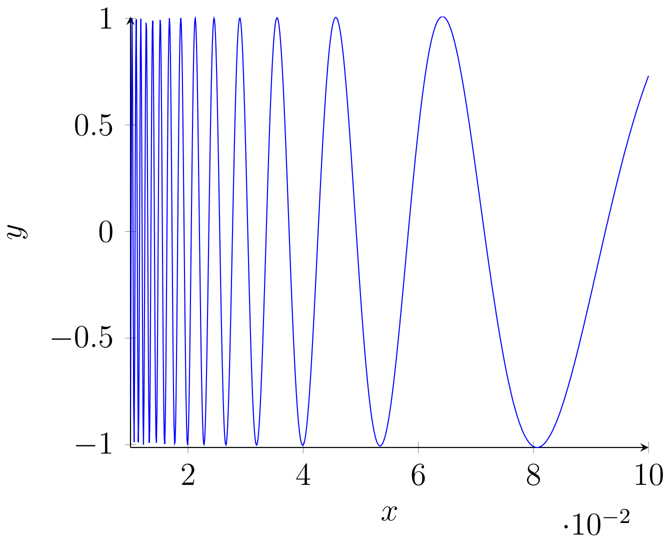
مثال 7.20.
سبق أن أثبتنا أن الدالة f المعرفة بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومشتقتها

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن المشتقة غير متصلة عند 0. ولكنها تحقق خاصية القيمة البينية للمشتقة في أي جوار للعدد 0. أي أن عدم اتصال المشتقة ليس من نوع القفزة.



نستنتج من نظرية داربو أنه يوجد دوال لا يمكن أن تكون مشتقة لأي دالة كما في المثال التالي.

مثال 7.21.
الدالة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

ليست مشتقة لأي دالة في جوار 0. لأنها لا تحقق خاصية القيمة البينية للمشتقة في جوار 0.

7.2 تمارين

1. عرف دالة f متصلة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على $(0,1)$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 وعند 1. ثم أوجد $c\in(0,1)$، بحيث $f'(c)=0$.

2. أعط مثالا يوضح أن عدم وجود $f'(x)$ عند نقطة واحدة في الفترة (a,b) يخل بمبرهنة القيمة المتوسطة.

3. في الدوال الآتية حدد ما إذا كان بالإمكان تطبيق نظرية القيمة المتوسطة، وإن كان بالإمكان تطبيقها فحدد قيمة c التي تحقق النظرية.

   (ا) $f(x)=x^3,\quad x\in[-2,2]$

   (ب) $f(x)=|x|,\quad x\in[-1,1]$

   (ج) $f(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,1]$

   (د) $$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[1,2]\\ 1 & x\in[-1,1)\end{cases}$$

4. أثبت أن الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة c تحقق شرط ليبشتز في جوار للنقطة c.

5. $\star$ أثبت أنه لكل $x,y\in\mathbb{R}$، فإن

$$|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$$

6. أثبت أن

$$x<\tan x\quad \forall\, x\in(0,\pi/2)$$

7. ⋆ أثبت أن
$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \forall\, x > 0$$

8. إذا كانت f و g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، وكان
$$f'(x) < g'(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
فأثبت أنه لكل $a \in \mathbb{R}$، فإن
$$f(x) - f(a) \le g(x) - g(a) \quad \forall\, x \in [a, \infty)$$

9. إذا كانت f قابلة للاشتقاق وكان
$$1 \le f'(x) \le 2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
وكان $f(0) = 0$، فأثبت أن
$$|x| \le |f(x)| \le 2|x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

10. أوجد القيم القصوى المحلية للدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$، وحدد فترات التزايد والتناقص

(ا) $f(x)x^4 + 2x^2 = 5$

(ب) $f(x) = x^2 - 4x$

(ج) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(د) $f(x) = |x^2 - 2x|$

(هـ) $f(x) = x(x-1)^{1/3}$

11. إذا كانت
$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$$
حيث $a_k \in \mathbb{R}$، فما القيمة الصغرى للدالة f؟

12. إذا كان $a > b > 0$، فأثبت أن
$$a^{1/n} - b^{1/n} < (a-b)^{1/n} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$
(إرشاد: بين أن الدالة $f(x) := x^{1/n} - (x-1)^{1/n}$ متناقصة عندما $x \ge 1$، وأوجد قيمة الدالة عند 1 و a/b)

13. أعط مثالا لدالة متصلة بانتظام على $[0,1]$، وقابلة للاشتقاق على $(0,1)$، ولكن مشتقتها غير محدودة على $(0,1)$.

14. ⋆ باستخدام التعريف، أثبت أن الدالة $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ثم برهن وجود $c \in (0,1)$ بحيث
$$\sqrt{2} - 1 = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

15. بين أن $f'(0) > 0$, ولكنها غير متزايدة في أي جوار للنقطة $x = 0$ حيث
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + \frac{x}{2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

16. بين أن لدالة f

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 2x^4+x^4\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

لها قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ ولكن المشتقة تكون موجبة وسالبة في كل جوار للنقطة 0.

17. إذا كانت $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق، و $f(0)=f(1)$، وكانت $g(x)=f(x^3)+x$، فأثبت أنه يوجد $c\in[0,1]$ بحيث $g'(c)=1$.

18. أثبت أن الدالة

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 1/x & x>1\\ \frac{3-x^2}{2} & x\leq 1\end{cases}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أوجد $c\in(0,2)$ بحيث $f(2)-f(0)=2f'(c)$.

19. إذا كانت $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ متصلة، وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,\infty)$، وكانت f' متزايدة على $(0,\infty)$، و $f(0)=0$، فأثبت أن $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ متزايدة على $(0,\infty)$. (إرشاد: احسب $g'(x)$ ثم طبق نظرية القيمة المتوسطة على f).

20. إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وكان $f(0)=0, f(1)=f(2)=1$، فأثبت وجود $c_1,c_2,c_3\in(0,2)$ بحيث

$$f'(c_1)=\frac{1}{2},\qquad f'(c_2)=\frac{3}{4},\qquad f'(c_3)=\frac{1}{11}$$

21. إذا كانت f و g متصلتان على $[a,b]$ وقابلتان للاشتقاق على (a,b) وكان

$$f(a)=f(b),\quad g(a)=g(b)$$

فأثبت أنه يوجد $c\in(a,b)$ بحيث

$$f'(c)+f(c)g'(c)=0$$

22. إذا كانت f متصلة على $[0,\infty)$ وقابلة للاشتقاق على الفترة$(0,\infty)$ وكان

$$f(x)+xf'(x)\geq 0\quad\forall x>0$$

فأثبت أن $f(x)\geq 0$ لكل $x\geq 0$.

23. إذا كانت $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$، وكانت $\lim_{x\to\infty}f'(x)=L$، فأثبت ما يلي

(ا) إذا كانت $h>0$، فإن $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=L$

(ب) إذا كان $\lim_{x\to\infty}f(x)=K$، فإن $L=0$.

(ج) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=L$

24. إذا كانت f,g دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$، وكان $f(0)=g(0)$، و $f'(x)\leq g'(x)$ لكل $x\in[0,\infty)$، فأثبت أن $f(x)\leq g(x)$ لكل $x\in[0,\infty)$.

25. ⋆ إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق العلاقة التالية، فأثبت أن f دالة ثابتة

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|^2\quad\forall x,y\in\mathbb{R},K>0$$

7.3 قاعدة لوبيتال

إذا أردنا إيجاد النهاية

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

وكانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim_{x\to c} f(x) = K \neq 0$، فإن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$$

ولكن لو كانت $K = 0$، وكانت $L \neq 0$، فإن النهاية غير موجودة في $\mathbb{R}$، إما إذا كان $L = K = 0$، فإن النهاية قد تكون موجودة، وقد لا تكون. قاعدة لوبيتال تسهل إيجاد بعض النهايات عندما تكون $L = K = 0$.

النهايات من النوع $\left(\frac{0}{0}\right)$

مبرهنة 7.16: قاعدة لوبيتال

إذا كانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ متصلة وقابلة للاشتقاق على I، وكانت $c \in I$ وكان

1. $g(x) \neq 0 \qquad \forall x \in I\backslash\{c\}$
2. $f(c) = g(c) = 0$
3. $g'(c) \neq 0$

فإن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

البرهان: بما أن $f(c) = g(c) = 0$، إذا

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c}\frac{\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

مبرهنة 7.17: قاعدة لوبيتال

إذا كانت $c \in I$ وكانت $f, g : I \to \mathbb{R}$ متصلة على I وقابلة للاشتقاق على $I\backslash\{c\}$ وكان

1. $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in I\backslash\{c\}$
2. $f(c) = g(c) = 0$
3. النهاية $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty, \infty\}$

فإن
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان: لتكن (x_n) متتالية في I، و $x_n\neq c$ و $x_n\to c$، فإنه يكفي إثبات أن
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}$$
من مبرهنة كوشي للقيمة المتوسطة، يوجد c_n يقع في الفترة بين c و x_n بحيث
$$[f(x_n)-f(c)]g'(c_n)=[g(x_n)-g(c)]f'(c_n)$$
$$f(x_n)g'(c_n)=g(x_n)f'(c_n)$$
وبما أن $g'(x)\neq 0$ لكل $x\in I\backslash\{c\}$ فإن g متباينة على الفترة بين c و x_n وبالتالي $g(x_n)\neq g(c)=0$، ونحصل على
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
□

مثال 7.22.
لإيجاد النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+4x}$، نلاحظ أن الدالتين تحققان شروط لوبيتال على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$، وبالتالي
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x+4}=\frac{1}{4}$$

مبرهنة 7.18

إذا كانت $a>0$ وكانت $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق

1. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$
2. $g'(x)\neq 0 \qquad \forall x>a$
3. النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$

فإن
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان: نعرف
$$F(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}) & x\in(0,\frac{1}{a}] \\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} g(\frac{1}{x}) & x\in(0,\frac{1}{a}] \\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}, \qquad\qquad t=\frac{1}{x}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

□

ملاحظات

إن النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$ تعتبر نوعا من أنواع عدم التعيين (indeterminate forms) ويرمز لها بالرمز $\frac{0}{0}$، ويوجد عدد من حالات عدم التعيين مثل

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0\cdot\infty$$

$$\infty-\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

النهايات من النوع $(\frac{\infty}{\infty})$

مبرهنة 7.19

إذا كانت $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق

1. $\forall x\in(a,b) \qquad g'(x)\neq 0$
2. $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$
3. النهاية $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$

فإن

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان: سنثبت الحالة التي تكون فيها النهاية $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ حيث $L\in\mathbb{R}$. ليكن $\varepsilon>0$ معطى، إذا يوجد $\delta>0$ و $a+\delta<b$ بحيث

$$0<x-a<\delta \quad\Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon$$

بما أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$، إذا يوجد عدد $d_1 \in (a, a+\delta)$، وعدد $d_2 \in (a, d_1)$ بحيث

$$x \in (a, d_2) \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(d_1)$$

بما أن g متباينة، إذا $g(x) \neq g(d_1)$ لكل $x \in (a, d_2)$. لنعرف الدالة h على الفترة (a, d_2) بالقاعدة

$$h(x) = \frac{1 - \dfrac{f(d_1)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(d_1)}{g(x)}}$$

$$\lim_{x \to a^+} h(x) = 1$$

إذا يوجد $d_3 \in (a, d_2)$ بحيث لكل $x \in (a, d_3)$ فإن

$$|h(x) - 1| < \varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, 1/2\}$$

$$1 - \varepsilon_1 < h(x) < 1 + \varepsilon_1$$

$$\frac{1}{|h(x)|} < \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \leq \frac{1}{2}$$

لتكن $x \in (a, d_2)$ نهدف الآن إلى إثبات أن

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < k\varepsilon$$

نلاحظ أن

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)} = \frac{f(x) - f(d_1)}{g(x) - g(d_1)} \cdot \frac{1}{h(x)}$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على $[x, d_1]$، نستنتج أنه يوجد $c \in (x, d_1)$ بحيث

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(d_1)}{g(x) - g(d_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} h(x) \quad \forall\, x \in (a, d_2)$$

وبما أن $a < x < d_3 < a + \delta$، إذا

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| &= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1}{h(x)} - L \right| \\
&= \frac{1}{|h(x)|} \cdot \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - Lh(x) \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L + L - Lh(x) \right| \\
&\leq 2 \left(\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| + |L||1 - h(x)| \right) \\
& 2(\varepsilon + |L|\varepsilon) = 2(1 + |L|)\varepsilon
\end{aligned}$$

وهذا يعني أن $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ □

قبل تطبيق قاعدة لوبيتال من المهم التأكد أن النهاية $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة

مثال 7.23.
النهاية

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x+x}{x}$$

من النوع $(\frac{\infty}{\infty})$ ولكن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\sin x+1}{1}$$

وهذه النهاية غير موجودة. إذا لا نستطيع استخدام قاعدة لوبيتال في هذه الحالة، ولكن يمكن إيجاد النهاية مباشرة

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x}+1\right)=0+1=1$$

مثال 7.24.
النهاية $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}$ من النوع $(\frac{\infty}{\infty})$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

النهايات من الأنواع الأخرى

إذا كانت النهاية من الأنواع الأخرى لعدم التعيين، فإننا نحولها إلى أحد النوعين $(\frac{\infty}{\infty})$ أو $(\frac{0}{0})$.

مثال 7.25.

1.

$$\lim_{x\to 0^+}x\log x$$

بما أن $\lim_{x\to 0^+}x=0$ و $\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$ إذا النهاية من النوع $(0\cdot\infty)$. لإيجاد النهاية نحولها لأحد النوعين $(\frac{\infty}{\infty})$ أو $(\frac{0}{0})$، أيهما أسهل.

$$\lim_{x\to 0^+}x\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

2. النهاية

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

من النوع $(\infty-\infty)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}\\&=\frac{0}{2}=0\end{aligned}$$

3. النهاية

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

من النوع (1^∞).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{1}{x})}$$

الخطوة الأخيرة لأن $f(x) = e^x$ دالة متصلة. الآن نوجد النهاية

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-x^{-2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-x^{-2}} = 1\end{aligned}$$

إذا

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

تمرين 7.26.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

مثال 7.27.
النهاية

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x}$$

ليست من حالات عدم التعيين لأن

$$\lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$$

إذا

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x} = -\infty$$

7.3 تمارين

1. أوجد النهايات التالية

(ا) $\star$ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

(ب) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

(ج) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

(د) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sin x - x}$

(هـ) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\log x}$

(و) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

(ز) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x+1)}{\sin x}$

(ح) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

(ط) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan^{-1}x}\right)$

(ي) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}$

2. أوجد النهايات التالية

(ا) $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

(ب) $\star$ $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

(ج) $\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

3. إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$، وكانت $\lim_{x\to\infty}f(x)$ موجودة

(ا) فأثبت أن النهاية $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ إذا كانت موجودة، فإنها تساوي 0.

(ب) أعط مثالا تكون فيه $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ غير موجودة. (إرشاد: $f(x)=\frac{e^x f(x)}{e^x}$.)

4. $\star$ إذا كانت $g\in C^2(\mathbb{R})$ و $g(0)=g'(0)=0$ و $g''(0)=6$، وكانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة ومعرفة بالعلاقة

$$f(x)=\frac{g(x)}{x},\qquad x\neq 0$$

أوجد $f(0)$، ثم بين هل f قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

5. إذا كانت $g(x)\neq 0$، و النهاية $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجودة في $\mathbb{R}$، وكانت $\lim_{x\to c}g(x)=0$، فأثبت أن $\lim_{x\to c}f(x)=0$.
(إرشاد: $f(x)=\frac{f(x)}{g(x)}g(x)$).

6. أعط مثالا لدالتين $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ و $g(x)\neq 0$ و $\lim_{x\to c}g(x)=\lim_{x\to c}f(x)=0$، ولكن النهاية $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة في $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$.

7. استخدم لوبيتال لإيجاد النهاية

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\sec x}$$

ماذا تلاحظ؟

8. ⋆ إذا كانت $f(x)=x^2\sin(\frac{1}{x}),\ \ g(x)=\sin x$، بين أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ موجودة، ولكن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة.

7.4 مبرهنة تيلور

تعتبر من المبرهنات المهمة في التفاضل والتحليل بشكل عام، وتستخدم لإثبات العديد من المبرهنات. كما تستخدم في التحليل العددي. وتكمن أهميتها في تقريب الدالة بكثيرة حدود في جوار لنقطة ما x_0. وهذا يعني أن معرفتنا لقيمة الدالة ومشتقاتها عند النقطة x_0 يعطينا معلومات عن الدالة في جوار لهذه النقطة.

لتكن

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

كثيرة حدود. حتى نوجد المعاملات، نلاحظ أن $f(0)=a_0$، ولإيجاد a_1، نشتق f فنحصل على

$$f'(x)=a_1+2a_1x+\ldots+na_nx^{n-1}$$

فنحصل على $f'(0)=a_1$، وبالاستمرار نحصل على

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad k=0,1,\ldots n$$

حيث $f^{(0)}(x):=f(x)$ اصطلاحا.

مبرهنة 7.20: مبرهنة تيلور

إذا كانت $f\in C^n[a,b]$ (أي المشتقات $f',\ldots,f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a,b]$) وكانت $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق على (a,b)،وكان $x_0\in[a,b]$، فإنه لأي $x\in[a,b]\backslash\{x_0\}$ يوجد نقطة c بين x_0 و x بحيث

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

البرهان: لنعرف g على الفترة المغلقة التي طرفاها x و x_0 بالقاعدة

$$g(t):=f(x)-f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

يكفي إثبات أن

$$g(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

بالاشتقاق نحصل على

$$g'(t) = -f'(t) + f'(t) \ldots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

ولنعرف

$$h(t) := g(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} g(x_0)$$

من الواضح أن $h(x) = 0, h(x_0) = 0$، إذا من مبرهنة رول يوجد c بين x و x_0 بحيث

$$0 = h'(c) = g'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} g(x_0)$$

إذا

$$\begin{aligned} g(x_0) &= -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n} g'(c) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

□

وهذا يعني أن أي دالة تحقق الشروط الواردة في المبرهنة السابقة، يمكن كتبتها بالصورة

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

حيث $p_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

و $R_n(x)$ هو باقي تايلور (Taylor's remainder) ويمثل الفرق في تقريب الدالة f بكثيرة الحدود p_n.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

بإمكاننا الحصول على مبرهنة القيمة المتوسطة بوضع $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

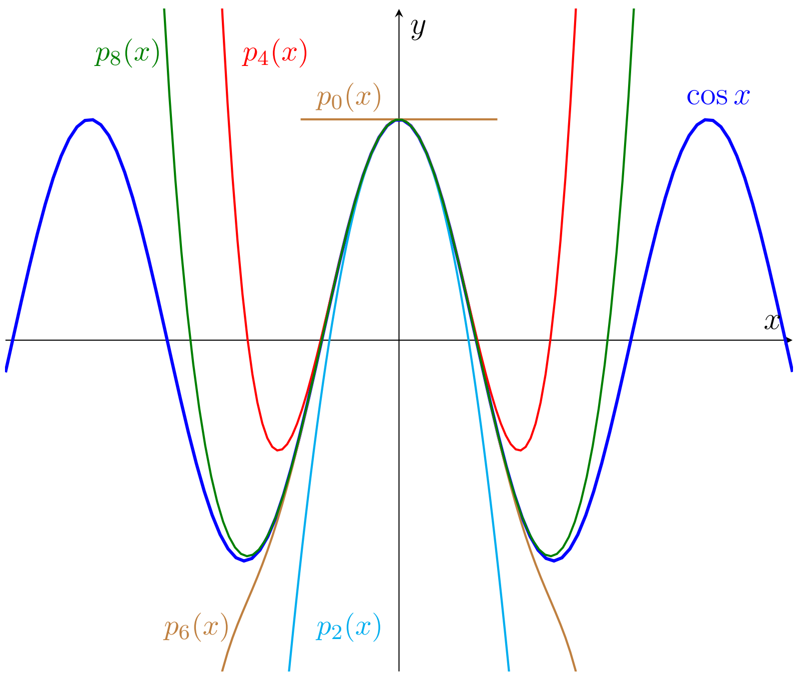
مثال 7.28.
لتكن $f(x) = \cos x$، ونرغب في تقريب $f(x)$ عند $x = 0$ بكثيرات حدود، فإننا نلاحظ أن

$$\begin{aligned} &f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 0 \\ &f^{(4)}(0) = 1, \quad f^{(5)}(0) = 0, \quad f^{(6)}(0) = -1, \quad f^{(7)}(0) = 0 \\ &f^{(8)}(0) = 1 \end{aligned}$$

ونحصل على

$$p_0(x) = 1$$
$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$
$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$
$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$
$$p_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

الشكل الآتي يوضح تقريب الدالة باستخدام كثيرات حدود من درجات مختلفة



مثال 7.29.

1. إذا أردنا تقريب الدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ بكثيرة حدود من الدرجة الثانية عند $x_0 = 0$، فإننا نوجد المشتقات الثلاث

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}$$

$$\sqrt{x+1} = p_2(x) + R_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}(c+1)^{-5/2}\,\frac{x^3}{3!}$$

حيث c يقع بين 0 و x.

2. إذا أردنا إيجاد حد علوي للخطأ في التقريب على الفترة $[0,\frac{1}{2}]$

$$|R_2(x)| = \frac{3}{8}(c+1)^{-5/2}\ \frac{x^3}{3!} \leq \frac{3}{8}(0+1)^{-5/2}\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} = \frac{3}{8\cdot 6\cdot 8} = \frac{1}{128}$$

مثال 7.30.

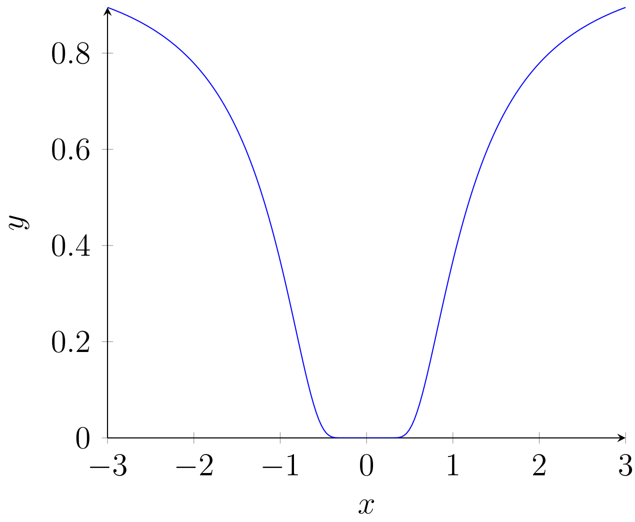
1. لتقريب الدالة $f(x) = e^{\,x}$ بكثيرة حدود من الدرجة n عند $x_0 = 0$، نلاحظ أن $f^{(k)}(x) = e^x$، و $f^{(k)}(0) = 1$، فنحصل على
$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$
حيث c تقع بين 0 و x.

2. إذا أردنا الحصول على تقريب للعدد e لا يتجاوز الخطأ فيه 10^{-2}، فإننا نحصل على e بوضع $x = 1$.
$$e = 1 + 1 + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$
لإيجاد قيمة n، نلاحظ أن $e^c < 3$، إذا
$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-2}$$
$$300 < (n+1)!$$
إذا يمكن نختار $n \geq 5$.

تمرين 7.31. قرب الدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ بكثيرة حدود من الدرجة n عند $x_0 = 0$

ليست كل دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة يمكن تمثيلها بمتسلسلة تيلور عند هذه النقطة.

مثال 7.32.
الدالة
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
لا يمكن تمثيلها بمتسلسلة تيلور حول $x_0 = 0$، لأن $f^{(n)}(0) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. سنثبت أن المشتقة الأولى تساوي 0.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{xe^{1/x^2}}$$
وبفرض $t = 1/x$ وبما أن $x \to 0^+$ إذا $t \to \infty$
$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0 \end{aligned}$$
وبالمثل $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x^2}-0}{x-0} = 0$، إذا $f'(0) = 0$. ويمكن الاستمرار وإثبات أن
$$f^{(n)}(0) = 0$$



مبرهنة 7.21: مبرهنة ينق

إذا كانت $f, f', \dots, f^{(n)}$ موجودة ومتصلة على $[a,b]$، وكانت $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in [a,b]$، وكانت $x \in [a,b]$ فإن

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \dots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + E$$

حيث $\frac{E}{(x-x_0)^{n+1}} \to 0$ عندما $x \to x_0$

البرهان: لتكن

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ولنعرف

$$g(x) = f(x) - p(x)$$
$$h(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

يكفي إثبات أن

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$$

بما أن

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

وهذا يعني أن

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

كما أن

$$h^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(x-x_0)^{n+1-k}$$

وبالتالي

$$h^{(k)}(x_0) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

بتطبيق لوبيتال n من المرات نحصل على

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g''(x)}{h''(x)} \\
&= \ldots \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g^{(n)}(x)}{h^{(n)}(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x)}{(n+1)!(x - x_0)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

□

نختم هذا الفصل بالمبرهنة التالية التي تعطي تصنيفا دقيقا للنقاط الحرجة لدالة قابلة للاشتقاق عدة مرات، وتعتبر تعميما لاختبار المشتقة الثانية والتي سبق دراستها في مقرر التفاضل.

مبرهنة 7.22

إذا كانت

$$f'(c) = f''(c) \ldots, f^{(m-1)}(c) = 0$$

و

$$f^{(m)}(c) \neq 0$$

وكان

1. m عددا فرديا، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية
2. m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية
3. m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c) > 0$ ، فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية

البرهان: من المبرهنة السابقة

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x - c)^m + E$$

حيث $\frac{E}{(x-c)^m} \to 0$ عندما $x \to c$. وبالتالي

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{(x-c)^m} = \lim_{x\to c} \left[\frac{f^{(m)}(c)}{m!} + \frac{E}{(x-c)^m}\right] = \lim_{x\to c} \frac{f^{(m)}(c)}{m!}$$

1. إذا كان m عددا فرديا، ولنفرض أن $f^{(m)}(c) > 0$ (إثبات الحالة الأخرى مشابه) إذا

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{(x-c)^m} > 0$$

إذا يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\frac{f(x) - f(c)}{(x-c)^m} > 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \backslash \{c\}$$

وبما أن m فردي إذا

$$f(x) - f(c) > 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta)$$
$$f(x) - f(c) < 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c)$$

وهذا يعني أن $f(c)$ ليست قيمة عظمى، ولا صغرى محلية.

2. إذا كان m عددا زوجيا، ولنفرض أن $f^{(m)}(c) > 0$، إذا يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$f(x) - f(c) \geq 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$$

وهذا يعني أن $f(c)$ قيمة صغرى محلية.

3. الحالة الثالثة يمكن إثباتها بنفس الطريقة.

$\square$

مثال 7.33.

1. إذا كانت $f(x) = x^3$، فإن

$$f'(0) = f''(0) = 0, \qquad f^{(3)}(0) = 6 > 0$$

وبالتالي $f(0)$ ليست قيمة قصوى.

2. إذا كانت $f(x) = x^4$، فإن

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

وبالتالي $f(0)$ قيمة صغرى محلية.

3. إذا كانت $f(x) = -x^4$، فإن

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = -24 < 0$$

وبالتالي $f(0)$ قيمة عظمى محلية.

7.4 تمارين

1. أثبت أن باقي تيلور للدالة $f(x) = \sin x$ يقترب من 0 عندما $n \to \infty$ لأي $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

2. أوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ والمعرفة على $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$، عند $x_0 = 0$، حتى الدرجة الثالثة، وحدد باقي تايلور.

3. أثبت أن الدالة
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
قابلة للاشتقاق أي عدد من المرات، وأن $f^{(k)}(0) = 0$ لكل $k \in \mathbb{N}$. ثم استنتج أن $R_n(x) \not\to 0$ لأي $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

4. أثبت أن
$$\left|\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
قرب العدد 1.2 بحيث لا يتعدى الخطأ 0.01.

5. ⋆ أثبت أنه لكل $x > 0$، فإن
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

6. حدد فيما إذا كانت $f(0)$ قيمة عظمى محلية، صغرى محلية، ليست قيمة قصوى

(ا) $f(x) = \cos x - 1$

(ب) ⋆ $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

(ج) $f(x) = x \sin x$

7. إذا كانت متسلسلة تيلور للدالة g هي
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
وكانت $f(x) = (g(x))^3$، فأوجد $f'(0)$ بدلالة a_n.