481 ريض - التحليل الحقيقي (2)
حل الاختبار الفصلي - الفصل الأول 1444 هـ
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة التالية

(1) إذا كانت f دالة تزايدية فعلاً على الفترة $[a, b]$ ، فأثبت أن $f \in \mathcal{R}(a, b)$. [3]

الحل : بما أن f دالة تزايدية فعلاً على $[a, b]$ فإن $f(b) - f(a) > 0$.

لأي $\epsilon > 0$ ، نختار التجزئ $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ للفترة $[a, b]$ ،

بحيث يكون $\|P\| < \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$.

بما أن f تزايدية فعلاً فإن $M_i = f(x_{i+1})$ و $m_i = f(x_i)$ على الفترة الجزئية $[x_i, x_{i+1}]$ لكل $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right](x_{i+1} - x_i)$$

$$\leq \|P\| \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right] = \|P\| \; [f(b) - f(a)]$$

$$< \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \; [f(b) - f(a)] = \epsilon$$

وبالتالي $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

(2) (i) عرف مجموع ريمان للدالة المحدودة f على الفترة $[a, b]$. [1]

الحل : ليكن $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ تجزيئاً للفترة $[a, b]$ ،
و $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ علامة على التجزئ P ، إذا كان $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$
لكل $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ، نسمي المجموع $S(f, P, \alpha) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)\;(x_{i+1} - x_i)$
مجموع ريمان بالتجزئ P والعلامة α .

(ii) احسب $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2}$. [2]

الحل :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\frac{k^2}{n^2}+1}\,\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\,\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\Big[\tan^{-1}(x)\Big]_0^1=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

(3) إذا كانت f, g دالتين متصلتين على الفترة $[a,b]$ وكان $\int_a^b |f(x)-g(x)|\;dx=0$ ،

فأثبت أن $f(x)=g(x)$ لكل $x\in[a,b]$. [3]

الحل : بما أن f, g دالتين متصلتين على الفترة $[a,b]$ فإن $|f-g|$ متصلة على الفترة $[a,b]$.

وبما أن $|f(x)-g(x)|\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$ و $\int_a^b |f(x)-g(x)|\;dx=0$ فإن

$|f(x)-g(x)|=0$ لكل $x\in[a,b]$ وبالتالي $f(x)-g(x)=$ لكل $x\in[a,b]$ ،

ومن ثم يكون $f(x)=g(x)$ لكل $x\in[a,b]$.

(4) (i) أذكر نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل وبرهنها. [3]

الحل : نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

إذا كانت الدالة F قابلة للإشتقاق على $[a,b]$ و $F'\in\mathcal{R}(a,b)$ فإن

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)\ .$$

البرهان : إذا كان $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ تجزيئاً للفترة $[a,b]$ فإن

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[F\left(x_{i+1}\right)-F\left(x_i\right)\right]$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل على الفترة الجزئية $[x_i,x_{i+1}]$ لكل $i=0,1,\cdots,n-1$ ،

يوجد $\alpha_i\in(x_i,x_{i+1})$ بحيث $F\left(x_{i+1}\right)-F\left(x_i\right)=F'\left(\alpha_i\right)\ \left(x_{i+1}-x_i\right)$ ، فيكون

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}F'\left(\alpha_i\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)=S\left(F',P,\alpha\right)$$

حيث $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$ علامة على P .

باختيار متتالية (P_k) من التجزيئات بحيث $\|P_k\|\longrightarrow 0$ ، يصبح لدينا

$F(b)-F(a)=S\left(F',P,\alpha\right)$ لكل $k\in\mathbb{N}$

وبما أن $F'\in\mathcal{R}(a,b)$ فبأخذ النهاية للطرفين عندما $k\longrightarrow\infty$ نحصل على

$F(b)-F(a=\int_a^b F'(x)\,dx$.

(ii) إذا كانت $f_n\longrightarrow f$ على $[a,b]$ ، وكانت f'_n متصلة على $[a,b]$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وكانت $f'_n\longrightarrow g$ بانتظام، فأثبت أن $\int_a^x g(t)\,dt=f(x)-f(a)$ لكل $x\in[a,b]$. [3]

الحل : بما أن $f'_n(x)$ متصلة على $[a,b]$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن $f'_n\in\mathcal{R}(a,b)$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

وبما أن f'_n تتقارب بانتظام من g فإن $g\in\mathcal{R}(a,b)$ ، ولكل $x\in[a,b]$ يكون

$\int_a^x g(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(t)\,dt$ (لأن f'_n تتقارب بانتظام إلى g)

$=\lim_{n\to\infty}\left[f_n(x)-f_n(a)\right]$ (باستخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

$=f(x)-f(a)$ (لأن f_n تتقارب نقطياً إلى f)

(5) أدرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$. [3]

الحل :

$$\int_0^\infty \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx\le\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx+\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$$

على الفترة $[0,1]$: $x^5+2x\ge 2x\ge x\implies\sqrt{x^5+2x}\ge\sqrt{x}$ وبالتالي

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\infty$$

على الفترة $[1,\infty)$: $x^5+2x\ge x^5\implies\sqrt{x^5+2x}\ge\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$ وبالتالي

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx\le\int_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx<\infty$$

أي أن التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ متقارب .

(6) (i) ما المقصود بأن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على المجموعة $D\subset\mathbb{R}$. [2]

الحل : نقول أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على المجموعة $D \subset \mathbb{R}$ ،
إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ بحيث
$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \implies n \geq N$ لكل $x \in D$.
أو $0 \longrightarrow \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

(ii) لتكن $f_n(x) = \dfrac{x^n}{2+x^n}$:

- بين أن متتالية الدوال (f_n) ليست متقاربة بانتظام على $[0, 1]$. [2]

الحل : ندرس التقارب النقطي

لكل $x \in [0, 1)$: $x^n \longrightarrow 0$ وبالتالي $f_n(x) \longrightarrow \dfrac{0}{2+0} = 0$.

$f_n(1) = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

أي أن $f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{3} & x = 1 \end{cases}$ نقطياً .

لاحظ أن $f_n(x)$ متصلة على $[0, 1]$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، بينما $f(x)$ غير متصلة على $[0, 1]$ ،
وبالتالي f_n لا تتقارب بانتظام إلى f على $[0, 1]$.

- بين أن متتالية الدوال (f_n) متقاربة بانتظام على $[0, a]$، حيث $0 < a < 1$. [2]

الحل : على الفترة $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$: نلاحظ أن $f_n \longrightarrow 0$ نقطياً .
لكل $x \in [0, a]$ فإن $2 + x^n > 1$ وبالتالي

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = \frac{x^n}{2+x^n} \leq x^n$$

$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq a^n \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

أي أن f_n تتقارب بانتظام إلى الصفر على $[0, a]$.

(7) (i) أذكر نص اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال وبرهنه . [3]

الحل : نص اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال

لتكن (f_n) متتالية من الدوال المعرفة على D و (M_n) متتالية أعداد غير سالبة تحقق

$|f_n(x)| \leq M_n$ لكل $x \in D$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ، إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة

فإن متسلسلتي الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربتان بانتظام على D .

البرهان : لتكن $\epsilon > 0$

بما أن المتلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة ، فمن معيار كوشي لتقارب المتسلسلات العددية ، يوجد $N \in \mathbb{N}$

بحيث : $\sum_{k=m+1}^{n} M_n < \epsilon \implies n > m \geq N$

$$n > m \geq N \implies \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_n(x)| < \sum_{k=m+1}^{n} M_n < \epsilon, \forall x \in D$$

ومن معيار كوشي للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال تكون $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربتين بانتظام

على D .

(ii) أثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$. [3]

الحل : ضع $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}} \right| = \frac{1}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = M_n$$

بما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة ، فمن اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات

الدوال فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.