بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الزمن: 3 ساعات
(يمنع استخدام الآلة الحاسبة)

مقرر نظرية الزمر (343 ريض)
الفصل الدراسي الأول 1442هـ
الاختبار النهائي

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول: [20 درجة]

إذا كانت $G = \mathbb{Z}_{14} \times U_{14} \times S_{11}$ ، $g = (g_1, g_2, \sigma) \in G$ **حيث:**

$g_1 = 2\ ;\quad g_2 = 13\ ;\quad \sigma = (1,3,5,4)(2,6,4)(5,7,10,11)$

فأجب عما يأتي:

(أ) اكتب σ **كحاصل ضرب تبديلات منفصلة.**

(ب) املأ الفراغات الآتية:

(1) $|g_1| =$ ... ... **(2)** $|g_2| =$ ... ... **(3)** $|\sigma| =$ ... ... **(4)** $|g| =$ ... ...

(5) $(e_1, e_2, e_3) =$ (... ...) **(6)** $g^{-1} =$ (... ...) **(7)** $Aut(< g >) \cong$ ... ...

(8) σ ... ... $\mathbb{A}_{11}$ **(9)** $\sigma^3 =$ ... ... **(10)** $|G| =$ ... ... **(11)** $C_{\sigma^3} =$ ... ...

(ج) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي:

(1) إن $\mathbb{Z}_{14} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$ **(2)** $\mathbb{Z}_{14} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$ **(3)** $U_{14} \cong \mathbb{Z}_6$

(4) $\exists\, H \leq S_{11} \ni H \cong D_{30}$ **(5) توجد في** G **زمرة سيلوجزئية من النوع 3 ورتبتها** 3^4

السؤال الثاني: [6 درجات]

(أ) متى نقول إن $G|_S$ (G **تؤثر على** S) **؟ حيث** $G = S_{12}$ **و** $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$

(ب) أثبت أن $G_x \leq G$ **، حيث** $x \in S$

السؤال الثالث: [14 درجة]

(أ) إذا كان $\varphi : G \to \overline{G}$ **تماثلاً وكان** $g \in G$ **رتبته** n **فأثبت أن:**

$|\varphi(g)| = n$

(ب) أكتب نص كل من:

(1) مبرهنة سيلو الأولى. **(2) مبرهنة سيلو الثالثة.**

(ج) إذا كانت G **رتبتها** P^n **، حيث** $n > 1$ **. فأثبت بالتفصيل مستخدماً مبرهنة اختبار الدليل أن** G **غير بسيطة.**

(د) أثبت بالتفصيل أنه لا توجد زمرة بسيطة G **رتبتها** $19 \cdot 2^5$

نسأل الله لكم التوفيق والسداد