111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1444 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات) :

(1) جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt{x-}$ على الفترة $[1,5]$. [3]

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $[a,b] = [1,5]$

$$(5-1)\,\sqrt{c-1} = \int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_1^5 (x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$4\sqrt{c-1} = \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \left[\frac{2}{3}\,(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{2}{3}\,(5-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\,(1-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$4\sqrt{c-1} = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3} \implies \sqrt{c-1} = \frac{1}{4}\,\frac{16}{3} = \frac{4}{3}$$

$$c-1 = \frac{16}{9} \implies c = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9} \in (1,5)$$

قيمة c المطلوبة هي $\frac{25}{9}$.

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\sqrt{2x}}^{e^{3x}} \cos(t^2+1)\,dt$. [2]

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sqrt{2x}}^{e^{3x}} \cos(t^2+1)\,dt$

$$F'(x) = \cos\left(\left(e^{3x}\right)^2 + 1\right)\ \left(e^{3x}\,(3)\right) - \cos\left(\left(\sqrt{2x}\right)^2 + 1\right)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}}\,(2)\right)$$

$$= 3\,e^{3x}\cos\left(e^{6x}+1\right) - \frac{\cos\left(2x+1\right)}{\sqrt{2x}}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \sinh^{-1}\left(5^{x^2-1}\right) + \log_6 |sech(4x)|$. [2]

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(5^{x^2-1}\right)^2 + 1}}\left(5^{x^2-1}\,(2x)\ \ln 5\right) + \frac{-sech(4x)\tanh(4x)\,(4)}{sech(4x)}\,\frac{1}{\ln 6}$$

$$= \frac{2x\, 5^{x^2-1}\ \ln 5}{\sqrt{5^{2x^2-2}+1}} - \frac{4\tanh(4x)}{\ln 6}$$

الجزء الثاني (14 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-6x+8}}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2-6x+8}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{(x^2-6x+9)-1}}\, dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2-(1)^2}}\, dx$$

$$= \ 2\ \cosh^{-1}\left(\frac{x-3}{1}\right) + c = 2\ \cosh^{-1}(x-3) + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-a^2}}\, dx = \cosh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(2) $\int x^2\ \ln|x|\, dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln|x| \qquad dv = x^2\, dx$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2\ \ln|x|\, dx = \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + c$$

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

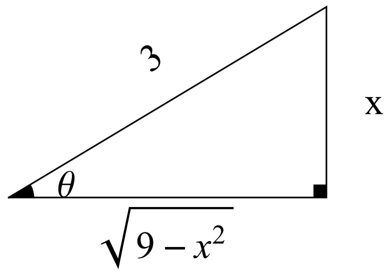
ضع $\sin\theta = \frac{x}{3} \implies x = 3\sin\theta$

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta} = \sqrt{9\left(1-\sin^2\theta\right)} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\, dx = \int \frac{3\cos\theta}{(3\sin\theta)^2\, 3\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{9\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\,d\theta = \frac{1}{9}\left(-\cot\theta\right) + c = -\frac{1}{9}\,\cot\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\frac{1}{9}\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c$$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x}\,dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x} = \frac{2x^2+9x-9}{x(x^2-9)} = \frac{2x^2+9x-9}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x+3}$$

$$\frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x} = \frac{A_1(x-3)(x+3)}{x(x-3)(x+3)} + \frac{A_2x(x+3)}{(x-3)x(x+3)} + \frac{A_3x(x-3)}{(x+3)x(x-3)}$$

$$\begin{aligned}2x^2+9x-9 &= A_1(x-3)(x+3) + A_2x(x+3) + A_3x(x-3)\\ &= A_1\left(x^2-9\right) + A_2x^2 + 3A_2x + A_3x^2 - 3A_3x\\ &= A_1x^2 - 9A_1 + A_2x^2 + 3A_2x + A_3x^2 - 3A_3x\\ &= \left(A_1+A_2+A_3\right)x^2 + \left(3A_2-3A_3\right)x - 9A_1\end{aligned}$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lll} A_1+A_2+A_3=2 & \longrightarrow & (1)\\ 3A_2-3A_3=9 & \longrightarrow & (2)\\ -9A_1=-9 & \longrightarrow & (3)\end{array}$$

من المعادلة (3) نجد أن : $A_1 = 1$

المعادلة (1) تصبح : (4) $\longrightarrow \quad A_2 + A_3 = 1$

المعادلة (2) تصبح : (5) $\longrightarrow \quad A_2 - A_2 = 3$

بجمع المعادلتين (5) , (4) نجد أن : $A_2 = 2 \implies 2A_2 = 4$

من المعادلة (4) نجد أن : $2 + A_3 = 1 \implies A_3 = -1$

$$\int \frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+3}\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx$$
$$= \ln|x| + 2\ln|x-3| - \ln|x+3| + c$$

(5) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$. [2]

الحل :

ضع $u = \sqrt{x} \implies x = u^2$

$dx = 2u\,du$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2u}{u^2+u}\,du = 2\int \frac{u}{u(u+1)}\,du = 2\int \frac{1}{u+1}\,du$$
$$= 2\ln|u+1| + c = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

(1) احسب $\lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{3x^2}$. [2]

الحل : $\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{3x^2}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{6x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{6} = \frac{-e^0}{6} = -\frac{1}{6}$$

إذاً $\lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x^2+1}\,dx$ متقارباً أم متباعداً . [3]

الحل :

$$\int_{-\infty}^{0} x\, e^{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} x\, e^{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{t}^{0} e^{x^2+1}(2x)\, dx \right)$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \left[e^{x^2+1} \right]_{t}^{0} \right) = \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \left[e^{1} - e^{t^2+1} \right] \right) = \frac{1}{2}\left[e - \infty \right] = -\infty$$

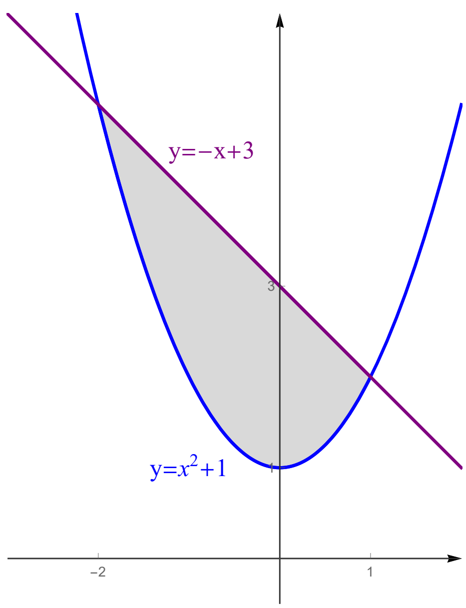
التكامل المعتل متباعد .

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 3 - x$ و $y = x^2 + 1$
وجد مساحتها . [3]

الحل :

المنحنى $y = 3 - x$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0, 3)$.

المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 3 - x$ و $y = x^2 + 1$:

$$x^2 + 1 = 3 - x \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x-1)(x+2) = 0 \implies x = 1\,,\ x = -2$$

$$\text{A} = \int_{-2}^{1} \left[(3 - x) - (x^2 + 1) \right]\, dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2 \right)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + 2(1) \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

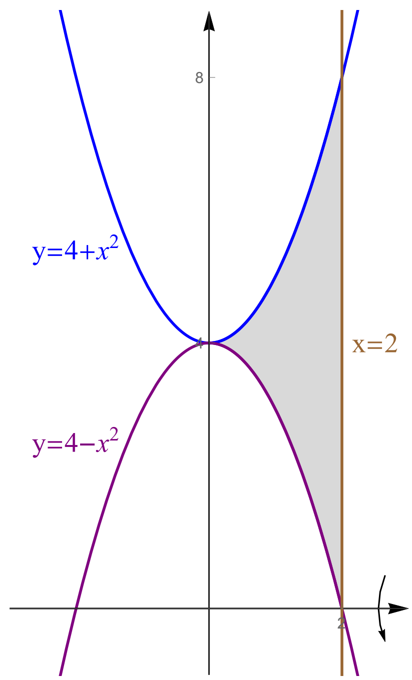
(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = 4 + x^2$ و $x = 2$ ، ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x . [3]

الحل :

$y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

$y = 4 + x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأعلى .

$x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.



باستخدام طريقة الوردات :

$$\text{V} = \pi \int_0^2 \left[\left(4 + x^2\right)^2 - (4 - x^2)^2 \right] \, dx = \pi \int_0^2 \left[\left(16 + 8x^2 + x^4\right) - (16 - 8x^2 + x^4) \right] \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(16 + 8x^2 + x^4 - 16 + 8x^2 - x^4\right) \, dx = \pi \int_0^2 \left(16x^2\right) \, dx$$

$$= \pi \left[16 \, \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \pi \left[16 \, \frac{2^3}{3} - 16 \, \frac{0^3}{3} \right] = \frac{128\pi}{3}$$

(5) جد طول المنحنى $y = 1 + \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 4$. [3]

الحل :

$$y' = 0 + \sinh x = \sinh x$$

$$\mathrm{L} = \int_0^{\ln 4} \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx = \int_0^{\ln 4} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^{\ln 4} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 4} |\cosh x|\ dx = \int_0^{\ln 4} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 4} = \sinh(\ln 4) - \sinh(0)$$

$$= \frac{e^{\ln 4} - e^{-\ln 4}}{2} - 0 = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

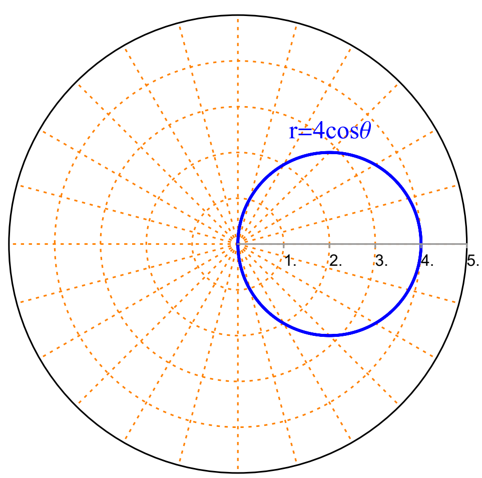
(6) حول المعادلة القطبية $r = 4\cos\theta$ إلى معادلة كارتيزية وارسمها . [2]

الحل :

$$r = 4\cos\theta \implies r^2 = 4(r\cos\theta) \implies x^2 + y^2 = 4x \implies x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$\implies \left(x^2 - 4x + 4\right) + y^2 = 4 \implies (x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

تمثل دائرة مركزها النقطة $(2, 0)$ ونصف قطرها 2 .

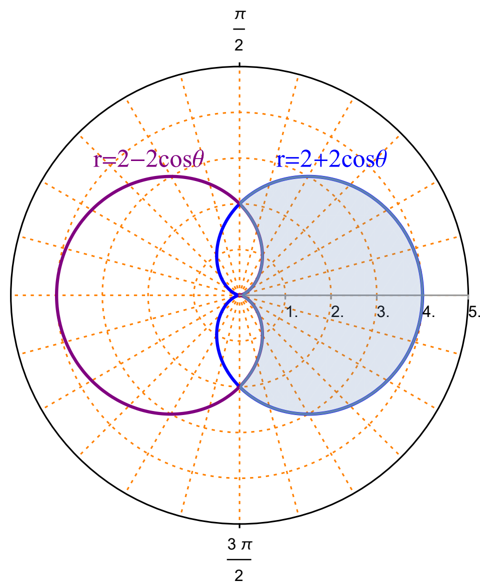


(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 2 - 2\cos\theta$ وجد مساحتها. [3]

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى اليمين ومتناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 2 - 2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى اليسار ومتناظر حول المحور القطبي .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ مع المنحنى $r = 2 - 2\cos\theta$:

$$2 + 2\cos\theta = 2 - 2\cos\theta \implies 4\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \ , \ \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (2-2\cos\theta)^2\right] \, d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right) - \left(4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right)\right] \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta - 4 + 8\cos\theta - 4\cos^2\theta\right) \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\cos\theta \, d\theta = 16\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right] = 16(1-0) = 16$$