الباب الثاني

اتخاذ القرار مع البيانات

المحتويات

- مقدمة
- طريقة استخدام البيانات في اتخاذ القرار
- عدد التصرفات الممكنة.
- المعيار العددي للمقارنة بين التصرفات.
- عناصر مسألة اتخاذ القرار مع البيانات
- حلول اتخاذ القرار مع البيانات وتعريف قيمة البيانات.
- أمثلة

مقدمه:

التجربة العشوائية:

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

1. جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
2. لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
3. يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء (فراغ) العينة: Sample Space:

فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة. ونرمز لفضاء العينة بالرمز $\boldsymbol{S}$ ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $\boldsymbol{n}(S)$.

مثال:

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

الحل:

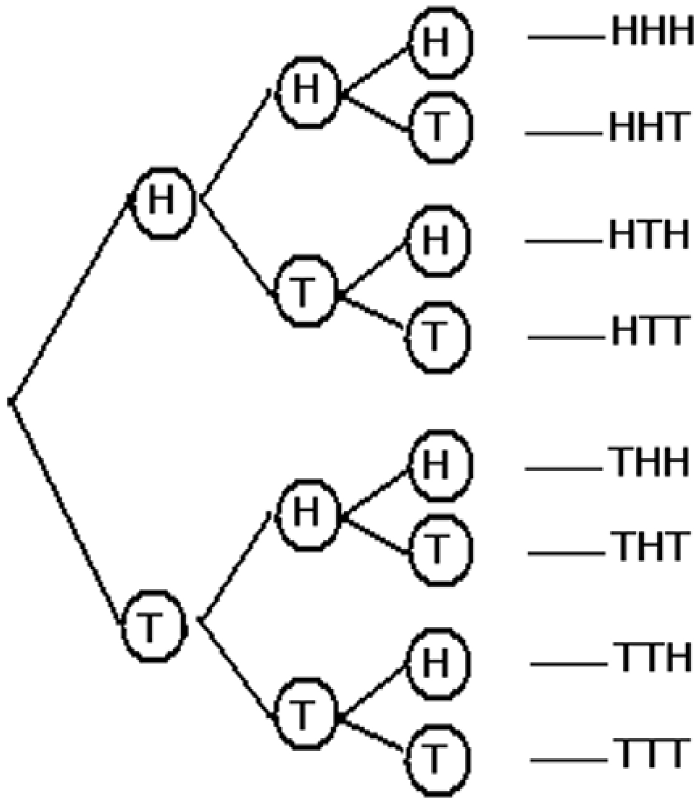
فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$\boldsymbol{S} = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$$

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = \mathbf{2}^3 = 8$$

شكل الشجرة التالي يوضح فراغ العينة:



المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

في كثير من الأحيان نرغب في التعامل مع قيم عددية مرتبطة بنقاط العينة للتجربة العشوائية بدلاً من التعامل مع نقاط العينة نفسها إذ أن نقاط العينة أو النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تكون في بعض الأحيان عبارة عن صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًا.

في هذه الحالة فإننا نقوم بتحويل هذه **القيم الوصفية** إلى **قيم عددية حقيقية** تسمى قيم المتغير العشوائي.

الآلة المستخدمة لتحويل عناصر فضاء العينة للتجربة العشوائية إلى قيم عددية حقيقية هي ما يسمى **بالمتغير العشوائي**.

إذن، **المتغيرات العشوائية** تستخدم للتعبير عن **نتائج التجربة العشوائية** وعن الحوادث **بقيم عددية** بدلاً من مسميات أو صفات.

على سبيل المثال، قد نكون **مهتمين فقط بعدد الصورة الظاهرة على الوجه العلوي عند رمي قطعة عملة** عشر مرات متتالية بغض النظر عن التفصيلات الأخرى. إن عدد الصور في هذه الحالة عبارة عن متغير عشوائي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية

المتغير العشوائي:

تعريف:

ليكن فضاء العينة للتجربة العشوائية هو S. المتغير العشوائي X هو **دالة حقيقية** معرفة على فضاء العينة S.

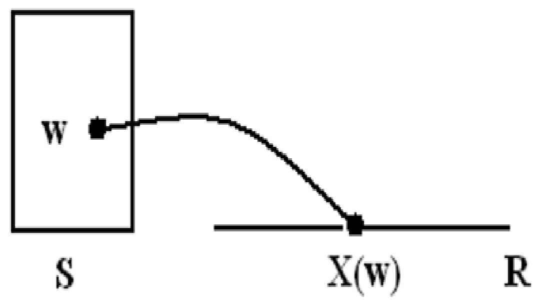
ملاحظة:

1. المتغير العشوائي X يعطي **قيمة حقيقية وحيدة** لكل عنصر من عناصر فضاء العينة **S**.
2. المتغير العشوائي X هو تطبيق **مجاله فضاء العينة S ومجاله المقابل (المدى) هو مجموعة الأعداد الحقيقية R**، أي أن،

$$\mathbf{X: S \to R}$$

3. إذا كانت $w \in S$ نقطة عينة فإن **صورة** $\mathbf{w}$ تحت تأثير المتغير العشوائي X هي $\mathbf{X(w)}$ وهي قيمة حقيقية، أي أن $\mathbf{X(w) \in R}$.

الشكل التالي يوضح صورة نقطة العينة $\mathbf{w}$ تحت تأثير المتغير العشوائي $\mathbf{X}$.



$$w: \xrightarrow{X} X(w) \in \mathbf{R}$$

4. إن المجموعة

$$X(S)=\{x \in \mathbf{R}: X(w)=x,\ w \in S\}$$

هي مدى التطبيق $\mathbf{X}$ وتسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $\mathbf{X}$، وهي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن $X(S) \subseteq \mathbf{R}$.

مثال:

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنعرف المتغير العشوائي **X** على أنه **عدد الصور الظاهرة في الرميتين.**

1. عبر عن المتغير العشوائي **X** كدالة.
2. أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي **X**.
3. عبر عن الحوادث التالية باستخدام المتغير العشوائي **X**:

$$\{(T,T)\},\ \{(H,T),\ (T,H)\},\ \{(H,H)\},\ \{(H,H),\ (H,T),\ (T,H)\}$$

4. عبر عن الحوادث التالية باستخدام نقاط العينة:

$$\{X=0\},\ \{X=1\},\ \{X=2\},\ \{X<1\},\ \{X\leq 1\},\ \{X>5\}$$

5. أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(X=0),\ P(X=1),\ P(X=2),\ P(X<1),\ P(X\leq 1),\ P(X>5)$$

الحل:

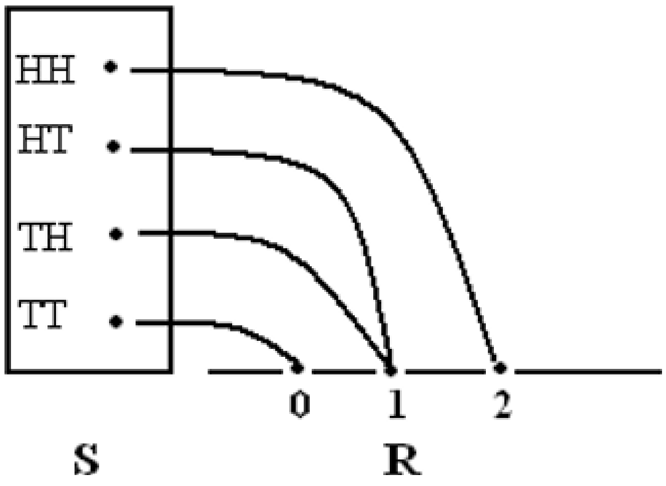
1. فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{(H,H),\ (H,T),\ (T,H),\ (T,T)\}$.

المتغير العشوائي هو: X = عدد الصور

إن المتغير العشوائي **X** يعطي كل عنصر من عناصر S قيمة حقيقية وحيدة في **R** كما يلي:

$$X(H,H) = 2$$
$$X(H,T) = 1$$
$$X(T,H) = 1$$
$$X(T,T) = 0$$

الشكل التالي يوضح صور نقاط العينة تحت تأثير المتغير العشوائي X.



كما يمكن التعبير عن المتغير العشوائي X كدالة في الجدول التالي:

نقطة العينة **w**	قيمة المتغير العشوائي **X(w)**
HH	2
HT	1
TH	1
TT	0

2. مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

$X(S)=\{x\in \mathbf{R}: X(w)=x,\ w\in S\} = \{0, 1, 2\}$

دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع:

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا مجموعة القيم الممكنة له هي $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ فإن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X يرمز لها بالرمز $f_X(x)$ أو بالرمز $f(x)$ وتعرف كما يلي:

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x); x \in X(S) \\ 0; x \notin X(S) \end{cases}$$

خواص دالة الكتلة الاحتمالية:

إن دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x)=P(X=x)$ لابد أن تحقق الشروط التالية:

1. $0 \leq f_X(x) \leq 1$
2. $\sum_{\forall x} f_X(x) = 1$
3. $P(X \in A) \rightleftarrows= \sum_{x \in A} f_X(x) = \sum_{x \in A} P(X = x); \forall A \subseteq \boldsymbol{R}$

تعودنا سابقاً اتخاذ القرار **بدون بيانات**.

في هذا الفصل نوضح فكرة استخدام البيانات في اتخاذ القرار من خلال الأمثلة التالية:

مثال 1:

بفرض أنك تسكن في **الطابق الثالث** في عمارة ما وأنك تستعمل المصعد للوصول لشقتك **بأحد الإجرائين التاليين**:

a_1= **تنزل لتأخذ المصعد من الدور الأرضي (البدروم)**

a_2= **تصعد لتأخذ المصعد من الطابق الأول.**

وتكون **الظروف المستقبلية المجهولة** هي:

θ_1 = **المصعد يعمل**

θ_2 = **المصعد لا يعمل**

ويمكننا افتراض دالة خسارة منطقية $\ell(a,\theta)$.

يلاحظ في حالة **المصعد لا يعمل** θ_2 أن الطلب على المصعد سيكون بدون استجابة وبالتالي فإن **عدد الأزرار المضيئة في الطوابق يكون عاليا** والعكس بالعكس.

يمكن استحداث بيانات للاستفادة منها لهذه الحالة بتركيب **عداداً** لمعرفة **عدد الأزرار المضيئة** في الدور الأرضي (البدروم) والطابق الأول ونعطيه الرمز $\mathbb{X}$.

واضح أن قيم هذا المتغير هي $\mathbb{X} = 0, 1, 2$ باحتمالات عند θ_2 (**المصعد لا يعمل**) متدرجة من الأصغر الى الأكبر، بالشكل التالي **مثلاً**:

$$P(X = 2 \mid \theta_2) = 0.70, P(X = 1 \mid \theta_2) = 0.20, P(X = 0 \mid \theta_2) = 0.10$$

بينما ستكون بشكل معاكس عند θ_1 (**المصعد يعمل**)، بالشكل التالي مثلاً:

$$P(X = 2|\theta_1) = 0.10, P(X = 1|\theta_1) = 0.30, P(X = 0|\theta_1) = 0.60$$

أو أي دالة كتلة مناسبة $f(x; \theta)$ أخرى.

مثال 2:

بفرض أنك تتخذ يومياً أمام ظروف الطقس المختلفة أحد **الإجراءات** التالية:

a_1= **البقاء في البيت**

a_2= **الذهاب للعمل بدون مظلة**

a_3= **الذهاب للعمل مع مظلة.**

وتكون الظروف المستقبلية المجهولة هي:

θ_1 = **الجو ماطر**

θ_2 = **الجو غير ماطر**

ولنفرض أن $\ell(a,\theta)$ هي دالة خسارة منطقية.

يمكن استحداث بيانات للاستفادة منها لهذه الحالة بالاستماع للنشرة الجوية الصباحية وتعريف متغيراً عشوائياً $\mathbb{X}$ يأخذ القيم التالية:

إذا قالت النشرة أن **الجو غير ماطر** فإن $\mathbb{X} = 0$

إذا قالت النشرة أن **الجو ماطراً** فإن $\mathbb{X} = \mathbf{1}$

ويجب أن تتوفر دالة كتلة مناسبة $f(x;\theta)$ تتميز بمصداقية عالية. بمعنى أن تقديرات النشرة الجوية يجب أن تكون دقيقة بما فيه الكفاية. ويمكن أن نقول إن النشرة الجوية ذات مصداقية عالية طالما أن القيمتين $f(1;\theta_1)$ و$f(0;\theta_2)$ عاليتين.

طريقة استخدام البيانات في اتخاذ القرار:

نفرض أننا أمام مسألة اتخاذ قرار فيها مجموعة الإجراءات البسيطة التالية:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\dots, a_k\}$$

ومجموعة الظروف المستقبلية المجهولة هي:

$$\Omega = \{\theta\}$$

ولدينا متغيراً عشوائياً $\mathbb{X}$ يأخذ قيمه في فضاء القيم التالي:

$$\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$$

وأن دالة كتلته الاحتمالية المناسبة $f(x,\theta)$ **متوفرة ومعلومة**.

فإننا نستعمل البيانات $\mathbb{X}$ في اتخاذ القرار بأن نختار إجراءً بسيطاً من المجموعة $\mathcal{A}$ عند كل قيمة من **قيم المتغير** $\mathbb{X}$ كما يلي:

- نختار الإجراء a_{i_1} عند القيمة x_1
- نختار الإجراء a_{i_2} عند القيمة x_2

.

.

.

- نختار الإجراء a_{i_n} عند القيمة x_n

وبذلك نحصل على تشكيلة من الإجراءات البسيطة عددها $\boldsymbol{n}$ كما يلي:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\ldots, a_{i_n}$$

ونسمي هذه التشكيلة **تصرفاً بسيطاً** ونعطيها الرمز $\boldsymbol{d}$.

واضح أن $\boldsymbol{d}$ هو دالة من قيم المتغير $\mathbb{X}$ الى قيم الإجراءات البسيطة $\mathcal{A}$، هكذا:

$$\boldsymbol{d}: \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{A}$$

بعبارة أخرى يمكن أن نكتب:

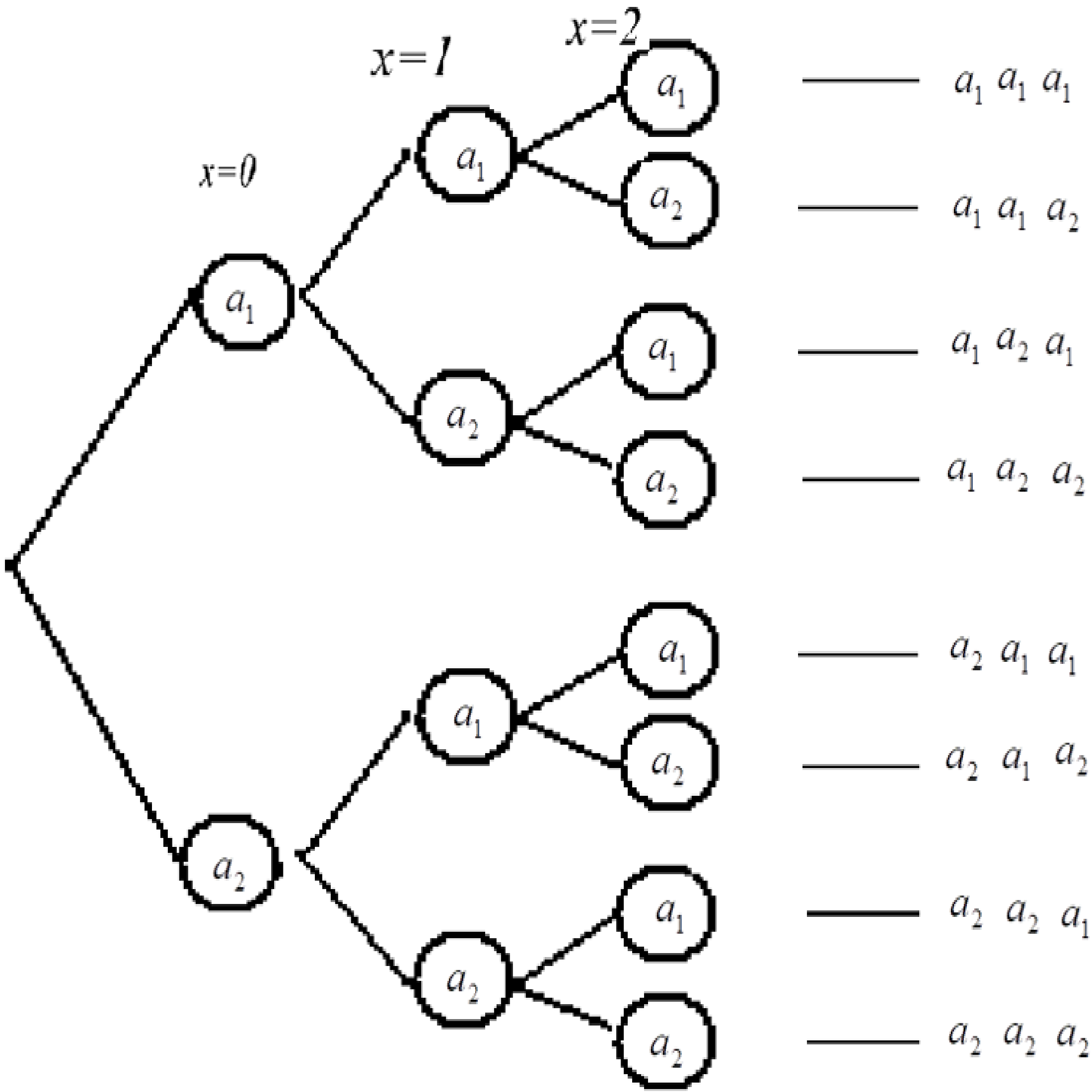
$$d(x_1) = a_{i_1}$$
$$d(x_2) = a_{i_2}$$
$$\vdots$$
$$d(x_n) = a_{i_n}$$

عدد التصرفات الممكنة: واضح باستعمال طرق العد أن عدد كل التصرفات d **الممكنة** يساوي k^n تصرفاً حيث:

$k =$ عدد الإجراءات الممكنة

$n =$ عدد قيم $\mathbb{X}$.

مثال 3: عدد التصرفات الممكنة في **المثال 1** السابق هو 8 = 2^3 موضحة في الجدول التالي:



$\mathbb{X}$ / d	0	1	2
d_1	a_1	a_1	a_1
d_2	a_1	a_1	a_2
d_3	a_1	a_2	a_1
d_4	a_1	a_2	a_2
d_5	a_2	a_1	a_1
d_6	a_2	a_1	a_2
d_7	a_2	a_2	a_1
d_8	a_2	a_2	a_2

ملاحظة: نلاحظ أن التصرفين d_1, d_8 لا يتغيران مع تغير $\mathbb{X}$. ونقول عن هذا النوع من التصرفات أنها **لا تعطي للبيانات أهمية أو قيمة.**

تعريف

نقول عن التصرف d أنه لا يعطي للبيانات قيمة أو أهمية إذا كان:

For all* x: *d(x)=a

المعيار العددي لمقارنة التصرفات تحت نفس الظرف

ليكن d أحد التصرفات عند الظرف θ، وحيث أن لهذا التصرف d قيمة عند كل كما يلي:

$$d(x_1) = a_{i_1}, \cdots, d(x_j) = a_{i_j}, \ldots, d(x_n) = a_{i_n}$$

فسيكون لكل إجراء بسيط $d(x_j)$ الخسارة التالية:

$$\ell(d(x_j), \theta) = \ell\left(a_{i_j}, \theta\right), j = 1, \ldots, n$$

واحتمال ظهور هذه الخسارة كاحتمال ظهور x_j أي $f(x_j\,;\theta)$.

هكذا تصبح الخسارات السابقة $\ell(d(x_j), \theta)$ قيماً لمتغير عشوائي له دالة كتلة احتمالية $f(x_j\,;\theta)$ والمتوسط التالي:

$$E_X[\ell(d, \theta)] = \sum_x \ell(d(x)\,;\theta)\, f(x\,;\theta)$$

نسمي هذا المتوسط **مخاطرة** d عند θ ونعطيه الرمز التالي $\boldsymbol{r(d, \theta)}$ ، أي أن:

$$\boldsymbol{r(d, \theta) = E_X[\ell(d, \theta)] = \sum_x \ell(d(x), \theta) f(x\,;\theta)}$$

وهو المعيار العددي الذي نستعمله لمقارنة التصرفات المختلفة عند الظرف θ.

تمرين

برهن أنه إذا كان التصرف d لا يعطي أهمية للبيانات فإن:

$$r(d,\theta) = \ell(a,\theta)$$

البرهان:

$$r(d,\theta) = E_X[\ell(d,\theta)] = \sum_x \ell(d(x),\theta) f(x;\theta)$$

$$= \sum_x \ell(a,\theta) f(x;\theta) = \ell(a,\theta) \sum_x f(x;\theta) = \ell(a,\theta)$$

ومنه فسيكون لدينا في **المثال 1** السابق النتائج التالية:

$$\textit{For all } \theta: r(d_1,\theta) = \ell(a_1,\theta) \quad \textit{and } r(d_8,\theta) = \ell(a_2,\theta)$$

مثـــــال 4:

لديك مسألة اتخاذ القرار بدالة الخسارة والبيانات التالية:

$\ell(a,\theta)$	θ_1	θ_2
a_1	1	4
a_2	2	3
a_3	5	2

$\mathbb{X}$	x_1	x_2	x_3
$f(x,\theta_1)$	0.7	0.1	0.2
$f(x,\theta_2)$	0.1	0.4	0.5

أحسب $r(d,\theta_1), r(d,\theta_2)$ للتصرفين التاليين:

$\mathbb{X}$	d_1	d_2
x_1	a_3	a_2
x_2	a_1	a_3
x_3	a_2	a_2

الحـــل

$$r(d_i, \theta_1) = \sum_x \ell(d_i(x), \theta_1) f(x; \theta_1), \quad i = 1, 2$$

$$r(d_i, \theta_2) = \sum_x \ell(d_i(x), \theta_2) f(x; \theta_2) \quad i = 1, 2$$

$$r(d_1,\theta_1) = \ell(a_3,\theta_1) \times 0.7 + \ell(a_1,\theta_1) \times 0.1 + \ell(a_2,\theta_1) \times 0.2$$

$$= 5 \times 0.7 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 = 4$$

$$r(d_2,\theta_1) = \ell(a_2,\theta_1) \times 0.7 + \ell(a_3,\theta_1) \times 0.1 + \ell(a_2,\theta_1) \times 0.2$$

$$= 2 \times 0.7 + 5 \times 0.1 + 2 \times 0.2 = 2.3$$

$$r(d_1,\theta_2) = \ell(a_3,\theta_2) \times 0.1 + \ell(a_1,\theta_2) \times 0.4 + \ell(a_2,\theta_2) \times 0.5$$

$$= 2 \times 0.1 + 4 \times 0.4 + 3 \times 0.5 = 3.3$$

$$r(d_2,\theta_2) = \ell(a_2,\theta_2) \times 0.1 + \ell(a_3,\theta_2) \times 0.4 + \ell(a_2,\theta_2) \times 0.5$$

$$= 3 \times 0.1 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.5 = 2.6$$