111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1438 - 1439 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن مُحمَّد الفاضل

السؤال الأول (9 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_0^2 (6x-5)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 6x - 5 \,,\, [a,b] = [0,2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[6\left(\frac{2k}{n}\right)-5\right]\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{24k}{n^2}-\frac{10}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{24k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{10}{n}$$

$$= \frac{24}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{24}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{10}{n}\,(n) = 12\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 10$$

$$\int_0^2 (6x-5)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(12\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 10\right) = 12 - 10 = 2$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ على الفترة $[-1,2]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $[a,b] = [-1,2]$

$$(2-(-1))\sqrt{c+2} = \int_{-1}^{2} \sqrt{x+2}\,dx = \int_{-1}^{2} (x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$3\sqrt{c+2} = \left[\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} = \frac{2}{3}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2}$$

$$3\sqrt{c+2} = \frac{2}{3}\left[(2+2)^{\frac{3}{2}} - (-1+2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\,[8-1] = \frac{14}{3}$$

$$3\sqrt{c+2} = \frac{14}{3} \implies \sqrt{c+2} = \frac{14}{9} \implies c+2 = \left(\frac{14}{9}\right)^2 \implies c = \left(\frac{14}{9}\right)^2 - 2$$

$$\implies c = \frac{196}{81} - \frac{162}{81} = \frac{34}{81} \in (-1,2)$$

(3) إذا كانت $F(x) = \displaystyle\int_{2x-3}^{x^2} \ln(t^2)\,dt$ فأوجد $F'(2)$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{2x-3}^{x^2} \ln(t^2)\,dt$$

$$F'(x) = \ln\left((x^2)^2\right)(2x) - \ln\left((2x-3)^2\right)(2) = 2x\ln(x^4) - 2\ln\left((2x-3)^2\right) = 8x\ln x - 4\ln(2x-3)$$

$$F'(2) = 16\ln 2 - 4\ln 1 = 16\ln 2 - 0 = 16\ln 2$$

السؤال الثاني (4 درجات) : أحسب $\dfrac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sqrt{x}\ \ln x$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

(2) $y = \left(\tan^{-1} x\right)^{\sin x}$

الحل :

ضع $\ln|y| = \ln\left|\left(\tan^{-1} x\right)^{\sin x}\right| = \sin x\ \ln\left(\tan^{-1} x\right)$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \cos x\ \ln\left(\tan^{-1} x\right) + \sin x\,\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\tan^{-1} x}$$

$$y' = y\left[\cos x\ \ln\left(\tan^{-1} x\right) + \frac{\sin x}{(1+x^2)\tan^{-1} x}\right]$$

$$y' = \left(\tan^{-1} x\right)^{\sin x}\left[\cos x\ \ln\left(\tan^{-1} x\right) + \frac{\sin x}{(1+x^2)\tan^{-1} x}\right]$$

السؤال الثالث (12 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$\int \sqrt{x}(x+1)^2\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \sqrt{x}(x+1)^2\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)\,dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{5}}}\,dx = \int x\,\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{5}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{5}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c = \frac{5}{8}\,\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{5}} + c$$

$$\int \frac{x^2+\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2+\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\left(x^2+\cos x\right)}{x^3+3\sin x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3\sin x\right| + c$$

$$\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx = \int e^{\cot x}\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int e^{\cot x}\csc^2 x\,dx$$

$$= -\int e^{\cot x}\left(-\csc^2 x\right)\,dx = -e^{\cot x} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{dx}{x\,(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}} = \int (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}\ \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\,(1+\ln x)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}\,dx = \int \frac{3^x}{\sqrt{1-(3^x)^2}}\,dx = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{3^x\ \ln 3}{\sqrt{1-(3^x)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\ \sin^{-1}(3^x) + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1438 - 1439 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول (4 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sqrt{x}\tanh\left(\sqrt{x}\right)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\tanh\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\, sech^2\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\tanh\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\, sech^2\left(\sqrt{x}\right)$$

(2) $y = \sinh\left(\tanh^{-1}(2x)\right)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh\left(\tanh^{-1}(2x)\right)\ \frac{2}{1-(2x)^2} = \cosh\left(\tanh^{-1}(2x)\right)\ \frac{2}{1-4x^2}$$

السؤال الثاني (21 درجة) : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \int \frac{e^x}{e^x\sqrt{1-(e^x)^2}}\, dx = -sech^{-1}\left(e^x\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\, dx = -\frac{1}{a}\, sech^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$, حيث $a > 0$.

(2) $\int \ln\left(1+x^2\right)\ dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln(1+x^2) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{2x}{1+x^2}\,dx \qquad v = x$$

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{1+x^2}\,x\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{(2x^2+2)-2}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \left(\int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2}\,dx - \int \frac{2}{1+x^2}\,dx\right)$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int 2\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1} x + c$$

(3) $\int \cos^3 x\,dx$

الحل :

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,\cos x\,dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x\,dx$$

$$\int (1-\sin^2 x)\,\cos x\,dx = \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

(4) $\int \tan^3 x\,\sec^3 x\,dx$

الحل :

$$\int \tan^3 x\,\sec^3 x\,dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan x\,dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)\sec^2 x \sec x \tan x\,dx$$

باستخدام التعويض $u = \sec x$

$$du = \sec x \tan x\,dx$$

$$\int \left(\sec^2 x - 1\right)\sec^2 x\,\sec x \tan x\,dx = \int \left(u^2-1\right)u^2\,du = \int \left(u^4 - u^2\right)\,dx$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

$$\int \cos(6x)\ \cos(4x)\, dx \quad (5)$$

الحل :

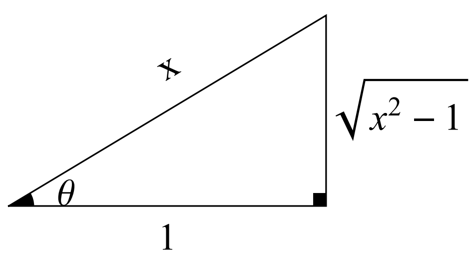
$$\int \cos(6x)\ \cos(4x)\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(6x-4x)+\cos(6x+4x)\right]\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(10x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\int \cos(2x)\ (2)\, dx + \frac{1}{2}\ \frac{1}{10}\int \cos(10x)\ (10)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{20}\sin(10x) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} \quad (6)$$

الحل : باستخدام التعويض المثلثي $x = \sec\theta$

$$dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec\theta\ \tan\theta}{\sec^3\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}}\, d\theta = \int \frac{\sec\theta\ \tan\theta}{\sec^3\theta\sqrt{\tan^2\theta}}\, d\theta \int \frac{\sec\theta\ \tan\theta}{\sec^3\theta\ \tan\theta}\, d\theta$$
$$= \int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\theta\right)\ d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + c$$
$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{2\sin\theta\ \cos\theta}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\ \cos\theta + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ و $\cos\theta = \dfrac{1}{x}$

أيضاً $x = \sec\theta \implies \theta = \sec^{-1} x$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\sec^{-1}x + \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ \frac{1}{x} + c = \frac{1}{2}\sec^{-1}x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + c$$

(7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$$

الحل : بإكمال المربع الكامل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+6x+9)-9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-(3)^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$, حيث $a>0$.

(8) $$\int \frac{x-2}{x^3+x}\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A\,(x^2+1)}{x(x^2+1)}+\frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x-2 = A(x^2+1)+(Bx+C)x = Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

$$x-2 = (A+B)x^2+Cx+A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcc} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ A=-2 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (1) نحصل على : $B=-A=2$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right)\,dx$$

$$= -2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -2\ln|x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}} \quad (9)$$

الحل : باستخدام التعويض $x = u^{12}$ ، أي أن $u = x^{\frac{1}{12}}$

$$dx = 12u^{11}\,du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{12u^{11}}{(u^{12})^{\frac{1}{3}}+(u^{12})^{\frac{1}{4}}}\,du = \int \frac{12u^{11}}{u^4+u^3}\,du$$

$$= \int \frac{12u^{11}}{u^3(u+1)}\,du = 12\int \frac{u^8}{u+1}\,du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$12\int \frac{u^8}{u+1}\,du = 12\int \left(u^7-u^6+u^5-u^4+u^3-u^2+u-1+\frac{1}{u+1}\right)\,du$$

$$= 12\left(\frac{u^8}{8}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^6}{6}-\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}-\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-u+\ln|u+1|\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{12}{7}x^{\frac{7}{12}}+2x^{\frac{1}{2}}-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{12}}+3x^{\frac{1}{3}}-4x^{\frac{1}{4}}+6x^{\frac{1}{6}}-12x^{\frac{1}{12}}+\ln\left|x^{\frac{1}{12}}+1\right|+c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1438 - 1439 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3\sqrt{x-1}$ على الفترة $[1,5]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c)=\int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x)=3\sqrt{x-1}$ و $[a,b]=[1,5]$

$$(5-1)\ \left(3\sqrt{c-1}\right)=\int_1^5 3\sqrt{x-1}\,dx=\int_1^5 3\,(x-1)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$4\left(3\sqrt{c-1}\right)=3\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5=2\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=\left[(5-1)^{\frac{3}{2}}-(1-1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$12\sqrt{c-1}=2\left[(4)^{\frac{3}{2}}-0\right]=2\times 8=16\implies\sqrt{c-1}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

$$\implies c-1=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}\implies c=\frac{16}{9}+1=\frac{25}{9}\in(1,5)$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx\ \ (1)$$

الحل :

$$\int\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx=\int\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}dx=-\int\frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\,dx=-\sin^{-1}\left(e^{-x}\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx=\sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}\ \ (2)$$

الحل :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}=2\int\frac{dx}{2\sqrt{x}\left(1-(\sqrt{x})^2\right)}=2\int\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{1-(\sqrt{x})^2}\,dx=2\tanh^{-1}\left(\sqrt{x}\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$.

(3) $\int 7^{3x-1}\,dx$

الحل :

$$\int 7^{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int 7^{3x-1}(3)\,dx = \frac{1}{3}\frac{7^{3x-1}}{\ln 7}+c$$

باستخدام القانون

$$\int a^{f(x)}f'(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^{f(x)}+c$$ حيث $a>0$.

(4) $\int x\sec^{-1}x\,dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u=\sec^{-1}x \qquad dv = x\,dx$$
$$du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int x\sec^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{4}\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}+c$$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+4)+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

(6) $\displaystyle\int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2}$$

$$\frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2}=\frac{A_1(x-2)^2+A_2(x+2)(x-2)+A_3(x+2)}{(x+2)(x-2)^2}$$

$$4x^2-13x+6=A_1(x^2-4x+4)+A_2(x^2-4)+A_3(x+2)$$

$$4x^2-13x+6=A_1x^2-4A_1x+4A_1+A_2x^2-4A_2+A_3x+2A_3$$

$$4x^2-13x+6=(A_1+A_2)\,x^2+(-4A_1+A_3)\,x+(4A_1-4A_2+2A_3)$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcc} A_1+A_2=4 & \longrightarrow & (1)\\ -4A_1+A_3=-13 & \longrightarrow & (2)\\ 4A_1-4A_2+2A_3=6 & \longrightarrow & (3)\end{array}$$

بضرب المعادلة (1) في العدد 4 ثم جمعها مع المعادلة (3) نحصل على :

$$8A_1+2A_3=22 \qquad \longrightarrow \qquad (4)$$

بضرب المعادلة (2) في العدد 2 ثم جمعها مع المعادلة (4) نحصل على :

$$4A_3=-4 \implies A_3=-1$$

من المعادلة (2) نجد أن $-4A_1+(-1)=-13 \implies -4A_1=-12 \implies A_1=3$

من المعادلة (1) نجد أن $3+A_2=4 \implies A_2=1$

$$\int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2}\,dx=\int\left[\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}\right]dx$$

$$=3\int\frac{1}{x+2}\,dx+\int\frac{1}{x-2}\,dx-\int(x-2)^{-2}\,dx$$

$$=3\ln|x+2|+\ln|x-2|-\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+c=3\ln|x+2|+\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+c$$

السؤال الثالث :

(أ) أحسب $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} \quad (1^{\infty})$$

ضع $y=\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$

$$\ln|y|=\ln\left|\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}\right|=3x\ln\left|1+\frac{2}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y|=\lim_{x\to\infty}3x\ln\left|1+\frac{2}{x}\right| \quad (\infty.0)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y|=\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln\left|1+\frac{2}{x}\right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y|=\lim_{x\to\infty}\frac{3\left(\frac{\frac{-2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{1+\frac{2}{x}}=\frac{6}{1+0}=6$$

وبالتالي $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^6$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\,(\ln x)^2}=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{dx}{x\,(\ln x)^2}=\lim_{t\to\infty}\int_2^{\infty}(\ln x)^{-2}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right]_2^t=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^t=\lim_{t\to\infty}\left[\left(\frac{-1}{\ln t}\right)-\left(\frac{-1}{\ln 2}\right)\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln t}\right]=\frac{1}{\ln 2}-0=\frac{1}{\ln 2}$$

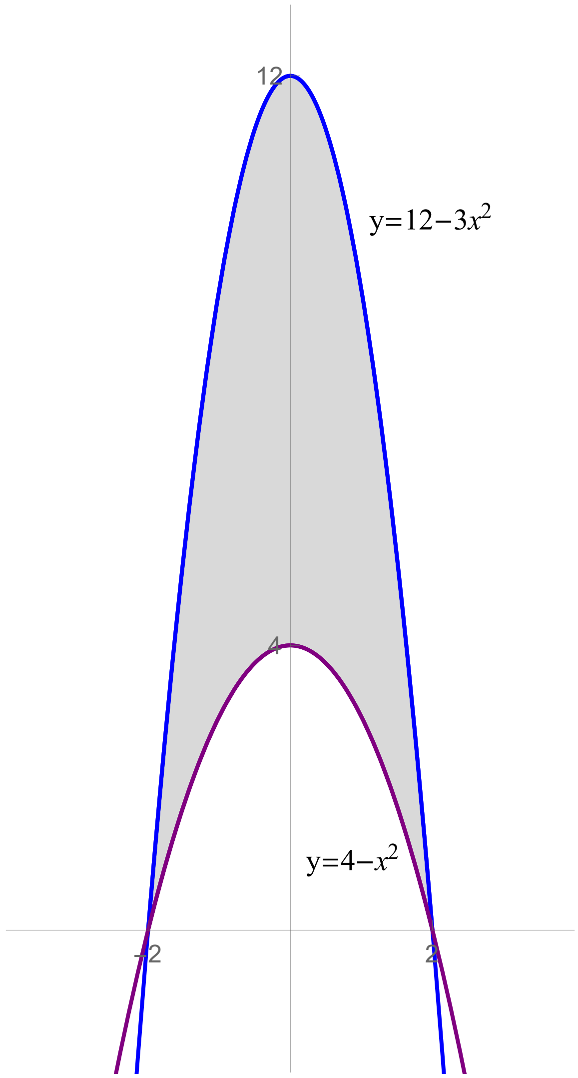
التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي $\frac{1}{\ln 2}$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=12-3x^2$ و $y=4-x^2$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y=12-3x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,12)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 12 - 3x^2$ و $y = 4 - x^2$:

$$4 - x^2 = 12 - 3x^2 \implies 3x^2 - x^2 = 12 - 4 \implies 2x^2 = 8 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} \left[(12 - 3x^2) - (4 - x^2)\right] \, dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2) \, dx = \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(8 \times 2 - \frac{2}{3}(2)^3\right) - \left(8 \times -2 - \frac{2}{3}(-2)^3\right) = 16 - \frac{16}{3} - \left(-16 + \frac{16}{3}\right)$$

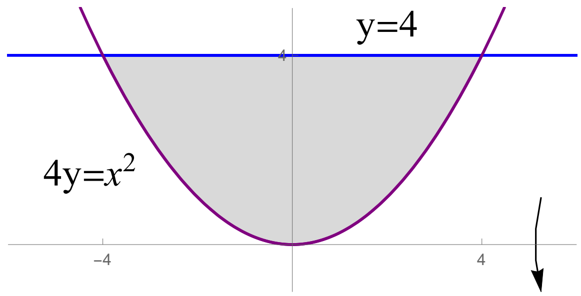
$$= 32 - \frac{32}{3} = 32\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3}$$

السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=4$ و $x^2=4y$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y=4$ يمثل خط مستقي يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0,4)$.

المنحنى $x^2=4y$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $4y=x^2$ و $y=4$:

$$\frac{x^2}{4}=4 \implies x^2=16 \implies x=\pm 4$$

لاحظ أن المنطقة متناظرة حول محور y .

باستخدام طريقة الوردات :

$$V=2\left(\pi\int_0^4\left[(4)^2-\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right]dx\right)=2\pi\int_0^4\left(16-\frac{x^4}{16}\right)dx=2\pi\left[16x-\frac{x^5}{5\times 16}\right]_0^4$$

$$=2\pi\left[\left(16\times 4-\frac{4^5}{5\times 16}\right)-0\right]=2\pi\left(4^3-\frac{4^3}{5}\right)=2\pi(4)^3\left(1-\frac{1}{5}\right)=128\pi\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{512\pi}{5}$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y=\ln(\sin x)$ من $x=\frac{\pi}{6}$ إلى $x=\frac{\pi}{3}$.

الحل :

$$f(x)=\ln(\sin x) \implies f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

$$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+(\cot x)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\cot^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\csc^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\csc x\,dx$$

$$=\left[\ln|\csc x-\cot x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left|\csc\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|-\ln\left|\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

$$=\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|-\ln\left|2-\sqrt{3}\right|=\ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|-\left|2-\sqrt{3}\right|$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\quad,\quad\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\quad,\quad\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)$ على الفترة $[1,3]$ حول محور x .

الحل :

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\implies f'(x)=\frac{1}{3}\left(3\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

$$S=2\pi\int_1^3\left[\frac{1}{3}\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\right]\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\right]^2}\,dx$$

$$S=\frac{2\pi}{3}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{1+\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2\right]}\,dx$$

$$S=\frac{2\pi}{3}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{1+\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-2+x\right)\right]}\,dx$$

$$S=\frac{2\pi}{3}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}}\,dx=\frac{2\pi}{3}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx=\frac{2\pi}{3}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\right]^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\right]\,dx=\frac{2\pi}{3}\frac{1}{2}\int_1^3\left(3\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_1^3\left(3+3x-x-x^2\right)\,dx=\frac{\pi}{3}\int_1^3\left(3+2x-x^2\right)\,dx=\frac{\pi}{3}\left[3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[(9+9-9)-(3+1-\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi}{3}\left(9-4+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\frac{16}{3}=\frac{16\pi}{9}$$

السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة الديكارتية $(x+2)^2+y^2=4$ إلى معادلة قطبية ثم تعرف على بيانها .

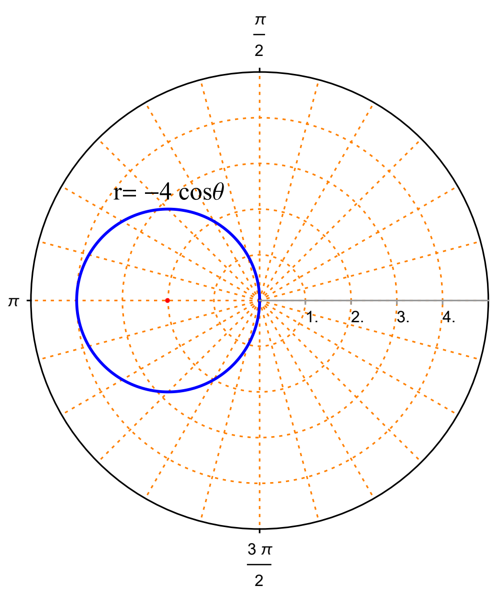
الحل :

$$(x+2)^2+y^2=4 \implies x^2+4x+4+y^2=4$$

$$\implies x^2+4x+y^2=0 \implies x^2+y^2=-4x$$

$$\implies r^2=-4r\cos\theta \implies r=-4\cos\theta$$

المعادلة القطبية $r=-4\cos\theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(r,\theta)=(2,\pi)$ ونصف قطرها 2 .

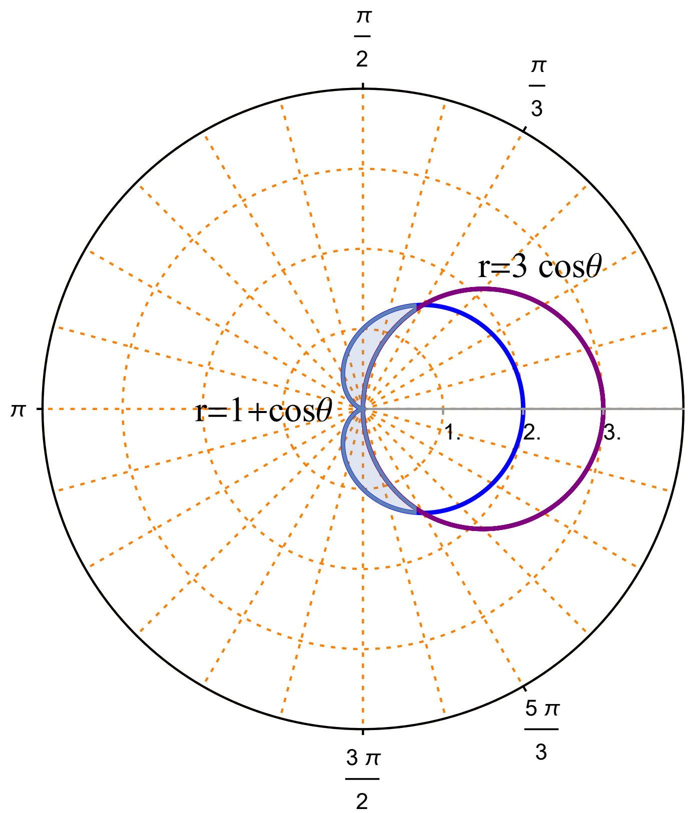


(ب) أرسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r=1+\cos\theta$ وخارج المنحنى $r=3\cos\theta$ ثم أحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $r=1+\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r=3\cos\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta)=\left(\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1 + \cos\theta$ مع المنحنى $r = 3\cos\theta$:

$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta \implies 2\cos\theta = 1 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3} \ , \ \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \ d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 \ d\theta\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) \ d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right] \ d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{2}(1+\cos 2\theta) \ d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] \ d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\theta\right) \ d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \left[\frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{3\pi}{2} + 0 + 0\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right] - \left[\left(\frac{9\pi}{4} + 0\right) - \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \pi - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1438 - 1439 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمّد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^3 (4x-5)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 4x - 5\ ,\ [a,b] = [1,3]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[4\left(1+\frac{2k}{n}\right)-5\right]\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{8k}{n}-5\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n}-1\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k}{n^2}-\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{16k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n} = \frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{16}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n}\,n = 8\,\frac{n+1}{n} - 2$$

$$\int_1^3 (4x-5)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(8\,\frac{(n+1)}{n}-2\right) = 8(1)-2 = 8-2 = 6$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ على الفترة $[1,e]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = \dfrac{1}{x}$ و $[a,b] = [1,e]$

$$(e-1)\,\frac{1}{c} = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

$$(e-1)\frac{1}{c} = 1 \implies c = e-1 \in (1,e)$$

(3) إذا كانت $F(x) = \int_{\sin x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{2+t^3}}$ فأوجد $F'(x)$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{2+t^3}} = \frac{1}{\sqrt{2+(x^2)^3}}(2x) - \frac{1}{\sqrt{2+(\sin x)^3}}(\cos x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{2+x^6}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin^3 x}}$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \cos x \;\ln x$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin x)\ln x + \cos x\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin x\;\ln x + \frac{\cos x}{x}$$

(2) $y = \sqrt[4]{\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}}$ حيث $x > 2$

الحل :

ضع $\ln|y| = \ln\left|\sqrt[4]{\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}}\right|$

عندئذ $\ln|y| = \ln\left|\left(\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}\right)^{\frac{1}{4}}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}\right|$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|(x-2)^3\right| + \ln\left|(x-1)^5\right| - \ln(x^2+5)\right]$$

$$\ln|y| = \frac{1}{4}\left[3\ln(x-2) + 5\ln(x-1) - \ln(x^2+5)\right]$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{4}\left[3\,\frac{1}{x-2} + 5\,\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+5}\right]$$

$$y' = \frac{y}{4}\left[\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-1} + \frac{2x}{x^2+5}\right]$$

$$y' = \frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}}\left[\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-1} + \frac{2x}{x^2+5}\right]$$

السؤال الثالث (12 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^3+1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\left(x^3+1\right)\,dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{8}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)\,dx = \frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \frac{\sqrt{4+\tan x}}{\cos^2 x}\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{4+\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int (4+\tan x)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int (4+\tan x)^{\frac{1}{2}}\sec^2 x\,dx = \frac{(4+\tan x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(4+\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$$

باستخدام القانون

$$n \neq -1 \text{ حيث } \int [f(x)]^n\,f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{(3)^2+\left(x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{(3)^2+\left(x^3\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{3}\right) + c = \frac{1}{9}\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$a>0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}\,dx=2\int \frac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}\,dx=2\int \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}+1}\,dx=2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+c$$

$$\int \frac{e^{7\ln x}}{x^4}\,dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{7\ln x}}{x^4}\,dx=\int \frac{e^{\ln x^7}}{x^4}\,dx=\int \frac{x^7}{x^4}\,dx=\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+c$$

$$\int 4^x 5^{4^x}\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int 4^x 5^{4^x}\,dx=\frac{1}{\ln 4}\int 5^{4^x}\,(4^x\ln 4)\,dx=\frac{1}{\ln 4}\,\frac{5^{4^x}}{\ln 5}+c$$

باستخدام القانون

$$a>0 \text{ حيث } \int a^{f(x)}f'(x)\,dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1438 - 1438 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\dfrac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sinh\left(x^2\right) + sechx$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh(x^2)\,(2x) + (-sechx\tanh x) = 2x\cosh(x^2) - sechx\tanh x$$

(2) $y = x\ln\left(\cosh^{-1}x\right)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (1)\ln\left(\cosh^{-1}x\right) + x\,\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{\cosh^{-1}x} = \ln\left(\cosh^{-1}x\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\,\cosh^{-1}x}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

(1) $\displaystyle\int \frac{e^{\sinh x}}{sechx}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{e^{\sinh x}}{sechx}\,dx = \int e^{\sinh x}\,\frac{1}{sechx}\,dx = \int e^{\sinh x}\cosh x\,dx = e^{\sinh x} + c$$

باستخدام القانون

$$\int e^{f(x)}\,f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^4}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^4}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(3)^2-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2\sqrt{(3)^2-(x^2)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\,sech^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right)\right) + c = -\frac{1}{6}\,sech^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,sech^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$.

(3) $$\int_1^e \ln x\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{x}\,dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x\ \ln x]_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx = [x\ \ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$

$$= [x\ \ln x]_1^e - [x]_1^e = [e\ \ln e - \ln 1] - [e-1] = [e-0]-[e-1] = e-e+1 = 1$$

(4) $$\int \sin^5 x\ \cos^4 x\,dx$$

الحل :

$$\int \sin^5 x\ \cos^4 x\,dx = \int \sin^4 x\ \cos^4 x\ \sin x\,dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2\ \cos^4 x\ \sin x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^4 x\ \sin x\,dx$$

باستخدام التعويض $u=\cos x$

$$du = -\sin x\,dx \implies -du = \sin x\,dx$$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^4 x\ \sin x\,dx = -\int \left(1-u^2\right)^2\ u^4\,du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right)\ u^4\,du = -\int \left(u^4-2u^6+u^8\right)\,du$$

$$= -\left[\frac{u^5}{5}-2\frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}\right]+c = -\frac{\cos^5 x}{5}+2\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^9 x}{9}+c$$

(5) $$\int \sin(10x)\ \cos(4x)\,dx$$

الحل :

$$\int \sin(10x)\ \cos(4x)\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(10x-4x)+\sin(10x+4x)\right]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(6x)\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(14x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}\int \sin(6x)\,(6)\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{14}\int \sin(14x)\,(14)\,dx$$

$$= \frac{1}{12}(-\cos(6x)) + \frac{1}{28}(-\cos(14x)) + c = -\frac{\cos(6x)}{12} - \frac{\cos(14x)}{28} + c$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

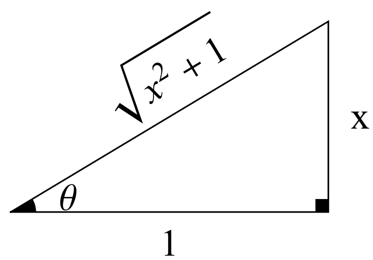
باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $x = \tan\theta$

$$dx = \sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10-2x+x^2}} \quad (7)$$

الحل : بإكمال المربع الكامل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+1)+9}}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(3)^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + a^2}}\, dx = \ \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$ حيث $a > 0$.

$$(8) \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A\,(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$1 = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-c)$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ -B+C=0 & \longrightarrow & (2) \\ A-C=1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

بجمع المعادلات الثلاث نحصل على : $2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$

من المعادلة (1) نحصل على : $\frac{1}{2} + B = 0 \implies B = -\frac{1}{2}$

من المعادلة (2) نحصل على : $-\left(-\frac{1}{2}\right) + C = 0 \implies C = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}}$$

الحل : باستخدام التعويض $x = u^4$ ، أي أن $u = x^{\frac{1}{4}}$

$$dx = 4u^3\, du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4u^3}{(u^4)^{\frac{1}{2}} + (u^4)^{\frac{1}{4}}}\, du = \int \frac{4u^3}{u^2 + u}\, du$$

$$= \int \frac{4u^3}{u(u+1)}\, du = 4\int \frac{u^2}{u+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$4\int \frac{u^2}{u+1}\, du = 4\int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right)\, du$$

$$= 4\left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1|\right) + c = 2u^2 - 4u + 4\ln|u-1| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} = 2\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} + 1\right| + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} + 1\right| + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1438 - 1439 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ على الفترة $[1,9]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $[a,b] = [1,9]$

$$(9-1)\ \sqrt[3]{c-1} = \int_1^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \int_1^9 (x-1)^{\frac{1}{3}}\ dx$$

$$8\ \sqrt[3]{c-1} = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_1^9 = \frac{3}{4}\left[(x-1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^9 = \frac{3}{4}\left[(9-1)^{\frac{4}{3}} - (1-1)^{\frac{4}{3}}\right]$$

$$8\sqrt[3]{c-1} = \frac{3}{4}\left[(8)^{\frac{4}{3}} - 0\right] = \frac{3}{4}(16) = 12 \implies \sqrt[3]{c-1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\implies c-1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \implies c = \frac{27}{8} + 1 = \frac{35}{8} \in (1,9)$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \sec^2\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \sec^2\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\tan\sqrt{x} + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec^2(f(x))\ f'(x)\,dx = \tan(f(x)) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}} \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{5}{\sqrt{(2)^2-(5x)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx=\sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$

(3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)^2+(1)^2}}=\int \frac{e^x}{e^x\sqrt{(e^x)^2+(1)^2}}\,dx=-csch^{-1}\left(e^x\right)+c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx=-\frac{1}{a}\,csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$

(4) $$\int \sinh^{-1}x\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u=\sinh^{-1}x \qquad dv=dx$$
$$du=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad v=x$$

$$\int \sinh^{-1}x\,dx=x\sinh^{-1}x-\int x\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$=x\sinh^{-1}x-\int x\,\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx=x\sinh^{-1}x-\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx$$

$$=x\sinh^{-1}x-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=x\sinh^{-1}x-\sqrt{x^2+1}+c$$

(5) $$\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx=\int \frac{x}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}}\,dx=\int \frac{x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx$$

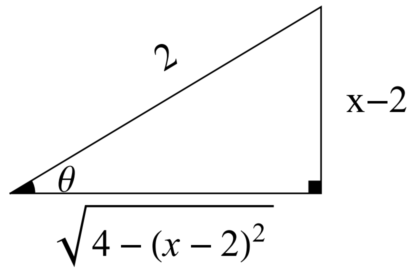
باستخدام التعويض المثلثي : $\sin\theta=\dfrac{x-2}{2} \implies x-2=2\sin\theta$

$$dx=2\cos\theta\,d\theta$$

لاحظ أن $x=2+2\sin\theta \implies x-2=2\sin\theta$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx = \int \frac{(2+2\sin\theta)\,2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{(2+2\sin\theta)\,2\cos\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{(2+2\sin\theta)\,2\cos\theta}{2\cos\theta}\,d\theta = \int (2+2\sin\theta)\,d\theta = 2\theta - 2\cos\theta + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{2}$

ايضاً : $\sin\theta = \dfrac{x-2}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\,\frac{\sqrt{4x-x^2}}{2} + c = 2\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4x-x^2} + c$$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+4x}$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{x^3+4x} = \frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$1 = A(x^2+4) + (Bx+C)x = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=0 & \longrightarrow & (2) \\ 4A=1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نجد أن : $4A = 1 \implies A = \dfrac{1}{4}$

من المعادلة (1) نجد أن : $A + B = 0 \implies B = -A = -\dfrac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{x^3+4x} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}x}{x^2+4}\right) dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln\left|x^2+4\right| + c$$

السؤال الثالث :

(أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

الحل :

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \quad (1^\infty)$$

ضع $y = x^{\frac{1}{1-x}}$

$$\ln|y| = \ln\left|x^{\frac{1}{1-x}}\right| = \frac{\ln|x|}{1-x}$$

$$\lim_{x\to 1}\ln|y| = \lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{1-x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 1}\ln|y| = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-x^2}(-2x)\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\,\left[e^{-x^2}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\,\left[e^{-t^2} - e^0\right]_0^t\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي $\frac{1}{2}$

تذكر أن $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t^2} = 0$ و $e^0 = 1$

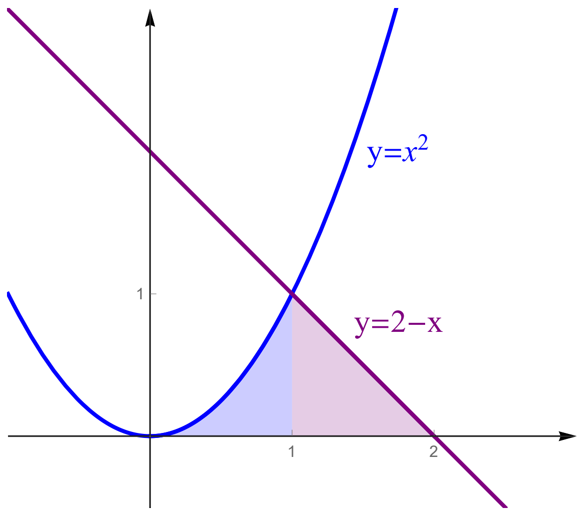
السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = x^2$ و $y = 2-x$ و $y = 0$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2 - x$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0,2)$ وميله -1

$y = 0$ يمثل محور x .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x$:

$$x^2 = 2 - x \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0 \implies x = -2\,,\; x = 1$$

المنحنى $y = x^2$ يتقاطع مع $y = 0$ عندما $x = 0$.

المستقيم $y = 2 - x$ يتقاطع مع $y = 0$ عندما $x = 2$

$$\text{A} = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3} - 0\right] + \left[(4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

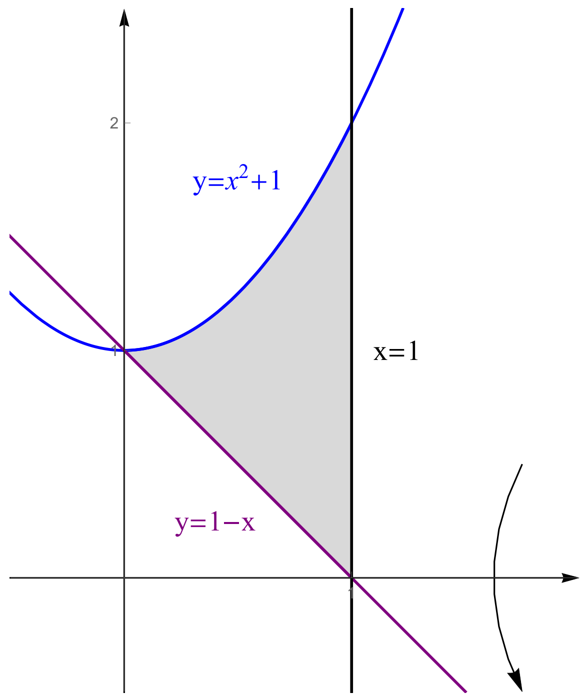
السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $y = 1 - x$ و $x = 1$ حول محور x .

الحل :

$y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

$y = 1 - x$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0,1)$ وميله يساوي -1 .

$x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1,0)$.



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $4y = x^2 + 1$ و $y = 1 - x$:

$$x^2 + 1 = 1 - x \implies x^2 + x = 0 \implies x(x+1) = 0 \implies x = -1\ ,\ x = 0$$

$y = 1 - x$ يتقاطع مع $x = 1$ في النقطة $(1, 0)$.

باستخدام طريقة الوردات :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^1 \left[\left(x^2+1\right)^2 - (1-x)^2 \right] \, dx = \pi \int_0^1 \left[x^4 + 2x^2 + 1 - (1 - 2x + x^2) \right] \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 + x^2 + 2x\right) \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \right) - (0 + 0 + 0) \right] = \pi \left(\frac{3 + 5 + 15}{15} \right) = \frac{23}{15}\pi$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ من $x = 1$ إلى $x = 2$.

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \implies f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

$$\text{L} = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}\right)}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right|\, dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)\, dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^2 = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 1\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = x^3$ على الفترة $[0, 2]$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$$

$$\text{S} = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

$$= \frac{2\pi}{36} \int_0^2 \left(1 + 9x^4\right)^{\frac{1}{2}} (36x^3)\, dx = \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}\ \left(1 + 9x^4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}\left(1 + 9(2^4)\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(1 + 9(0^4)\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{18}\frac{2}{3}\left[(145)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left[(145)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة الديكارتية $x^2 + (y-3)^2 = 9$ إلى معادلة قطبية ثم تعرف على بيانها .

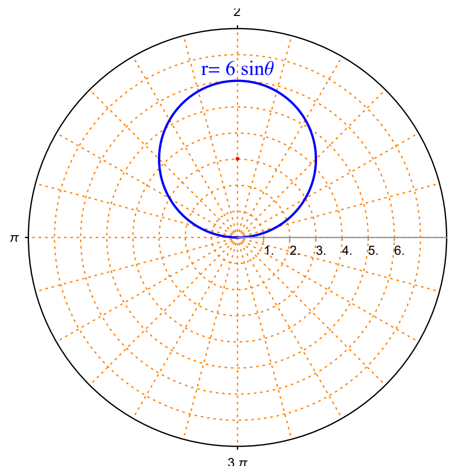
الحل :

$$x^2 + (y-3)^2 = 9 \implies x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$\implies x^2 + y^2 - 6y = 0 \implies x^2 + y^2 = 6y$$

$$\implies r^2 = 6r\sin\theta \implies r = 6\sin\theta$$

المعادلة القطبية $r = 6\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(r, \theta) = \left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 3 .

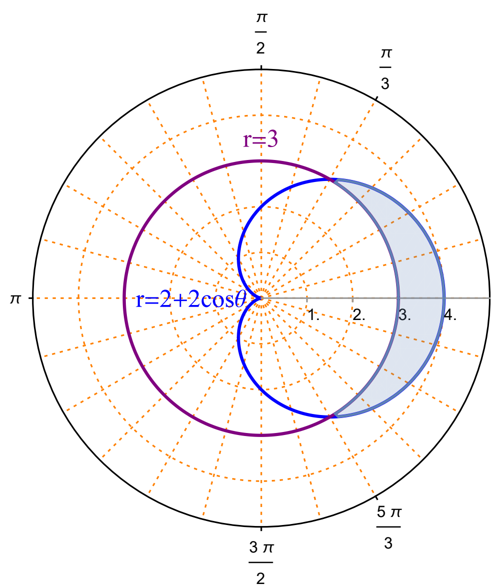


(ب) أرسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ ثم أحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب (نقطة الأصل) ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + frm{-}ecos\theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2\cos\theta = 3 \implies 2\cos\theta = 1 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3} \;,\; \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (3)^2\right]\,d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (3)^2\right]\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[4+8\cos\theta+4\cos^2\theta-9\right]\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[4\cos^2\theta+8\cos\theta-5\right]\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [2(1+\cos 2\theta)+8\cos\theta-5]\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [2+2\cos 2\theta+8\cos\theta-5]\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [2\cos 2\theta+8\cos\theta-3]\,d\theta = [\sin 2\theta+8\sin\theta-3\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - (\sin(0)+8\sin(0)-3(0))$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+8\,\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi\right) - (0+0-0) = \frac{9\sqrt{3}}{2}-\pi$$