اتخاذ القرار مع البيانات

الجزء الثانى

عناصر مسألة اتخاذ القرار مع البيانات:

1. كل عناصر اتخاذ القرار بدون بيانات:

- مجموعة الإجراءات البسيطة $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

- مجموعة الظروف الطبيعية $\Omega = \{\theta\}$.

- معيار دالة الخسارة $\ell(a, \theta)$ للمفاضلة بين الإجراءات البسيطة عند كل θ .

2. دالة البيانات $f(x;\theta) : x = x_1, x_2, \ldots, x_n$

3. مجموعة التصرفات البسيطة $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ بدلاً من $\mathcal{A}$

4. معيار المخاطرة $r(d, \theta)$ للمفاضلة بين التصرفات عند كل θ بدلاً من $\ell(a, \theta)$

الحلول التى نبحث عنها عند اتخاذ القرار مع البيانات:

نبحث عن الحلول المناسبة بطريقة مشابهة لاتخاذ القرار بدون بيانات.

نبدأ بحذف التصرفات الضعيفة، ونقول عن التصرف d_2 أنه ضعيف أمام d_1 إذا كان:

$$For\ all\ \theta \Longrightarrow r(d_1,\theta) \le r(d_2,\theta)$$

ثم نبحث عن النوعين التاليين من الحلول:

أولاً: التصرف البسيط أقل الكبريات وتصرف بيز:

- سنبحث عن التصرف البسيط d^* أقل الكبريات المعرف بالشكل:

$$For\ all\ d \Rightarrow Max_\theta r(d^*,\theta) \le Max_\theta r(d,\theta)$$

بدلاً من الإجراء البسيط a^* أقل الكبريات المعرف بالشكل:

$$For\ alld\ a \Rightarrow Max_\theta \ell(a^*,\theta) \le Max_\theta \ell(a,\theta)$$

ونعرف **قيمة البيانات للحل البسيط أقل الكبريات** بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_{\theta}\ell(a^*,\theta) - Max_{\theta}r(d^*,\theta)$$

- سنبحث عن تصرف بيز d^* لبسيط المعرف بالشكل:

$$For\ all\ d \quad \Rightarrow \quad B(d^*) \le B(d)$$

$$= \sum_j r(d,\theta_j)g(\theta_j)$$

بدلاً من إجراء بيز a^* البسيط المعرف بالشكل:

$$For\ all\ a \quad \Rightarrow \quad B(a^*) \le B(a) = \sum_j \ell(a,\theta_j)g(\theta_j)$$

ونعرف **قيمة البيانات لحل بيز البسيط** بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$\boldsymbol{B(a^*) - B(d^*)}$$

ثانياً: التصرف المركب أقل الكبريات:

بفرض أن $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ هي مجموعة التصرفات البسيطة، وبفرض أننا قررنا اختيار التصرف d_i بالإحتمال p_i فإننا نعرف التصرف المركب بأنه دالة الكتلة:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_m) \;;\; \Sigma p_i = 1$$

ونمثل التصرف المركب P بنقطة في الفضاء لها عند كل ظرف θ الإحداثي التالي:

$$R(P,\theta) = \Sigma_{i=1}^{m} r(d_i,\theta) p_i$$

وسنبحث عن التصرف المركب أقل الكبريات P^* المعرف بالشكل:

$$For\ all\ \ P \;\Longrightarrow\; Max_{\theta} R(P^*,\theta) \le Max_{\theta} R(P,\theta)$$

بدلاً من الإجراء المركب أقل الكبريات P^* المعرف بالشكل:

$$For\ all\ \ P \;\Longrightarrow\; Max_{\theta} L(P^*,\theta) \le Max_{\theta} L(P,\theta)$$

حيث:

$$L(P,\theta) = \Sigma_{i=1}^{k} \ell(a_i,\theta) p_i$$

بفرض أن p_i هو احتمال اختيار الإجراء البسـيط a_i من هي مجموعة الإجراءات البسـيطة

$.\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

ونعرف **<u>قيمة البيانات للحل المركب أقل الكبريات</u>** بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_\theta L(P^*, \theta) - Max_\theta R(P^*, \theta)$$

وبما أننا نعتبر أي تصرف بسيط d_i تصرفاً مركباً نضع في المنزلة i كل الكتلة، لذلك يمكننا أن نستنتج من المتراجحة السابقة متراجحة جديدة تربط بين التصرف البسيط d^* أقل الكبريات وبين التصرف المركب P^* أقل الكبريات كما يلي:

$$Max_\theta R(P^*, \theta) \le Max_\theta r(d^*, \theta)$$

وتكون فائدة الانتقال من d^* الى P^* بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_\theta r(d^*, \theta) - Max_\theta R(P^*, \theta)$$

مثـــــــال 5: لديك مسألة اتخاذ القرار بدالة الخسارة والبيانات التالية:

	x_1	x_2	x_3
$f(x,\theta_1)$	0.7	0.2	0.1
$f(x,\theta_2)$	0.2	0.3	0.5

$\ell(a,\theta)$	θ_1	θ_2
a_1	0	4
a_2	3	0

1. عين جدول التصرفات الممكنة واحسب مخاطراتها.
2. عين التصرف البسيط أقل الكبريات $\boldsymbol{d}^*$.
3. عين التصرف المركب أقل الكبريات $\boldsymbol{P}^*$.
4. بين فائدة الانتقال من $\boldsymbol{d}^*$ الى $\boldsymbol{P}^*$.
5. ما قيمة البيانات في الحل البسيط أقل الكبريات.
6. ما قيمة البيانات في الحل المركب أقل الكبريات.
7. ما قيمة البيانات في حل بيز عند التوزيع المبدئي $g(\theta_1) = 1/3$
8. اقترح تصرفاً مركباً وقارنه مع $\boldsymbol{P}^*$ الذي وجدته في 3.

الحـــــــــل:

1) يوجد $2^3 = 8$ تصرفاً التالية:

$\mathbb{X}$ / d	x_1	x_2	x_3
d_1	a_1	a_1	a_1
d_2	a_1	a_1	a_2
d_3	a_1	a_2	a_1
d_4	a_1	a_2	a_2
d_5	a_2	a_1	a_1
d_6	a_2	a_1	a_2
d_7	a_2	a_2	a_1
d_8	a_2	a_2	a_2

نلاحظ أن d_1, d_8 لا تعطي للبيانات قيمة لذا:

$$\boldsymbol{For\ all\ \theta : r(d_1\theta) = \ell(a_1, \theta)\ and\ r(d_8, \theta) = \ell(a_2, \theta)}$$

ولحساب بقية **المخاطرات** نستعمل الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{r(d, \theta) = E_x[\ell(d, \theta)] = \sum_x \ell(d(x), \theta) f(x\,; \theta)}$$

ونتبع في حسابها الترتيب التالي (كما في مثال 4):

$$\boldsymbol{r(d_i,\theta_1) = \Sigma_x \ell(d_i(x),\theta_1) f(x;\theta_1), \quad i = 1,2,\dots,8}$$

$$\boldsymbol{r(d_i,\theta_2) = \Sigma_x \ell(d_i(x),\theta_2) f(x;\theta_2), \quad i = 1,2,\dots,8}$$

نحصل على الجدول التالي:

$r(d,\theta)$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
θ_1	0	0.3	0.6	0.9	2.1	2.4	2.7	3
θ_2	4	2	2.8	0.8	3.2	1.2	2	0

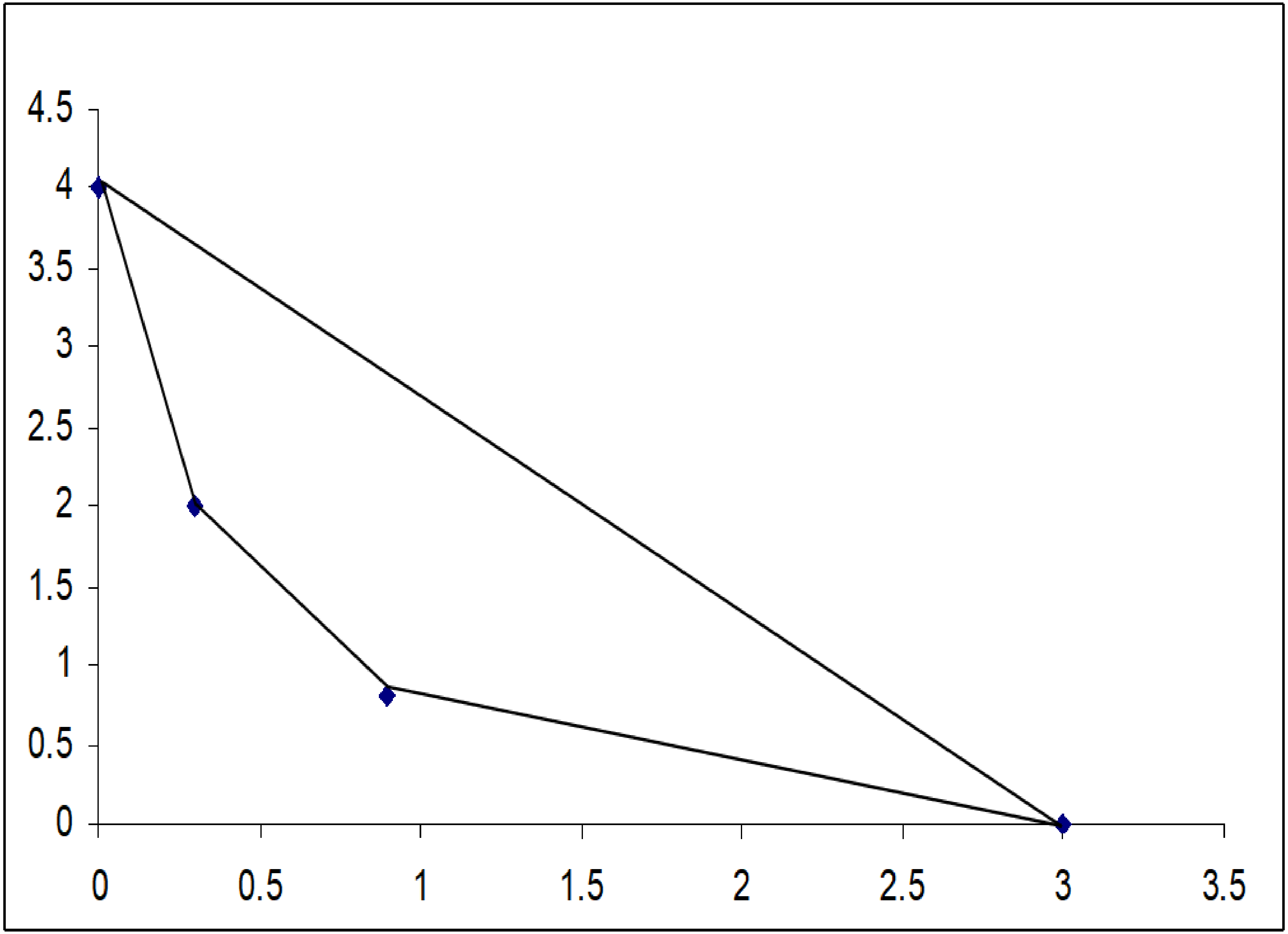
نلاحظ أن d_3, d_5, d_7 ضعيفة أمام d_2، وأن d_6 ضعيف أمام d_4 . وبعد حذف كل هذه التصرفات الضعيفة يبقى لدينا التصرفات المقبولة التالية:

$r(d,\theta)$	d_1	d_2	d_4	d_8
θ_1	0	0.3	0.9	3
θ_2	4	2	0.8	0
$Max_\theta r(d,\theta)$	4	2	0.9	3

2. واضح أن التصرف البسيط أقل الكبريات $\boldsymbol{d}^*$ هو $\boldsymbol{d_4}$ يقابله:

$$\boldsymbol{Max_\theta r(d^*,\theta) = 0.9}$$

3. ولحساب التصرف المركب أقل الكبريات P^* نرسم مجموعة النقاط الممثلة للتصرفات المركبة:



نجد أن التصرف المركب أقل الكبريات يقع بين d_2, d_4 لذا فإنه يأخذ الشكل التالي:

$$P^* = (0, \quad p, \quad (1-p), \quad 0)$$

ونحسبه كما يلي:

$$R_1 = d_2 p + (1-p) d_4 = p\,(0.3) + (1-p)(0.9) = 0.9 - 0.6p$$

$$R_1 = d_2 p + (1-p) d_4 = p\,(2) + (1-p)(0.8) = 0.8 + 1.2p$$

$R_1 = R_2 \Rightarrow$

$$0.9 - 0.6p = 0.8 + 1.2p$$

$\Rightarrow$

$$p = 1/18$$

$\Rightarrow$

$$P^* = (0, 1/18, 17/18, 0)$$

$\Rightarrow$

$$Max_\theta R(P^*, \theta) = 13/15 = 0.87$$

4. وتكون فائدة الانتقال من $\boldsymbol{d^*}$ الى $\boldsymbol{P^*}$ هو حصول التخفيض التالي:

$$Max_\theta r(d^*,\theta) - Max_\theta R(P^*,\theta) = 0.9 - \frac{13}{15} = \frac{1}{30}$$

5. قيمة البيانات في الحل البسيط أقل الكبريات هو التخفيض الحاصل من الفرق:

$$\boldsymbol{Max_{\theta}\ell(a^{*},\theta) - Max_{\theta}r(d^{*},\theta)}$$

وواضح من جدول الخسارة أن $a^{*} = a_2$ و $Max_{\theta}\ell(a^{*},\theta) = 3$ وبذلك يكون:

$$Max_{\theta}\ell(a^{*},\theta) - Max_{\theta}r(d^{*},\theta) = 3 - 0.9 = 2.1$$

6. قيمة البيانات في الحل المركب أقل الكبريات هو التخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_\theta L(P^*,\theta) - Max_\theta R(P^*,\theta)$$

وقد حسبنا في 3 المقدار:

$$Max_\theta R(P^*,\theta) = 13/15$$

ولحساب $Max_\theta L(P^*,\theta)$ نرسم النقاط الممثلة للإجراءات المركبة ونجد أن الإجراء المركب أقل الكبريات هو $P^* = (p,(1-p))$ ونحسبه كما يلي:

$$L_1 = a_1 p + (1-p)a_2 = p(0) + (1-p)(3) = 3 - 3p$$

$$L_2 = a_1 p + (1-p)a_2 = p(4) + (1-p)(0) = 4p$$

$$L_1 = L_2$$

$\Rightarrow$

$$3 - 3p = 4p$$

$\Rightarrow$

$$p = 3/7$$

$\Rightarrow$

$$P^* = (3/7,4/7)$$

$$\boldsymbol{Max_\theta L(P^*, \theta) = 12/7}$$

وبذلك تكون قيمة البيانات للحل المركب أقل الكبريات يساوي:

$$\boldsymbol{Max_\theta L(P^*, \theta) - Max_\theta R(P^*, \theta) = 12/7 - 13/15 = 89/105}$$

7. قيمة البيانات في حل بيز عند التوزيع المبدئي $g(\theta_1) = 1/3$ هو الفرق:

$$\boldsymbol{B(a^*) - B(d^*)}$$

- نحسب أولاً إجراء بيز a^* كما يلي:

$$B(a_1) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(4) = \frac{8}{3}$$

$$B(a_2) = \frac{1}{3}(3) + \frac{2}{3}(0) = 1$$

$\Rightarrow$

$$a^* = a_2$$

$$B(a^*) = 1$$

- وثم نحسب تصرف بيز d^* كما يلي:

$$B(d_1) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(4) = \frac{8}{3} = 2.66$$

$$B(d_2) = \frac{1}{3}(0.3) + \frac{2}{3}(2) = \frac{4.3}{3} = 1.43$$

$$B(d_4) = \frac{1}{3}(0.9) + \frac{2}{3}(0.8) = \frac{5}{6} = 0.83$$

$$B(d_8) = \frac{1}{3}(3) + \frac{2}{3}(0) = 1$$

$\Rightarrow$

$$d^* = d_4$$

$\Rightarrow$

$$B(d^*) = \frac{5}{6} = 0.83$$

قيمة البيانات في حل بيز هي:

$$\boldsymbol{B(a^*) - B(d^*) = 1 - 5/6 = 1/6}$$

8. نقترح التصرف المركب

$$P = (1/8, \quad 2/8, \quad 4/8, \quad 1/8)$$

الذي تمثله النقطة:

$$R_1 = \left(\frac{1}{8}\right)(0) + \left(\frac{2}{8}\right)(0.3) + \left(\frac{4}{8}\right)(0.9) + \left(\frac{1}{8}\right)(3) = 0.9$$

$$R_2 = \left(\frac{1}{8}\right)(4) + \left(\frac{2}{8}\right)(2) + \left(\frac{4}{8}\right)(0.8) + \left(\frac{1}{8}\right)(0) = 1.4$$

$$\Rightarrow Max_\theta R(P,\theta) = 1.4$$

ونقارنه مع $P^* = (0, \ 1/18, \ \ 17/18, \ 0)$

وقد وجدنا في (3) أن $\boldsymbol{Max_\theta R(P^*,\theta) = 0.87}$

وتكون المقارنة بالشكل المحقق التالي

$$Max_\theta R(P^*,\theta) = 0.87 \leq Max_\theta R(P,\theta) = 1.4$$