جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضات

٣٤٣ ريض (نظرية الزمر)
الاختبار النهائي 1445
الفصل الأول
40 درجة

السؤال الأول

أ) لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G . أثبت أن $H \leq G$ إذا وفقط إذا كان لأي عنصرين $a, b \in H$ فإن $ab^{-1} \in H$. (2- درجة)

ب) ليكن p عدد أولي ونعرف $A = \{\frac{m}{p^k} \in \mathbb{Q} : k \geq 0\}$. أثبت أن A زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}, +)$. (2- درجة)

ج) في الزمرة $(\mathbb{R}^2, +)$، اعتبر الزمرة الجزئية المكونة من نقاط المستقيم $y = 5x$. أوجد مجموعتي مشاركة اخرى لهذة الزمرة الجزئية. (1- درجة)

د) إذا كانت G زمرة منتهية، K, H زمرتين جزئيتين من G بحيث $K \subseteq H$، أثبت أن $[G : K] = [G : H][H : K]$.

(2- درجة)

السؤال الثاني

أ) أثبت أنه اذا كانت $N \trianglelefteq G$، فإن G/N إبدالية $\forall x, y \in G : xyx^{-1}y^{-1} \in N \iff$. (2- درجة)

ب) في S_3 أثبت أن $A = <(1,2,3)>$ ناظمية، و أوجد عناصر الزمرة S_3/A. (2- درجة)

ج) ليكن $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}, \bullet)$ تطبيق معرف بالقاعدة $\varphi(x) = e^{2\pi ix}$. (4 - درجة)

a. وضح أن φ تشاكل.

b. أوجد $\ker\varphi$.

c. أوجد $\varphi(\mathbb{R})$.

d. أثبت أن $(\mathbb{R}, +)/(\mathbb{Z}, +) \backsimeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

السؤال الثالث

أ) لتكن H_1 زمرة مميزة من G و H_2 زمرة مميزة من H_1. أثبت أن H_2 زمرة مميزة من G. (3- درجة)
(H_1 char G and H_2 char $H_1 \implies H_2$ char G)
.

ب) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 3 & 8 & 11 & 6 & 2 & 5 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}$. أكتب α على شكل دورات منفصلة ثم على شكل مناقلات. هل α زوجية أم فردية؟ (3- درجة)

السؤال الرابع

أ) أكتب جميع الزمر الإبدالية الغير متماثلة من الرتبة 225 على شكل ضرب مباشر زمر من النوع $\mathbb{Z}_n$ ؟ (3- درجة)

ب) لماذا الزمرة S_3 و الزمرة Q_8 ليست ضرب مباشر لزمر جزئية منها؟ (2- درجة)

السؤال الخامس

أ) لتكن الزمرة G تؤثر على المجموعة X. أثبت أن مثبت العنصر $x \in X$ هو زمرة جزئية من G. (أثبت أن $G_x \leq G$) (3- درجة)

ب) لتكن $G = < (26)(175)(438) > \leq S_9$ تؤثر على المجموعة $X = \{1,2,\ldots,9\}$ كالتالي $k * \alpha = \alpha(k)$. أكتب عناصر الزمرة G و أوجد المدارات و مثبت العنصر 6. (3- درجة)

ج) لماذا الزمرة التي رتبتها 49 يجب أن تكون إبدالية؟ (2- درجة)

السؤال السادس

أ) أذكر نص كلاً من مبرهنة كوشي العامة و نظرية سيلو العامة. (3- درجة)

ب) بستخدام نظرية سيلو الثالثة، أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة رتبتها 105. (3- درجة)