111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1445 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول (9 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^4 (x^2+1)\,dx$. [3]

الحل : $[a,b]=[0,4]$ و $f(x)=x^2+1$.

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_k = a + k\,\Delta_x = 0 + k\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{4k}{n}$$

$$f(x_k) = \left(\frac{4k}{n}\right)^2 + 1 = \frac{16k^2}{n^2} + 1$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_x = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k^2}{n^2}+1\right)\left(\frac{4}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{64k^2}{n^3}+\frac{4}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{64k^2}{n^3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}$$

$$= \frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{64}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n}(n) = \frac{32}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) + 4$$

$$\int_0^4 (x^2+1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{32}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)+4\right]$$

$$= \frac{32}{3}(2) + 4 = \frac{64}{3} + 4 = \frac{76}{3}$$

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\sin(x^2)}^{\pi^{2x}} \sqrt{2t^3+2}\,dt$. [2]

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sin(x^2)}^{\pi^{2x}} \sqrt{2t^3+2}\,dt$$

$$= \sqrt{2\left(\pi^{2x}\right)^3+2}\,\left(\pi^{2x}(2)\ln\pi\right) - \sqrt{2\left(\sin(x^2)\right)^3+2}\,\left(\cos(x^2)\,(2x)\right)$$

$$= 2\pi^{2x}\ln\pi\sqrt{2\pi^{6x}+2} - 2x\,\cos(x^2)\sqrt{2\sin^3(x^2)+2}$$

احسب $\frac{dy}{dx}$ فيمايلي :

(3) $y = \tan^{-1}(3x)\ \log_5|1 - sec(3x)|$. [2]

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{1+(3x)^2}\,(3)\right)\ \log_5|1 - sec(3x)| + \tan^{-1}(3x)\ \left(\frac{-\sec(3x)\tan(3x)\ (3)}{1-\sec(3x)}\,\frac{1}{\ln 5}\right)$$

$$= \frac{3\log_5|1-\sec(3x)|}{1+9x^2} - \frac{3\sec(3x)\tan(3x)\ \tan^{-1}(3x)}{\ln 5\,(1-\sec(3x))}$$

(4) $y = (\cot x)^{\sin x} + 4^x$. [2]

الحل :

لتكن $y = f(x) + g(x)$ حيث $f(x) = (\cot x)^{\sin x}$ و $g(x) = 4^x$.

عندئذ $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) + g'(x)$

أولاً - $g'(x) = 4^x\ (1)\ln 4 = 4^x \ln 4$

ثانياً - حساب $f'(x)$

$$f(x) = (\cot x)^{\sin x} \implies \ln|f(x)| = \ln\left|(\cot x)^{\sin x}\right| = \sin x\ \ln|\cot x|$$

بإشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x\ \ln|\cot x| + \sin x\left(\frac{-\csc^2 x}{\cot x}\right)$$

$$f'(x) = f(x)\left[\cos x\ \ln|\cot x| - \frac{\sin x\csc^2 x}{\cot x}\right] = (\cot x)^{\sin x}\ \ [\cos x\ \ln|\cot x| - \sec x]$$

أي أن $\frac{dy}{dx} = (\cot x)^{\sin x}\ \ [\cos x\ \ln|\cot x| - \sec x] + 4^x\ln 4$

السؤال الثاني (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \left(\sqrt{x}\, e^{x^2}\right)^2\ dx$. [2]

الحل :

$$\int \left(\sqrt{x}\, e^{x^2}\right)^2\ dx = \int \left(\sqrt{x}\right)^2\left(e^{x^2}\right)^2\ dx = \int x\, e^{2x^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{2x^2}(4x)\,dx = \frac{1}{4}e^{2x^2} + c$$

باستخدام القانون

$$\int e^{f(x)}\, f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$$

(2) $\int x\sqrt{x+1}\, dx$. [2]

الحل : بوضع $x = u - 1 \implies u = x + 1$ و $dx = du$.

$$\int x\sqrt{x+1}\, dx = \int (u-1)\sqrt{u}\, du = \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\, du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\, (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\, (x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(3) $\int_0^1 x\, 5^{2-x^2}\, dx$. [2]

الحل :

$$\int_0^1 x\, 5^{2-x^2}\, dx = \frac{1}{-2}\int_0^1 5^{2-x^2}(-2x)\, dx = \frac{1}{-2}\left[\frac{5^{2-x^2}}{\ln 5}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{-2}\left[\frac{5^{2-(1)^2}}{\ln 5} - \frac{5^{2-(0)^2}}{\ln 5}\right] = \frac{1}{-2}\left[\frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^2}{\ln 5}\right] = \frac{1}{-2}\left(\frac{-20}{\ln 5}\right) = \frac{10}{\ln 5}$$

باستخدام القانون $\int a^{f(x)}\, f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$.

(4) $\int \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. [2]

الحل :

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\, dx$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-x)\, dx$$

$$= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\, dx$$

$$= 2\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\,\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$[2] \;.\; \int \frac{\tan\left(\ln(x^2)\right)}{x}\,dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{\tan\left(\ln(x^2)\right)}{x}\,dx = \int \tan\left(2\ln|x|\right)\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan\left(2\ln|x|\right)\,\frac{2}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\sec\left(2\ln|x|\right)\right| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tan\left(f(x)\right)\,f'(x)\,dx = \ln\left|\sec\left(f(x)\right)\right| + c$$

$$[2] \;.\; \int \frac{\sec\left(\sqrt{x}\right)\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{\sec\left(\sqrt{x}\right)\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \sec\left(\sqrt{x}\right)\tan\left(\sqrt{x}\right)\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\int \sec\left(\sqrt{x}\right)\tan\left(\sqrt{x}\right)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\sec\left(\sqrt{x}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec\left(f(x)\right)\tan\left(f(x)\right)\,f'(x)\,dx = \sec\left(f(x)\right) + c$$

$$[2] \;.\; \int \frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{x^2+1}\,dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{x^2+1}\,dx = \int \left(\tan^{-1}x\right)^2\,\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\left(\tan^{-1}x\right)^3}{3} + c$$

باستخدام القانون

$\int [f(x)]^n\,f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ ، حيث $n \neq -1$.

$$[2] \;.\; \int \frac{\sin(2x)\,\cos(2x)}{\sin^2(2x)}\,dx \quad (8)$$

الحل :

$$\int \frac{\sin(2x)\ \cos(2x)}{\sin^2(2x)}\, dx = \int \frac{\sin(2x)\ \cos(2x)}{\sin(2x)\ \sin(2x)}\, dx = \int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cos(2x)\ (2)}{\sin(2x)}\, dx = \ln|\sin(2x)| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1445 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (4 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \cosh(3x^2) + sech^{-1}(2x)$. [2]

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(3x^2)\,(6x) + \frac{-1}{2x\,\sqrt{1-(2x)^2}}\,(2)$$
$$= 6x\sinh(3x^2) - \frac{1}{x\,\sqrt{1-4x^2}}$$

(2) $y = \coth^{-1}(3x) + \tanh^2\sqrt{2x}$. [2]

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1-(3x)^2}(3) + 2\left(\tanh\sqrt{2x}\right)^1\ sech^2\sqrt{2x}\ \frac{1}{2\sqrt{2x}}(2)$$
$$= \frac{-3}{1-9x^2} + \frac{2\tanh\sqrt{2x}\,sech^2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$

السؤال الثاني (21 درجة): أحسب التكاملات التالية

(1) $\int e^{-x}\cosh x\,dx$. [2]

الحل :

$$\int e^{-x}\cosh x\,dx = \int e^{-x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\,dx = \int\left(\frac{e^0+e^{-2x}}{2}\right)\,dx$$
$$= \int\frac{1}{2}\,dx + \int\frac{e^{-2x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{-2}\int e^{-2x}\,(-2)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,e^{-2x} + c = \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c$$

باستخدام القانون

$$\int e^{f(x)}\,f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+x}}$. [2]

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+x}} = \int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{(1)^2+(\sqrt{x})^2}}\,dx$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{(1)^2+(\sqrt{x})^2}}\,dx = 2\sinh^{-1}\left(\sqrt{x}\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+a^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ ، حيث $a>0$.

حل آخر : باستخدام التعويض $u=\sqrt{x+1} \implies u^2=x+1 \implies u^2-1=x$

عندئذ $2u\,du=dx$ و $\sqrt{x}=\sqrt{u^2-1}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+x}} = \int \frac{2u}{\sqrt{u^2-1}\,u}\,du = 2\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du$$

$$= 2\cosh^{-1}(u)+c = 2\cosh^{-1}\left(\sqrt{x+1}\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ ، حيث $|f(x)|>a$ و $a>0$.

(3) $\int_1^e x^3\ln x\,dx$. [2]

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^3\,dx \\ du &= \frac{1}{x}\,dx & v &= \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

$$\int_1^e x^3\ln x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\,\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\,\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\,\ln x\right]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\,\ln x\right]_1^e - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e = \left[\frac{e^4}{4}\ln(e) - \frac{1}{4}\ln(1)\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4}{16} + \frac{1}{16}$$

(4) $\int \sin^5 x \, \cos^3 x \, dx$. [2]

الحل :

باستخدام التعويض $u = \sin x$

عندئذ $du = \cos x \, dx$

$$\int \sin^5 x \, \cos^3 x \, dx = \int \sin^5 x \, \cos^2 x \, \cos x \, dx \int \sin^5 x \, \left(1 - \sin^2 x\right) \, \cos x \, dx$$

$$= \int u^5 \, \left(1 - u^2\right) \, du = \int \left(u^5 - u^7\right) \, du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + c = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c$$

(5) $\int \cosh^{-1} x \, dx$. [2]

الحل :

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \cosh^{-1} x \qquad dv = 1 \, dx$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \qquad v = x$$

$$\int \cosh^{-1} x \, dx = x \cosh^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, x \, dx$$

$$= x \cosh^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} (2x) \, dx$$

$$= x \cosh^{-1} x - \frac{1}{2} \frac{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1} + c$$

(6) $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. [3]

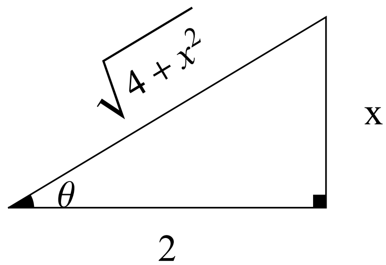
الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $\tan \theta = \frac{x}{2} \implies x = 2 \tan \theta$

$$dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{\left(4 + 4 \tan^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{\left(4 \left(1 + \tan^2 \theta\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{(4 \sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta}{(4)^{\frac{3}{2}}\sec^3\theta}\,d\theta = \frac{2}{8}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\sin\theta + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\,\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c$$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx$. [3]

الحل :

$$\int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{(2)^2-(\cos x)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\tanh^{-1}\left(\frac{\cos x}{2}\right) + c$$

باستخدام القانون

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $|f(x)| < a$ و $a > 0$.

(8) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3+9x}\,dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x+3}{x^3+9x} = \frac{x+3}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

$$\frac{x+3}{x(x^2+9)} = \frac{A(x^2+9)}{x(x^2+9)} + \frac{x\,(Bx+C)}{x(x^2+9)}$$

$$x+3 = A(x^2+9) + x(Bx+C)$$

$$x+3 = Ax^2 + 9A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + 9A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود قي الطرفين نحصل على :

$$\begin{array}{lll} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ 9A=3 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نحصل على : $9A=3 \implies A=\frac{1}{3}$.

من المعادلة (1) نحصل على : $\frac{1}{3}+B=0 \implies B=-\frac{1}{3}$.

$$\int \frac{x+3}{x^3+9x}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{-\frac{1}{3}x+1}{x^2+9}\right)\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}}{x}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x}{x^2+9}\,dx + \int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx + \int \frac{1}{x^2+(3)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$. [2]

الحل : $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\,dx$

باستخدام التعويض $x=u^4$ ، أي أن $u=x^{\frac{1}{4}}$

$$dx = 4u^3\,du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{4u^3}{(u^4)^{\frac{1}{4}}+(u^4)^{\frac{1}{2}}}\,du = \int \frac{4u^3}{u+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{4u^3}{u(1+u)}\,du = 4\int \frac{u^2}{u+1}\,du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$4\int \frac{u^2}{u+1}\,du = 4\int \left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)\,du$$

$$= 4\left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1|\right) + c = 2u^2 - 4u + 4\ln|u-1| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}} = 2\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}}+1\right| + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}}+1\right| + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1445 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x-1)^2$ على الفترة $[1,4]$. [3]

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = (x-1)^2$ و $[a,b] = [1,4]$

$$(4-1)\,(c-1)^2 = \int_1^4 (x-1)^2\, dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^4$$

$$3(c-1)^2 = \frac{(4-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3} = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$

$$(c-1)^2 = 3 \implies c-1 = \pm\sqrt{3} \implies c = 1 \pm \sqrt{3}$$

لاحظ أن $c = 1+\sqrt{3} \in (1,4)$ بينما $c = 1-\sqrt{3} \notin (1,4)$

قيمة c المطلوبة هي $1+\sqrt{3}$.

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\ln|x|}^{e^x} \sqrt{t^2+5}\, dt$. [2]

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\ln|x|}^{e^x} \sqrt{t^2+5}\, dt$

$$F'(x) = \sqrt{(e^x)^2+5}\ (e^x) - \sqrt{(\ln|x|)^2+5}\ \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^x\,\sqrt{e^{2x}+5} - \frac{\sqrt{\ln^2|x|+5}}{x}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \sinh^{-1}(3^x) + \ln|\tanh(4x)|$. [2]

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(3^x)^2}}\ (3^x \ln 3) + \frac{sech^2(4x)\,(4)}{\tanh(4x)}$$

$$= \frac{3^x \ln 3}{\sqrt{1+3^{2x}}} + \frac{4\, sech^2(4x)}{\tanh(4x)}$$

الجزء الثاني (14 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

$$(1)\quad \int \frac{2}{\sqrt{-x^2-6x}}\, dx \ . \ [3]$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-6x}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{-(x^2+6x+9)+9}}\, dx$$

$$= 2\int \frac{1}{\sqrt{9-(x^2+6x+9)}}\, dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{(3)^2-(x+3)^2}}\, dx = \ 2\ \sin^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

$$(2)\quad \int x^2\ \cosh x\, dx \ . \ [3]$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= \cosh x\, dx \\ du &= 2x\, dx & v &= \sinh x \end{aligned}$$

$$\int x^2\ \cosh x\, dx = x^2\ \sinh x - \int 2x\ \sinh x\, dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{aligned} u &= 2x & dv &= \sinh x\, dx \\ du &= 2\, dx & v &= \cosh x \end{aligned}$$

$$\int x^2\ \cosh x\, dx = x^2\ \sinh x - \left[2x\ \cosh x - \int 2\cosh x\, dx\right]$$

$$= x^2\ \sinh x - 2x\ \cosh x + 2\int \cosh x\, dx$$

$$= x^2\ \sinh x - 2x\ \cosh x + 2\sinh x + c$$

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx$. [3]

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

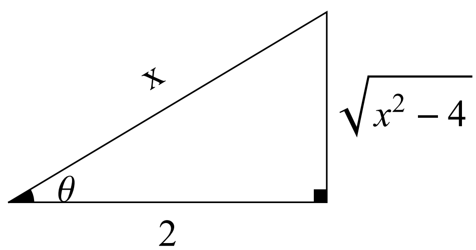
ضع $\cos\theta = \frac{2}{x} \implies \sec\theta = \frac{x}{2} \implies x = 2\sec\theta$

$dx = 2\sec\theta\ \tan\theta\, d\theta$

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = \sqrt{4\left(\sec^2\theta - 1\right)} = \sqrt{4\tan^2\theta} = 2\tan\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2\sec\theta\ \tan\theta}{(2\sec\theta)^2\, 2\tan\theta}\,d\theta = \int \frac{\sec\theta}{4\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\ \sin\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{4}\ \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + c$$

(4) $\int \frac{4x^2 - x + 12}{x^3 + 4x}\,dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{4x^2-x+12}{x^3+4x} = \frac{4x^2-x+12}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{4x^2-x+12}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A\left(x^2+4\right)}{x\left(x^2+4\right)} + \frac{(Bx+C)\,x}{\left(x^2+4\right)x}$$

$$4x^2 - x + 12 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$4x^2 - x + 12 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$4x^2 - x + 12 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lll} A+B=4 & \longrightarrow & (1) \\ C=-1 & \longrightarrow & (2) \\ 4A=12 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (2) نجد أن : $C = -1$

من المعادلة (3) نجد أن : $A = 3$

من المعادلة (1) نجد أن : $B = 1$ $3 + B = 4 \implies$

$$\int \frac{4x^2 - x + 12}{x^3 + 4x}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx$$

$$= 3\int \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx - \int \frac{1}{(x)^2 + (2)^2}\, dx$$

$$= 3\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx$. [2]

الحل : $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}\, dx$

باستخدام التعويض $x = u^6$ ، أي أن $u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6u^5}{(u^6)^{\frac{1}{2}} + (u^6)^{\frac{1}{3}}}\, du = \int \frac{6u^5}{u^3 + u^2}\, du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(1+u)}\, du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$6\int \frac{u^3}{u+1}\, du = 6\int \left(u^2 - u + 1 + \frac{-1}{u+1}\right) du$$

$$= 6\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1|\right) + c = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|u-1| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}} - 1| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}} - 1| + c$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

(1) احسب $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x+5x}{e^{2x}+2x+1}$. [2]

الحل : $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ $\quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x+5x}{e^{2x}+2x+1}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+5}{e^{2x}(2)+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+5}{2e^{2x}+2}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}(2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4e^x} = 0$$

إذاً $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x+5x}{e^{2x}+2x+1} = 0$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty \dfrac{1}{(2x-1)^3}\,dx$ متقارباً أم متباعداً . [2]

الحل :

$$\int_1^\infty \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\int_1^t (2x-1)^{-3}(2)\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{(2x-1)^{-2}}{-2}\right]_1^t\right) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2(2x-1)^2}\right]_1^t\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2(2t-1)^2} - \frac{1}{-2(2(1)-1)^2}\right]\right) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2(2t-1)^2} + \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

التكامل المعتل متقارب .

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=-x^2$ و $y=x^2+1$ و $x=-1$ و $x=2$ ، وجد مساحتها . [3]

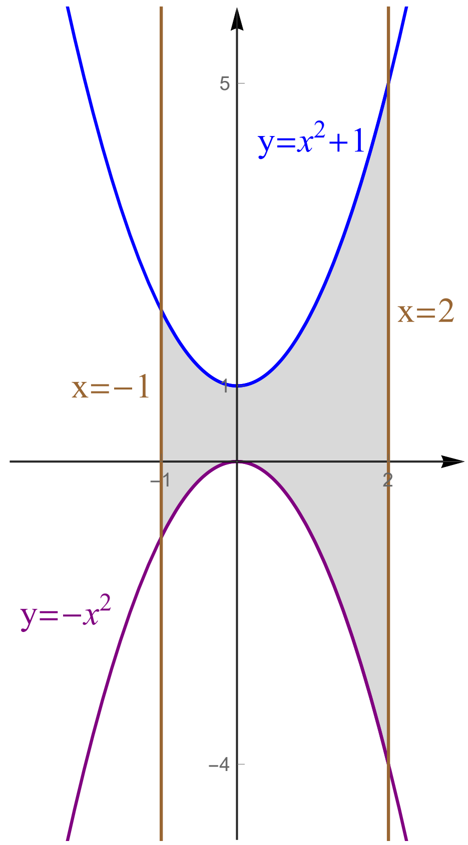
الحل :

المنحنى $y=x^2+1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y=-x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1, 0)$.

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.



$$\text{A} = \int_{-1}^{2} \left[(x^2+1) - (-x^2)\right]\, dx = \int_{-1}^{2} (2x^2+1)\, dx = \left[2\,\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2}$$

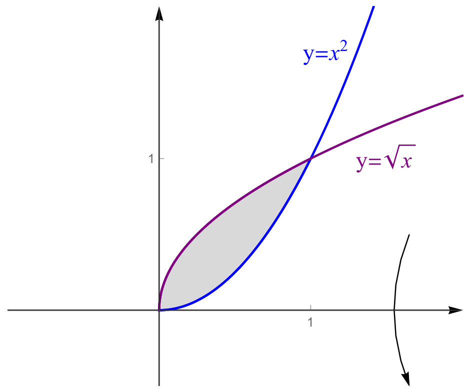
$$= \left(2\left(\frac{8}{3}\right) + 2\right) - \left(2\left(\frac{-1}{3}\right) - 1\right) = \frac{16}{3} + 2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9$$

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ ، ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x . [3]

الحل :

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

$y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ الذي رأسه $(0, 0)$ وفتحته لليمين .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\,,\; x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right]\, dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)]\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{5}\right)\right] = \pi \left(\frac{5}{10} - \frac{2}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

(5) جد طول المنحنى $y = 2 + \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 2$. [3]

الحل :

$$y' = 0 + \sinh x = \sinh x$$

$$\mathrm{L} = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} |\cosh x|\, dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 2} = \sinh(\ln 2) - \sinh(0)$$

$$= \sinh(\ln 2) - 0 = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

(6) حول المعادلة القطبية $r = 8\cos\theta + 6\sin\theta$ إلى معادلة كارتيزية . [2]

الحل :

$$r = 8\cos\theta + 6\sin\theta \implies r^2 = 8(r\cos\theta) + 6(r\sin\theta) \implies x^2 + y^2 = 8x + 6y$$

$$\implies x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0 \implies (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 16 + 9$$

$$\implies (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

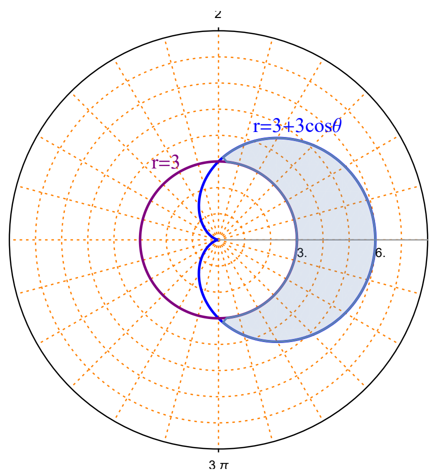
تمثل دائرة مركزها النقطة $(4,3)$ ونصف قطرها 5 .

(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3 + 3\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ وجد مساحتها. [3]

الحل :

المنحنى $r = 3 + 3\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى اليمين ومتناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 3 + 3\cos\theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$3 + 3\cos\theta = 3 \implies 3\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}\ ,\ \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(3+3\cos\theta)^2 - (3)^2\right]\, d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[9 + 18\cos\theta + 9\cos^2\theta - 9\right]\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[18\cos\theta + 9\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(18\cos\theta + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\theta\right)\, d\theta$$

$$= \left[18\sin\theta + \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(18\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{9}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{9}{4}\sin(\pi)\right) - \left(18\sin(0) + \frac{9}{2}(0) + \frac{9}{4}\sin(0)\right)$$

$$= \left(18(1) + \frac{9\pi}{4} + \frac{9}{4}(0)\right) - \left(18(0) + 0 + \frac{9}{4}(0)\right) = 18 + \frac{9\pi}{4}$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1445 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (9 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (x^2-1)\,dx$. [3]

الحل : $[a,b]=[0,2]$ و $f(x)=x^2-1$.

$$\Delta_x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_k=a+k\,\Delta_x=0+k\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2k}{n}$$

$$f(x_k)=\left(\frac{2k}{n}\right)^2-1=\frac{4k^2}{n^2}-1$$

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_x=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}-1\right)\left(\frac{2}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k^2}{n^3}-\frac{2}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}$$

$$=\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{8}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{2}{n}(n)=\frac{4}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)-2$$

$$\int_0^2 (x^2-1)\,dx=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)-2\right]$$

$$=\frac{4}{3}(2)-2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\int_{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}^{5^{3x}}\sqrt{t^2+1}\,dt$. [2]

الحل :

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}^{5^{3x}}\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$=\sqrt{\left(5^{3x}\right)^2+1}\,\left(5^{3x}\,(3)\ln 5\right)-\sqrt{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2+1}\,\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=3\,5^{2x}\ln 5\sqrt{5^{6x}+1}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}$$

احسب $\frac{dy}{dx}$ فيمايلي :

(3) $y = \tan^{-1}(2x)\ \log|\sec x + \tan x|$. [2]

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{1+(2x)^2}\,(2)\right)\ \log|\sec x + \tan x| + \tan^{-1}(2x)\ \left(\frac{\sec x\tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\,\frac{1}{\ln 10}\right)$$

$$= \frac{2\log|\sec x + \tan x|}{1+4x^2} + \frac{\sec x\ \tan^{-1}(2x)}{\ln 10}$$

(4) $y = (\tan x)^{\sec x} + 5^x$. [2]

الحل :

لتكن $y = f(x) + g(x)$ حيث $f(x) = (\tan x)^{\sec x}$ و $g(x) = 5^x$.

عندئذ $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) + g'(x)$

أولاً - $g'(x) = 5^x\ (1)\ln 5 = 5^x \ln 5$

ثانياً - حساب $f'(x)$

$$f(x) = (\tan x)^{\sec x} \quad\Longrightarrow\quad \ln|f(x)| = \ln\left|(\tan x)^{\sec x}\right| = \sec x\ \ln|\tan x|$$

بإشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sec x\ \tan x\ \ln|\tan x| + \sec x\left(\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$$

$$f'(x) = f(x)\left[\sec x\ \tan x\ \ln|\tan x| + \frac{\sec^3 x}{\tan x}\right]$$

$$= (\tan x)^{\sec x}\left[\sec x\ \tan x\ \ln|\tan x| + \frac{\sec^3 x}{\tan x}\right]$$

أي أن $\frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\sec x}\left[\sec x\ \tan x\ \ln|\tan x| + \frac{\sec^3 x}{\tan x}\right] + 5^x \ln 5$

السؤال الثاني (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \left(\sqrt[3]{x}\, e^{\frac{x^2}{3}}\right)^3\ dx$. [2]

الحل :

$$\int \left(\sqrt[3]{x}\, e^{\frac{x^2}{3}}\right)^3\ dx = \int \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \left(e^{\frac{x^2}{3}}\right)^3\ dx = \int x\, e^{x^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{x^2} (2x) \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

باستخدام القانون

$$\int e^{f(x)} \, f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-9}} \, dx$. [2]

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-9}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2 - (3)^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x} \, (2)}{e^{2x} \sqrt{(e^{2x})^2 - (3)^2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sec^{-1} \left(\frac{e^{2x}}{3} \right) \right) + c = \frac{1}{6} \sec^{-1} \left(\frac{e^{2x}}{3} \right) + c$$

باستخدام القانون

$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} \, dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$ ، حيث $|f(x)| > a$ و $a > 0$.

(3) $\int_0^1 x \, 5^{2x^2} \, dx$. [2]

الحل :

$$\int_0^1 x \, 5^{2x^2} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 5^{2x^2} (4x) \, dx = \frac{1}{4} \left[\frac{5^{2x^2}}{\ln 5} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{5^{2(1)^2}}{\ln 5} - \frac{5^{2(0)^2}}{\ln 5} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{5^2}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{25-1}{\ln 5} \right) = \frac{6}{\ln 5}$$

باستخدام القانون

$$\int a^{f(x)} \, f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \, .$$

(4) $\int \frac{x+2}{x^2+1} \, dx$. [2]

الحل :

$$\int \frac{x+2}{x^2+1} \, dx = \int \left[\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right] dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}(x) + c$$

$$(5)\quad \int x^{-1}\ \sin\left(\ln(x^2)\right)\ dx\ .\ [2]$$

الحل :

$$\int x^{-1}\ \sin\left(\ln(x^2)\right)\ dx = \int \sin\left(2\ln|x|\right)\ \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\left(2\ln|x|\right)\ \frac{2}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(2\ln|x|\right)\right) + c = -\frac{\cos\left(2\ln|x|\right)}{2} + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sin\left(f(x)\right)\ f'(x)\,dx = -\cos\left(f(x)\right) + c$$

$$(6)\quad \int x^{-2}\ \csc\left(\frac{1}{x}\right)\cot\left(\frac{1}{x}\right)\ dx\ .\ [2]$$

الحل :

$$\int x^{-2}\ \csc\left(\frac{1}{x}\right)\cot\left(\frac{1}{x}\right)\ dx = \int \csc\left(\frac{1}{x}\right)\cot\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(\frac{1}{x^2}\right)\ dx$$

$$= \int -\csc\left(\frac{1}{x}\right)\cot\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ dx = \csc\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \csc\left(f(x)\right)\cot\left(f(x)\right)\ f'(x)\,dx = -\csc\left(f(x)\right) + c$$

$$(7)\quad \int \frac{\left(3+\sin^{-1}x\right)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ .\ [2]$$

الحل :

$$\int \frac{\left(3+\sin^{-1}x\right)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left(3+\sin^{-1}x\right)^3\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\left(3+\sin^{-1}x\right)^4}{4} + c$$

باستخدام القانون

$$\int [f(x)]^n \; f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$ ، حيث $n \neq -1$.

(8) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$. [2]

الحل الأول :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= \int \sec x \; \tan x \; dx = \sec x + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec x \; \tan x \; dx = \sec x + c$$

الحل الثاني :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int (\cos x)^{-2} \; \sin x \, dx = -\int (\cos x)^{-2} \; (-\sin x)\,dx$$

$$= -\frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{\cos x} + c = \sec x + c$$

$$\int [f(x)]^n \; f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$ ، حيث $n \neq -1$.

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1445 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول (4 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \tanh(2x^3) + sech^{-1}(3x)$. [2]

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = sech^2(2x^3)\,(6x^2) + \frac{-1}{3x\,\sqrt{1-(3x)^2}}\,(3)$$

$$= 6x^2\,sech^2(2x^3) - \frac{1}{x\,\sqrt{1-9x^2}}$$

(2) $y = \cosh^{-1}\left(\sqrt{x}\right) + \sinh^3\left(\frac{1}{x}\right)$. [2]

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 3\left(\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\ \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}} - \left(\frac{3}{x^2}\right)\sinh^2\left(\frac{1}{x}\right)\ \cosh\left(\frac{1}{x}\right)$$

السؤال الثاني (21 درجة): أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\coth\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$. [2]

الحل :

$$\int \frac{\coth\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \coth\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\int \coth\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\ln\left|\sinh\left(\sqrt{x}\right)\right| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \coth\left(f(x)\right)\ f'(x)\,dx = \ln\left|\sinh\left(f(x)\right)\right| + c$$

$$(2)\quad \int (2x+1)\ \cos x\, dx\ .\ [2]$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = 2x+1 & dv = \cos x\, dx \\ du = 2\, dx & v = \sin x \end{array}$$

$$\int (2x+1)\ \cos x\, dx = (2x+1)\ \sin x - \int 2\sin x\, dx$$

$$= (2x+1)\ \sin x - 2\int \sin x\, dx = (2x+1)\ \sin x - 2(-\cos x) + c$$

$$= (2x+1)\ \sin x + 2\cos x + c$$

$$(3)\quad \int \tan^2 x\ \sec^4 x\, dx\ .\ [2]$$

الحل :

باستخدام التعويض $u = \tan x$

عندئذ $du = \sec^2 x\, dx$

$$\int \tan^2 x\ \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x\ \sec^2 x\ \sec^2 x\, dx$$

$$\int \tan^2 x\ \left(1+\tan^2 x\right)\ \sec^2 x\, dx = \int u^2\ \left(1+u^2\right)\ du$$

$$= \int \left(u^2+u^4\right)\ du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c$$

$$(4)\quad \int \frac{1}{x\,\sqrt{x^6+25}}\, dx\ .\ [3]$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\,\sqrt{x^6+25}}\, dx = \int \frac{1}{x\,\sqrt{\left(x^3\right)^2+(5)^2}}\, dx = \int \frac{x^2}{x^2\, x\,\sqrt{\left(x^3\right)^2+(5)^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3\,\sqrt{\left(x^3\right)^2+(5)^2}}\, dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{5}\, csch^{-1}\left(\frac{x^3}{5}\right)\right] + c = -\frac{1}{15}\, csch^{-1}\left(\frac{x^3}{5}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{\left[f(x)\right]^2+a^2}}\, dx = -\frac{1}{a}\, csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$ حيث $a > 0$.

(5) $\int x \ \ln|x| \, dx$. [2]

الحل :

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln|x| \qquad dv = x\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ \ln|x| \, dx = \frac{x^2}{2} \ \ln|x| - \int \frac{x^2}{2} \, \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ \ln|x| - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ \ln|x| - \frac{1}{2} \, \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \ \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c$$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{x}}} \, dx$. [2]

الحل :

ضع $u = \sqrt{4+\sqrt{x}} \implies u^2 = 4 + \sqrt{x}$

$$\implies u^2 - 4 = \sqrt{x} \implies (u^2-4)^2 = x$$

عندئذ $2(u^2-4)\, 2u \, du = dx \implies 4u(u^2-4)\, du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{x}}} \, dx = \int \frac{4u(u^2-4)}{u} \, du = 4 \int (u^2-4) \, du$$

$$= 4\left[\frac{u^3}{3} - 4u\right] + c = 4\left[\frac{\left(\sqrt{4+\sqrt{x}}\right)^3}{3} - 4\left(\sqrt{4+\sqrt{x}}\right)\right] + c$$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}} \, dx$. [2]

الحل :باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$x^2 + 6x + 13 = \left(x^2 + 6x + 9\right) + 4 = (x+3)^2 + (2)^2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2 + (2)^2}} \, dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+a^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$.

(8) $\int \frac{3x^2+3x+8}{x^3+4x}\,dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3x^2+3x+8}{x^3+4x} = \frac{3x^2+3x+8}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{3x^2+3x+8}{x^3+4x} = \frac{A(x^2+4)}{x(x^2+4)}+\frac{(Bx+C)\,x}{x(x^2+4)}$$

$$3x^2+3x+8 = A(x^2+4)+x(Bx+C)$$

$$3x^2+3x+8 = Ax^2+4A+Bx^2+Cx = (A+B)x^2+Cx+4A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في الطرفين نحصل على :

$$\begin{array}{lll} A+B=3 & \longrightarrow & (1)\\ C=3 & \longrightarrow & (2)\\ 4A=8 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نحصل على : $4A=8 \implies A=2$.

من المعادلة (1) نحصل على : $2+B=3 \implies B=1$.

$$\int \frac{3x^2+3x+8}{x^3+4x}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{x+3}{x^2+4}\right)dx$$

$$= \int \frac{2}{x}\,dx+\int\frac{x}{x^2+4}\,dx+\int\frac{3}{x^2+4}\,dx$$

$$= 2\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+2^2}\,dx$$

$$= 2\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+3\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c$$

(9) $\int \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$. [3]

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $x=2\sin\theta \implies \sin\theta=\dfrac{x}{2}$

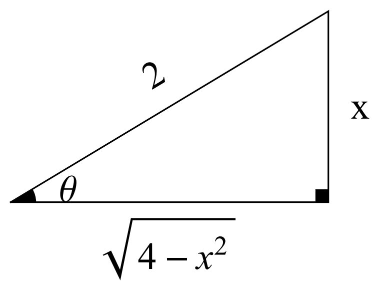
$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

$$\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}=\left(4-4\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}=\left[4\left(1-\sin^2\theta\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left(4\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}=(4)^{\frac{3}{2}}\ \left(\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}\ \left(\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}=2^3\ \cos^3\theta$$

$$\int\frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int\frac{2\cos\theta}{2^3\ \cos^3\theta}\,d\theta=\frac{1}{2^2}\ \int\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\ \tan\theta+c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\tan\theta=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\int\frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{1}{4}\ \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+c$$