بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الزمن: ثلاث ساعات

مقرر نظرية الزمر (343 ريض)
الفصل الدراسي الثاني 1442هـ
الاختبار النهائي المنزلي

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول: [12 درجة]

إذا كانت $G \leq S_{10}$ و $H \leq G$ ، حيث:

$$G =< \sigma | \sigma = (1,10)(3,5)(2,10)(4,5,7) > \quad \text{و} \quad H =< \varphi | \varphi = \sigma^2 >$$

فأجب عما يلي:

(أ) اكتب σ كحاصل ضرب تبديلات منفصلة في S_{10} .

(ب) أملأ الفراغات الآتية:

(1) $|G| = \dots\dots\dots$ (2) $\varphi = \sigma^2 = \dots\dots\dots$

(3) التفريق الدوري لـ φ هو .... (4) $|N(\varphi)| = \dots\dots\dots$

(5) $C_\varphi = \dots\dots\dots$ (6) $\sigma \dots\dots\dots \mathbb{A}_{10}$

(7) $|\sigma| = \dots\dots\dots$ (8) $|H| = \dots\dots\dots$

(9) $[G:H] = \dots\dots\dots$ (10) $Aut(<\sigma>) \cong \dots\dots\dots$

(ج) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:

(1) إن S_{10} زمرة بسيطة.

(2) إن $H \trianglelefteq G$

(3) إذا كانت $\alpha, \beta \in S_{10}$ ، فإن:
α و β لهما التفريق الدوري نفسه $\Leftrightarrow$ $|\alpha| = |\beta|$

(4) يوجد $K \leq S_{10}$ ، حيث $K \cong D_{12}$

السؤال الثاني: [8 درجات]

(أ) أثبت باستخدام مبرهنة سيلو الأولى أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 208

(ب) أثبت باستخدام مبرهنة اختبار الدليل أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها Pq ، حيث:
P و q عددان أوليان و $P > q$

(ج) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي:

(1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{90}$

(2) $g = (1,2,3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9 \Rightarrow |g| \neq 30$

(3) $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$

(4) $D_6 \cong \mathbb{A}_4$

نسأل الله لكم التوفيق والسداد