



جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

محاضرات المقرر
111 رياض
حساب التكامل
الفصل الثاني 1443

د طارق عبدالرحمن الفاضل
أستاذ مشارك بقسم الرياضيات
e – mail : alfadhel@ksu.edu.sa
url : <http://fac.ksu.edu.sa/alfadhel>

المحتويات

5	التكامل المحدد	1
5	المجموع وخواصه	1.1
8	التكامل المحدد	2.1
13	خواص التكامل المحدد	3.1
15	التكامل غير المحدد	2
15	الدالة الأصلية	1.2
17	النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل	2.2
22	التكامل غير المحدد	3.2
25	التكامل بالتعويض	4.2
29	الدوال اللوغاريتمية والأسية	3
29	الدالة اللوغاريتمية الطبيعية	1.3
36	الدالة الأسية الطبيعية	2.3
41	الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة	3.3
46	تكامل الدوال المثلثية العكسية	4.3
53	الدوال الزائدية ومعكوساتها	4
53	الدوال الزائدية	1.4
61	الدوال الزائدية العكسية	2.4
69	طرائق التكامل	5
69	التكامل بالتجزئ	1.5
73	تكامل قوى الدوال المثلثية	2.5
83	التعويضات المثلثية	3.5
89	الكسور الجزئية	4.5
95	تعويضات متفرقة	5.5
99	صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة	6
99	صيغ عدم التعيين	1.6
106	التكاملات المعتلة	2.6

المحتويات		4
113	تطبيقات التكامل	7
113	المساحات	1.7
120	حجوم أجسام الدوران	2.7
133	طول القوس	3.7
136	مساحة سطح الدوران	4.7
139	الإحداثيات القطبية	8
139	الإحداثيات القطبية	1.8
142	العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية	2.8
145	المنحنيات القطبية	3.8
157	المساحات في الإحداثيات القطبية	4.8

باب 1

التكامل المحدد

1.1 المجموع وخواصه

نرمز لمجموع الأعداد الحقيقية a_1, a_2, \dots, a_n بالرمز $\sum_{k=1}^n a_k$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ أي أن}$$

خواص المجموع :
إذا كانت $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ لكل $1 \leq k \leq n$ وكانت $m \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n m a_k = m \sum_{k=1}^n a_k \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k \quad (3)$$

مجاميع هامة :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (3)$$

مثال : أحسب $\sum_{k=1}^n (k-1)^2$

الحل : $\sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

تمارين 1.1

1. احسب المجاميع التالية :

$$\sum_{k=1}^{20} (3k + 2) \quad (i)$$

$$\sum_{k=1}^{100} (k + 1)^2 \quad (ii)$$

$$\sum_{k=1}^{30} (k^3 + k^2 - k) \quad (iii)$$

2. احسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k - 5) \quad (i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 1) \quad (ii)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n (2k^3 + 4) \quad (iii)$$

$$a, b \in \mathbb{R}^* \text{ حيث } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (ak + b) \quad (iv)$$

$$a, b \in \mathbb{R}^* \text{ حيث } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n (ak^2 + bk) \quad (v)$$

3. أوجد قيمة a التي تحقق المعادلات التالية :

$$\sum_{k=1}^{10} (ak - 10) = 120 \quad (i)$$

$$\sum_{k=1}^5 (ak^2 + 2) = 120 \quad (ii)$$

$$\sum_{k=5}^{15} (ak + 5) = 275 \quad (iii)$$

2.1 التكامل المحدد

التجزئ المنتظم للفترة :

لتجزئ الفترة المغلقة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية بحيث يكون طول كل فترة جزئية مساوياً $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$ نضع $x_0 = a$ و $x_1 = a + \Delta_x$ و $x_k = a + k\Delta_x$ وأخيراً $x_n = a + n\Delta_x = b$ نسمي المجموعة $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n = b\}$ بالتجزئ المنتظم للفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية

مثال : جزئ الفترة $[1, 3]$ إلى 5 فترات جزئية منتظمة

$$\text{الحل : } \Delta_x = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$x_0 = 1, x_1 = 1 + 0.4 = 1.4, x_2 = 1 + 2(0.4) = 1.8$$

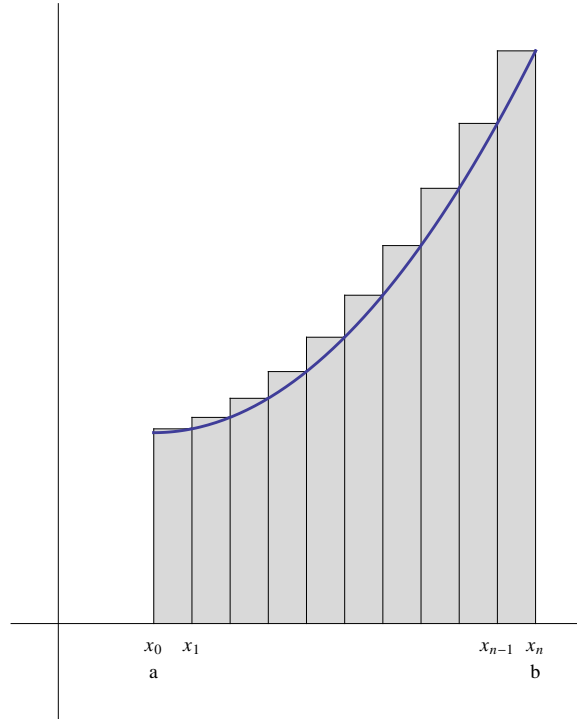
$$x_3 = 1 + 3(0.4) = 2.2, x_4 = 1 + 4(0.4) = 2.6, x_5 = 1 + 5(0.4) = 3$$

مجموع ريمان :

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكان $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ تجزئاً منتظماً للفترة $[a, b]$ ، نعرف

$$R_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x \text{ كالتالي :}$$

$$\text{حيث } \Delta_x = \frac{b-a}{n} \text{ و } x_k = a + k\Delta_x = a + k \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

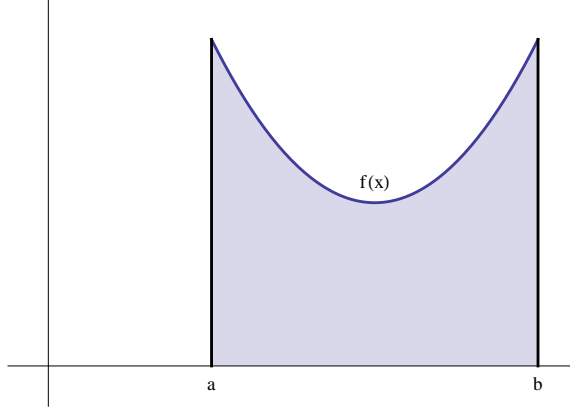


التكامل المحدد :

نرمز للتكامل المحدد للدالة المتصلة f على الفترة $[a, b]$ بالرمز $\int_a^b f(x) dx$ ويعرف كالتالي :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

أي أن $\int_a^b f(x) dx$ يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور x والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$



مثال (1): استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_1^2 (6x - 5) dx$

الحل: $f(x) = 6x - 5$ و $[a, b] = [1, 2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[1, 2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة:

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = 1, \dots, x_k = 1 + k\Delta x = 1 + \frac{k}{n}, \dots, x_n = 2$$

ثانياً - مجموع ريمان:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[6\left(1 + \frac{k}{n}\right) - 5\right] \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{n} + \frac{6k}{n^2} - \frac{5}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{6k}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{6k}{n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \\ &= \frac{6}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{6}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} (n) = 3 \frac{n(n+1)}{n^2} + 1 \end{aligned}$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_1^2 (6x - 5) dx$

$$\int_1^2 (6x - 5) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \frac{n(n+1)}{n^2} + 1\right) = 3(1) + 1 = 4$$

مثال (2): استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2 dx$

الحل: $f(x) = x^2$ و $[a, b] = [0, 2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0, 2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة:

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0, \dots, x_k = 0 + k\Delta_x = \frac{2k}{n}, \dots, x_n = 2$$

ثانياً - مجموع ريمان :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k^2}{n^2}\right) \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{8k^2}{n^3} \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{4}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \end{aligned}$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2 dx$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \right) = \frac{4}{3}(2) = \frac{8}{3}$$

تمارين 2.1

استخدم مجموع ريمان لحساب التكاملات التالية :

$$\int_0^2 (3x - 2) dx \quad .1$$

$$\int_1^3 (5x - 6) dx \quad .2$$

$$\int_{-1}^4 (2x + 1) dx \quad .3$$

$$\int_0^4 (x^2 + 1) dx \quad .4$$

$$\int_2^4 (x^2 - x) dx \quad .5$$

$$\int_0^3 (x^3 - 1) dx \quad .6$$

$$\int_1^4 (x^3 + x) dx \quad .7$$

3.1 خواص التكامل المحدد

إذا كانت f و g دالتان متصلتان على الفترة $[a, b]$ وكانت $k \in \mathbb{R}$ فإن

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

(3) إذا كانت $a < c < b$ فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(4) إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

(5) إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in [a, b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

تمارين 3.1

1. إذا كان $\int_0^7 f(x) dx = 10$ و $\int_4^7 2f(x) dx = 6$ ، احسب $\int_0^4 f(x) dx$

2. إذا كان $\int_a^b f(x) dx = 3$ و $\int_a^b g(x) dx = 2$ ، احسب $\int_a^b [5f(x) - 3g(x)] dx$

3. أثبت أن :

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1} dx \leq 2 \quad (i)$$

$$\int_0^4 \frac{x}{x^3+2} dx \leq \int_0^4 x dx \quad (ii)$$

$$\frac{1}{4} \leq \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx \leq 1 \quad (iii)$$

4. أثبت أن $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

5. استخدم السؤال رقم (4) لأثبت مايلي :

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos x^2 dx \right| \leq 2\pi \quad (i)$$

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| \leq (b-a) \quad (ii)$$

باب 2

التكامل غير المحدد

1.2 الدالة الأصلية

تعريف الدالة الأصلية :
تقول أن الدالة $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ إذا كانت
 $G'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

مثال : أوجد الدالة الأصلية لكل دالة فيما يلي :

$$f(x) = 2x \quad (1)$$

$$f(x) = \cos x \quad (2)$$

$$f(x) = \sec^2 x \quad (3)$$

$$f(x) = \sec x \tan x \quad (4)$$

الحل :

$$G(x) = x^2 + c \quad (1)$$

$$G(x) = \sin x + c \quad (2)$$

$$G(x) = \tan x + c \quad (3)$$

$$G(x) = \sec x + c \quad (4)$$

حيث c عدد حقيقي ثابت

ملاحظة : إذا كانت $G_1(x)$ و $G_2(x)$ دالتان أصليتان للدالة $f(x)$ فإن $G_1(x) - G_2(x) = c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

تمارين 1.2

1. أوجد الدالة الأصلية في ما يلي :

$$f(x) = 3x^2 \quad (i)$$

$$f(x) = 7x^6 \quad (ii)$$

$$f(x) = 2 \cos 2x \quad (iii)$$

$$f(x) = 5 \sec^2 5x \quad (iv)$$

$$f(x) = 3 \sin 3x \quad (v)$$

$$f(x) = 4 \sec 4x \tan 4x \quad (vi)$$

$$f(x) = -6 \csc 6x \cot 6x \quad (vii)$$

$$f(x) = 2 \csc^2 2x \quad (viii)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (ix)$$

2. بين أن $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = x^n$ حيث $n \neq -1$

3. بين أن $G(x) = \frac{\sin(ax)}{a} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \cos(ax)$ حيث $a \neq 0$

2.2 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل
إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

البرهان :

بما أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة والمحدودة $[a, b]$ فإنها تحقق قيمتها الصغرى وقيمتها العظمى على هذه الفترة، أي يوجد $x_1, x_2 \in [a, b]$ بحيث $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ لكل $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b f(x_1) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x_2) dx$$

$$(b - a) f(x_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) f(x_2)$$

$$f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq f(x_2)$$

من نظرية القيمة البينية للدوال المتصلة، يوجد c يقع بين x_1 و x_2 (وبالتالي $c \in (a, b)$) بحيث

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \implies (b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

مثال : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 2]$
الحل :

$$\text{أولاً - حساب التكامل المحدد } \int_0^2 x^2 dx$$

تم حساب هذا التكامل كمثال على مجموع ريمان ومقداره يساوي $\frac{8}{3}$

ثانياً - إيجاد قيمة العدد c من العلاقة $(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$

$$(2 - 0) f(c) = \int_0^2 x^2 dx \implies 2c^2 = \frac{8}{3}$$

$$\implies c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \implies c = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 2)$ بينما $c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0, 2)$

أي أن قيمة العدد c المطلوبة هي $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :
لتكن $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة

(1) إذا عرفنا الدالة $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ كالتالي : $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ لكل $x \in [a, b]$ فإن $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$

أي أن $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{إذا كانت } F \text{ دالة أصلية للدالة } f \text{ فإن}$$

البرهان

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x) \quad \text{نريد إثبات أن}$$

لاحظ أن $G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$ لكل $h > 0$ ولكل $x \in [a, b]$ ، بتطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة f على الفترة $[x, x+h]$ ، يوجد $c_h \in (x, x+h)$ بحيث يحقق

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = h f(c_h) \implies \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = f(c_h)$$

بما أن $x < c_h < x+h$ فإنه عندما $h \rightarrow 0$ فإن $c_h \rightarrow x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \lim_{c_h \rightarrow x} f(c_h) = f(x) \quad \text{وبالتالي}$$

لاحظ أن $\lim_{c_h \rightarrow x} f(c_h) = f(x)$ لأن الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ و $c_h \rightarrow x$

أي أن $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = G'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

(2) لتكن F دالة أصلية للدالة f على الفترة $[a, b]$ ، عندئذ $G(x) - F(x) = c$ لكل $x \in [a, b]$ حيث c عدد ثابت

عندما $x = a$ فإن $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ ، وبالتالي $G(a) - F(a) = c \implies c = -F(a)$

أي أن $G(x) - F(x) = -F(a)$ لكل $x \in [a, b]$

عندما $x = b$ فإن $G(b) = \int_a^b f(t) dt$ ، وبالتالي $G(b) - F(b) = -F(a)$ ، وبالتالي $\int_a^b f(x) dx = G(b) - F(b) + F(a) = [F(x)]_a^b$

مثال (1) : أحسب ما يلي :

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt$$

الحل :

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt = \sin x$$

2.2. النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

مثال (2): أحسب ما يلي :

$$\int_1^2 2x \, dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int_1^2 2x \, dx = [x^2]_1^2 = (2)^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3 \quad (1)$$

لاحظ أن x^2 هي دالة أصلية للدالة $2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1 \quad (2)$$

لاحظ أن $\sin x$ هي دالة أصلية للدالة $\cos x$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g دالة قابلة للاشتقاق ومداهما محتوى في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) \, dt = f(g(x)) g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2} \, dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^{3x^2} \sin t \, dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^{3x^2} \sin t \, dt = \sin(3x^2) (6x) \quad (2)$$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g و h دالتان قابلتان للاشتقاق ومداهما محتوى في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) \, dt = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4} dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4} dt = \frac{1-(2x^2)^2}{1+(2x^2)^4} (4x) - \frac{1-(\cos x)^2}{1+(\cos x)^4} (-\sin x) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \sqrt{1+(x^2)^4} (2x) - \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (2)$$

2.2 تمارين

1. أوجد $F'(x)$ في ما يلي :

$$F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{2 + \sin t} dt \quad (i)$$

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad (ii)$$

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2} dt \quad (iii)$$

$$F(x) = \int_{-3}^{\sin x} \frac{t}{1+t^4} dt \quad (iv)$$

$$F(x) = \int_{-1}^{x^2} \sqrt{3 + \cos t} dt + \int_{x^2}^3 \sqrt{3 + \cos t} dt \quad (v)$$

$$F(x) = \int_{\sin x}^{x^3} \frac{t}{2+t^2} dt \quad (vi)$$

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+1} \frac{t^2}{1+t^2} dt \quad (vii)$$

2. إذا كانت $F(x) = \int_{3x}^{3x^2+1} \frac{t}{4+t^2} dt$ ، احسب $F'(0)$.

3. إذا كانت $F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ ، احسب $F'(\frac{\pi}{2})$.

3.2 التكامل غير المحدد

تعريف : نرمز للتكامل غير المحدد للدالة f بالرمز $\int f(x) dx$ ويعرف كالتالي $\int f(x) dx = G(x) + c$ حيث $G(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ و c عدد حقيقي ثابت

بعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$\int 1 dx = x + c \quad (1)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (2) \quad \text{حيث } n \neq -1$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (3)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c \quad (6)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad (7)$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c \quad (8)$$

خواص التكامل غير المحدد :

$$\int m f(x) dx = m \int f(x) dx \quad (1) \quad \text{حيث } m \in \mathbb{R}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (2)$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int (7x^2 + 5\sqrt{x}) dx \quad (1)$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \quad (2)$$

$$\int (-4 \cos x + 8 \sec^2 x) dx \quad (3)$$

$$\int (3 + 4 \sec x \tan x) dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int (7x^2 + 5\sqrt{x}) dx = \int 7x^2 dx + \int 5\sqrt{x} dx \quad (1)$$

$$= 7 \int x^2 dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 7 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \frac{5}{x^4} dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx = 5 \int \frac{1}{x^4} dx - 2 \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \quad (2)$$

$$= 5 \int x^{-4} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx = 5 \frac{x^{-3}}{-3} - 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int (-4 \cos x + 8 \sec^2 x) dx = \int -4 \cos x dx + \int 8 \sec^2 x dx \quad (3)$$

$$= -4 \int \cos x dx + 8 \int \sec^2 x dx = -4 \sin x + 8 \tan x + c$$

$$\int (3 + 4 \sec x \tan x) dx = \int 3 dx + \int 4 \sec x \tan x dx \quad (4)$$

$$= 3 \int 1 dx + 4 \int \sec x \tan x dx = 3x + 4 \sec x + c$$

تمارين 3.2

احسب التكاملات التالية :

$$\int \left(\frac{-2}{x^2} - \frac{5}{x^{-4}} \right) dx \quad .1$$

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) dx \quad .2$$

$$\int (7 \cos x + 2 \sin x) dx \quad .3$$

$$\int \left(4 \sec^2 x - \frac{8 \sec x \tan x}{3} \right) dx \quad .4$$

$$\int \left(\frac{\csc^2 x}{5} + 3 \csc x \cot x \right) dx \quad .5$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad .6$$

$$\int \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt[4]{x}} dx \quad .7$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^{\frac{3}{2}}} dx \quad .8$$

4.2 التكامل بالتعويض

نظرية : إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ وكانت f دالة متصلة على فترة J تحتوي مدى g وكانت F دالة أصلية للدالة f على J فإن :

$$x \in [a, b] \text{ لكل } \int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

مثال : حل التكامل التالي $\int (x^2 + 1)^{11} x dx$

الحل الأول : ضع $u = x^2 + 1$

$$\text{عندئذ } du = 2x dx \implies \frac{1}{2} du = x dx$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)^{11} x dx &= \int u^{11} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{11} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{12}}{12} + c = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{12}}{12} + c \end{aligned}$$

الحل الثاني : باستخدام $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

$$\int (x^2 + 1)^{11} x dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{11} (2x) dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{12}}{12} + c$$

تعميم لبعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$n \neq -1 \text{ حيث } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (1)$$

$$n \neq -1 \text{ حيث } \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (2)$$

$$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x)) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (3)$$

$$\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2(f(x)) f'(x) dx = \tan(f(x)) + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2(f(x)) f'(x) dx = -\cot(f(x)) + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad (6)$$

$$\int \sec(f(x)) \tan(f(x)) f'(x) dx = \sec(f(x)) + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c \quad (7)$$

$$\int \csc(f(x)) \cot(f(x)) f'(x) dx = -\csc(f(x)) + c$$

مثال : حل التكاملات التالية

$$\int \sqrt{x^2 + 2x}(x + 1) dx \quad (1)$$

$$\text{الحل : } \int \sqrt{x^2 + 2x}(x + 1) dx = \int (x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}}(x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}} [2(x + 1)] dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}} (2x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{x^3 + x}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3}} dx \quad (2)$$

$$\text{الحل : } \int \frac{x^3 + x}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3}} dx = \int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$= \int (x^4 + 2x^2 + 3)^{-\frac{1}{3}} (x^3 + x) dx = \frac{1}{4} \int (x^4 + 2x^2 + 3)^{-\frac{1}{3}} (4x^3 + 4x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(x^4 + 2x^2 + 3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \cos(5x + 7) dx \quad (3)$$

$$\text{الحل : } \int \cos(5x + 7) dx = \frac{1}{5} \int \cos(5x + 7) 5 dx$$

$$= \frac{1}{5} \sin(5x + 7) + c$$

$$\int x \sec^2(x^2 + 2) dx \quad (4)$$

$$\int x \sec^2(x^2 + 2) dx = \frac{1}{2} \int \sec^2(x^2 + 2) (2x) dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{2} \tan(x^2 + 2) + c$$

$$\int \sec(6x - 2) \tan(6x - 2) dx \quad (5)$$

$$\int \sec(6x - 2) \tan(6x - 2) dx = \frac{1}{6} \int \sec(6x - 2) \tan(6x - 2) (6) dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{6} \sec(6x - 2) + c$$

مثال : أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 1 + x^2$ على الفترة $[-1, 2]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ باستخدام العلاقة}$$

$$[a, b] = [-1, 2] \text{ و } f(x) = 1 + x^2 \text{ حيث}$$

$$(2 - (-1))(1 + c^2) = \int_{-1}^2 (1 + x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$3(1 + c^2) = \left(2 + \frac{8}{3} \right) - \left(-1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$3 + 3c^2 = 2 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 6$$

$$3c^2 = 3 \implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1$$

لاحظ أن $c = 1 \in (-1, 2)$ وبالتالي يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[-1, 2]$ بينما $c = -1 \notin (-1, 2)$

مثال : أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1, 8]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ باستخدام العلاقة}$$

$$[a, b] = [-1, 8] \text{ و } f(x) = \sqrt{x+1} \text{ حيث}$$

$$(8 - (-1))\sqrt{c+1} = \int_{-1}^8 \sqrt{x+1} dx = \int_{-1}^8 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$9\sqrt{c+1} = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^8 = \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^8$$

$$9\sqrt{c+1} = \frac{2}{3} \left[(8+1)^{\frac{3}{2}} - (-1+1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} [27 - 0] = 18$$

$$9\sqrt{c+1} = 18 \implies \sqrt{c+1} = 2 \implies c+1 = 4 \implies c = 3 \in (-1, 8)$$

تمارين 4.2

(1) احسب التكاملات التالية :

$$\int 3x(x^2 + 1)^5 dx \quad .1$$

$$\int (x^3 + 3x)^{11}(x^2 + 1) dx \quad .2$$

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx \quad .3$$

$$\int \frac{3x}{(1 + x^2)^{\frac{2}{3}}} dx \quad .4$$

$$\int \frac{3x^5}{\sqrt[3]{x^6 + 1}} dx \quad .5$$

$$\int \cos(5x - 2) dx \quad .6$$

$$\int x \sin(x^2 + 1) dx \quad .7$$

$$\int x^2 \sec^2(x^3 - 2) dx \quad .8$$

$$\int \frac{\csc^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad .9$$

$$\int \frac{\sec\left(\frac{1}{x}\right) \tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx \quad .10$$

$$\int \csc(3x + 1) \cot(3x + 1) dx \quad .11$$

$$\int (x^2 + 2 \tan x)^5 (x + \sec^2 x) dx \quad .12$$

$$\int \frac{(2 + \sin x)^4}{\sec x} dx \quad .13$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترات المعطاة :

$$. [0, 2] \text{ على الفترة } f(x) = 2x - 1 \quad (i)$$

$$. [-1, 7] \text{ على الفترة } f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \quad (ii)$$

$$. [-2, 0] \text{ على الفترة } f(x) = x^2 \quad (iii)$$

$$. [0, 3] \text{ على الفترة } f(x) = 4x - x^2 \quad (iv)$$

$$. [0, 2\pi] \text{ على الفترة } f(x) = \cos x \quad (v)$$

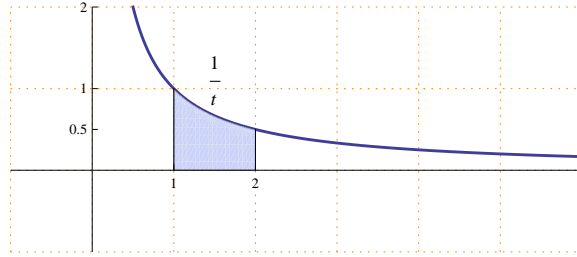
باب 3

الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.3 الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تعريف : نرسم للدالة اللوغاريتمية الطبيعية بالرمز $\ln(x)$ وتعرف كالتالي :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{لكل } x \in (0, \infty)$$



ملاحظات هامة :

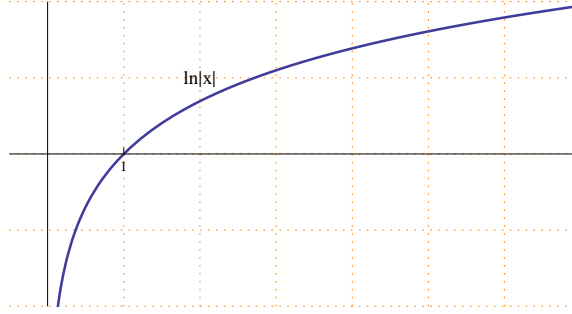
(1) مجال الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو $(0, \infty)$

$$\ln(1) = 0 \quad (2)$$

(3) $\ln(x) > 0$ لكل $x > 1$

(4) $\ln(x) < 0$ لكل $0 < x < 1$

رسم الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :



ملاحظات هامة :

$$x \in (0, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x} > 0 \quad (1)$$

أي أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية دالة تزايدية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad (3)$$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :
إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (2)$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad (3)$$

البرهان :

$$\ln(xy) - \ln x = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt \quad (1)$$

$$u = \frac{t}{x} \implies t = xu \text{ ضع}$$

$$dt = x du$$

$$t = x \implies u = 1 \text{ عندما}$$

$$t = xy \implies u = y \text{ عندما}$$

$$\ln(xy) - \ln x = \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{1}{xu} x du = \int_1^y \frac{1}{u} du = \ln y$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$\ln(x) = \ln\left(y \frac{x}{y}\right) = \ln(y) + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال : أحسب مشتقات الدوال التالية

$$y = \sqrt{x} \ln|x| \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln|x| + \sqrt{x} \frac{1}{x} : \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln|x^2 + 3x - 1| \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 1} : \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln|\sin x + 5| \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 5} : \text{الحل}$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)^5(x - 8)^3}{(x^3 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

$$\ln|f(x)| = \ln \left| \frac{(x^2 + 1)^5(x - 8)^3}{(x^3 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right| : \text{الحل}$$

$$= \ln|(x^2 + 1)^5(x - 8)^3| - \ln|(x^3 - 1)^{\frac{3}{2}}|$$

$$= \ln|(x^2 + 1)^5| + \ln|(x - 8)^3| - \ln|(x^3 - 1)^{\frac{3}{2}}|$$

$$= 5 \ln|x^2 + 1| + 3 \ln|x - 8| - \frac{3}{2} \ln|x^3 - 1|$$

باشتقاق الطرفين :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 5 \frac{2x}{x^2 + 1} + 3 \frac{1}{x - 8} - \frac{3}{2} \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$

$$f'(x) = f(x) \left[\frac{10x}{x^2 + 1} + \frac{3}{x - 8} - \frac{3}{2} \frac{3x^2}{x^3 - 1} \right]$$

$$f'(x) = \left(\frac{(x^2 + 1)^5(x - 8)^3}{(x^3 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \left[\frac{10x}{x^2 + 1} + \frac{3}{x - 8} - \frac{3}{2} \frac{3x^2}{x^3 - 1} \right]$$

$$f(x) = (\sin x)^x \quad (5)$$

$$\ln|f(x)| = \ln|(\sin x)^x| = x \ln|\sin x| : \text{الحل}$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1) \ln |\sin x| + x \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = f(x) \left[\ln |\sin x| + x \frac{\cos x}{\sin x} \right]$$

$$f'(x) = (\sin x)^x \left[\ln |\sin x| + x \frac{\cos x}{\sin x} \right]$$

تكامل الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 8} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 8} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x + 8} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x + 8| + c$$

$$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2 \sin x| + c$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln |x| + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx &= \int \frac{1}{x (\ln x)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \int (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\ &= \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c \\ &= \int \frac{x}{x+1} dx \quad (6) \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln |x+1| + c \end{aligned}$$

تكاملات مهمة :

$$\int \tan x dx = \ln |\sec x| + c \quad (1)$$

$$\int \tan (f(x)) f'(x) dx = \ln |\sec (f(x))| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c \quad (2)$$

$$\int \cot (f(x)) f'(x) dx = \ln |\sin (f(x))| + c$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c \quad (3)$$

$$\int \sec (f(x)) f'(x) dx = \ln |\sec (f(x)) + \tan (f(x))| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c \quad (4)$$

$$\int \csc (f(x)) f'(x) dx = \ln |\csc (f(x)) - \cot (f(x))| + c$$

مثال : أحسب ما يلي

$$\int \tan(3x) dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \tan(3x) dx = \frac{1}{3} \int \tan(3x) (3) dx = \frac{1}{3} \ln |\sec(3x)| + c$$

$$\int x \sec(x^2 - 3) dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int x \sec(x^2 - 3) dx &= \frac{1}{2} \int \sec(x^2 - 3) (2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sec(x^2 - 3) + \tan(x^2 - 3)| + c \end{aligned}$$

1.3 تمارين

1. احسب مشتقات الدوال التالية :

(1) $f(x) = \ln |x^4 + x^3 + 1|$

(2) $f(x) = \ln |x^2 + \cos 2x|$

(3) $f(x) = \sin x \ln |5x|$

(4) $f(x) = \tan (\ln |3x|)$

(5) $f(x) = [3x + \ln |\sin x|]^8$

(6) $f(x) = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} \sin^5 x}{(x^3 + 4)^2} \right|$

(7) $f(x) = \frac{(3x + 1)^{\frac{3}{2}} (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2 + 2}}$

(8) $f(x) = (x^2 + 1)^x$

(9) $f(x) = x^{\sin x}$

(10) $f(x) = (\cos x)^{x^3 - 1}$

2. احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 4x} dx$

(2) $\int \frac{x^2 - \sin x}{x^3 + 3 \cos x} dx$

(3) $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x} dx$

(4) $\int \frac{\cos (\ln |x|)}{x} dx$

(5) $\int \frac{(8 + \ln |x|)^5}{2x} dx$

(6) $\int \frac{1}{x \sqrt[3]{\ln |x|}} dx$

(7) $\int \frac{1}{2x \ln |x^3|} dx$

(8) $\int \frac{x}{x + 2} dx$

(9) $\int x^2 \tan (x^3) dx$

(10) $\int \frac{\sec (\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

2.3 الدالة الأسية الطبيعية

تعريف : الدالة الأسية الطبيعية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية الطبيعية ، نرسم للدالة الأسية الطبيعية بالرمز e^x حيث e عدد حقيقي غير نسبي

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية الطبيعية هو \mathbb{R}

(2) مدى الدالة الأسية الطبيعية هو الفترة $(0, \infty)$

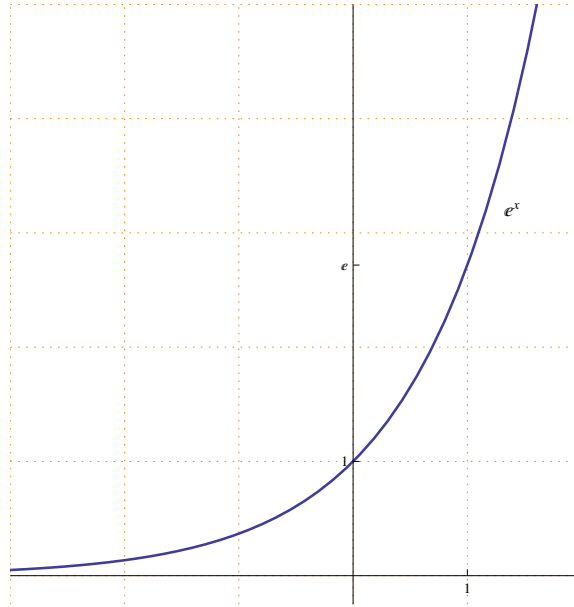
أي أن الدالة الأسية الطبيعية موجبة دائماً

$$e^0 = 1 \text{ و } e \approx 2.718128 \quad (3)$$

$$\ln(e^x) = x \text{ لكل } x \in \mathbb{R} \text{ وبالتالي } \ln(e) = 1 \quad (4)$$

$$e^{\ln(x)} = x \text{ لكل } x \in (0, \infty)$$

(5) رسم الدالة الأسية الطبيعية :



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad (6)$$

بعض خواص الدالة الأسية الطبيعية :

إذا كانت $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

2.3 . الدالة الأسية الطبيعية

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (3)$$

مثال (1): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $e^{x-1} = 3$
 الحل: $e^{x-1} = 3 \implies \ln(e^{x-1}) = \ln(3)$
 $\implies x - 1 = \ln(3) \implies x = 1 + \ln(3)$

مثال (2): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\ln(x+2) = 5$
 الحل: $\ln(x+2) = 5 \implies e^{\ln(x+2)} = e^5$
 $\implies x + 2 = e^5 \implies x = e^5 - 2$

إشتقاق الدالة الأسية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي :

$$f(x) = e^{x^2+x} \quad (1)$$

$$f'(x) = e^{x^2+x} (2x + 1) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = e^{\sin x} + \frac{1}{e^x} \quad (2)$$

$$f(x) = e^{\sin x} + e^{-x} \quad \text{الحل}$$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x + e^{-x}(-1)$$

$$f(x) = (e^{5x} + x^2)^3 \quad (3)$$

$$f'(x) = 3 (e^{5x} + x^2)^2 (e^{5x}(5) + 2x) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln |e^{\tan x} + 4x^3| \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{e^{\tan x} \sec^2 x + 12x^2}{e^{\tan x} + 4x^3} \quad \text{الحل}$$

تكامل الدالة الأسية الطبيعية :

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int e^{7x+1} dx \quad (1)$$

$$\text{الحل : } \int e^{7x+1} dx = \frac{1}{7} \int e^{7x+1} (7) dx = \frac{1}{7} e^{7x+1} + c$$

$$\int x e^{x^2-3} dx \quad (2)$$

$$\text{الحل : } \int x e^{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2-3} (2x) dx = \frac{1}{2} e^{x^2-3} + c$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad (3)$$

$$\text{الحل : } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2 \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 e^{\sqrt{x}} + c$$

$$\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x} dx \quad (4)$$

$$\text{الحل : } \int \frac{e^{\sin x}}{\sec x} dx = \int e^{\sin x} \frac{1}{\sec x} dx$$

$$= \int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + c$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (5)$$

$$\text{الحل : } \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int e^{\tan x} \sec^2 x dx = e^{\tan x} + c$$

$$\int_0^{\ln(5)} e^x dx \quad (6)$$

$$\text{الحل : } \int_0^{\ln(5)} e^x dx = [e^x]_0^{\ln(5)} = e^{\ln(5)} - e^0 = 5 - 1 = 4$$

$$\int e^x \cos(e^x) dx \quad (7)$$

$$\int e^x \cos(e^x) dx = \int \cos(e^x) e^x dx = \sin(e^x) + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{e^{5x}}{e^{5x} + 4} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{e^{5x}}{e^{5x} + 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{e^{5x} (5)}{e^{5x} + 4} dx = \frac{1}{5} \ln |e^{5x} + 4| + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{e^{5x}}{(e^{5x} + 4)^3} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{5x}}{(e^{5x} + 4)^3} dx = \int (e^{5x} + 4)^{-3} e^{5x} dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{5} \int (e^{5x} + 4)^{-3} e^{5x} (5) dx = \frac{1}{5} \frac{(e^{5x} + 4)^{-2}}{-2} + c$$

$$\int \frac{e^{5 \ln x}}{x^3} dx \quad (10)$$

: الحل

$$\int \frac{e^{5 \ln x}}{x^3} dx = \int \frac{e^{\ln x^5}}{x^3} dx = \int \frac{x^5}{x^3} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

تمارين 2.3

1. أوجد قيمة x التي تحقق ما يلي :

$$(1) e^{2x-1} = 5 \quad (2) e^{x^2-4} = 1$$

$$(3) \ln|x-1| = 7 \quad (4) \ln|x^3-1| = 0$$

2. احسب مشتقات الدوال التالية :

$$(1) f(x) = e^{x^3-x+2} \quad (2) f(x) = \frac{1}{e^{2x}} + e^{\cos 2x}$$

$$(3) f(x) = (\ln|3x| + e^{4x+2})^8 \quad (4) f(x) = \ln|e^{2\tan x} + \sec 3x|$$

$$(5) f(x) = e^{x^2} \ln|x^3-1| \quad (6) f(x) = \tan(e^{x^2+1})$$

3. احسب التكاملات التالية :

$$(1) \int 5e^{8x+1} dx \quad (2) \int 7x^2 e^{x^3-4} dx$$

$$(3) \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad (4) \int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

$$(5) \int \frac{e^{\cos 3x}}{\csc 3x} dx \quad (6) \int \frac{e^{\cot 2x}}{\sin^2 2x} dx$$

$$(7) \int_{\ln 2}^{\ln 5} 3e^x dx \quad (8) \int e^{7x} \csc^2(2 + e^{7x}) dx$$

$$(9) \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 2} dx \quad (10) \int \frac{e^{3x}}{(e^{3x} + 2)^5} dx$$

$$(11) \int e^x (4 - \cos(e^x)) dx \quad (12) \int e^{7 \ln|x+1|} dx$$

$$(13) \int \frac{e^{2 \ln|x|}}{x^3} dx \quad (14) \int e^{3x^2 + \ln|x|} dx$$

3.3 الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة

الدالة الأسية العامة :
إذا كان $a > 0$ عدداً حقيقياً ، نرسم للدالة الأسية العامة للأساس a بالرمز a^x وتعرف كالتالي $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظات عامة :

$$(1) \text{ مجال الدالة الأسية العامة هو } \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ مدى الدالة الأسية العامة هو الفترة } (0, \infty)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \text{ حيث } a > 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \text{ حيث } a > 1$$

بعض خواص الدالة الأسية العامة :
إذا كانت $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

$$(1) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(3) (a^x)^y = a^{xy}$$

إشتقاق الدالة الأسية العامة :

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x) \ln a$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$(1) f(x) = 3^{x^2+x}$$

$$\text{الحل : } f'(x) = 3^{x^2+x} (2x + 1) \ln(3)$$

$$(2) f(x) = 5^{\sqrt{x}}$$

$$\text{الحل : } f'(x) = 5^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \ln(5)$$

$$(3) f(x) = \pi^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{الحل : } f'(x) = \pi^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right) \ln(\pi)$$

$$f(x) = 3^{\tan(x^2+1)} \quad (4)$$

$$f'(x) = 3^{\tan(x^2+1)} \sec^2(x^2+1) (2x) \ln 3 : \text{الحل}$$

$$f(x) = (4^{x^2} + 7^{3x+1})^6 \quad (5)$$

$$f'(x) = 6 (4^{x^2} + 7^{3x+1})^5 (4^{x^2} (2x) \ln(4) + 7^{3x+1} (3) \ln(7)) : \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln |5^{x^2} + x^3| \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{5^{x^2} (2x) \ln(5) + 3x^2}{5^{x^2} + x^3} : \text{الحل}$$

تكامل الدالة الأسية العامة :

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int x^2 6^{x^3-2} dx \quad (1)$$

$$\int x^2 6^{x^3-2} dx = \frac{1}{3} \int 6^{x^3-2} (3x^2) dx = \frac{1}{3} \frac{6^{x^3-2}}{\ln 6} + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} dx = \int 3^{\cot x} \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int 3^{\cot x} \csc^2 x dx : \text{الحل}$$

$$= - \int 3^{\cot x} (-\csc^2 x) dx = - \frac{3^{\cot x}}{\ln 3} + c$$

$$\int \left(5^x + \frac{1}{2^x} \right) dx \quad (3)$$

$$\int \left(5^x + \frac{1}{2^x} \right) dx = \int (5^x + 2^{-x}) dx = \int 5^x dx + \int 2^{-x} dx : \text{الحل}$$

$$= \int 5^x dx + \frac{1}{-1} \int 2^{-x} (-1) dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + c$$

$$\int (7^x + 4)^{10} 7^x dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int (7^x + 4)^{10} 7^x dx &= \frac{1}{\ln 7} \int (7^x + 4)^{10} (7^x \ln 7) dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{\ln 7} \frac{(7^x + 4)^{11}}{11} + c \\ &= \int \frac{2^x}{2^x + 1} dx \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x}{2^x + 1} dx &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} dx = \frac{1}{\ln 2} \ln |2^x + 1| + c : \text{الحل} \\ &= \int 3^x (1 + \cos(3^x)) dx \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int 3^x (1 + \cos(3^x)) dx &= \int [3^x + \cos(3^x) 3^x] dx : \text{الحل} \\ &= \int 3^x dx + \int \cos(3^x) 3^x dx = \int 3^x dx + \frac{1}{\ln 3} \int \cos(3^x) (3^x \ln 3) dx \\ &= \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} \sin(3^x) + c \\ &= \int 4^x 5^{4^x} dx \quad (7) \end{aligned}$$

$$\int 4^x 5^{4^x} dx = \frac{1}{\ln 4} \int 5^{4^x} (4^x \ln 4) dx = \frac{1}{\ln 4} \frac{5^{4^x}}{\ln 5} + c : \text{الحل}$$

الدالة اللوغاريتمية العامة :
نرمز للدالة اللوغاريتمية للأساس a بالرمز $\log_a x$ وهي الدالة العكسية للدالة الأسية a^x حيث $a > 0$ عدداً حقيقياً

ملاحظات عامة :

$$\ln x = \log_e x \text{ و } \log x = \log_{10} x \quad (1)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (2)$$

$$\log_a a = 1 \quad (3)$$

$$\log_a x = y \iff x = a^y \quad (4)$$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية العامة :
إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (1)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (2)$$

$$\log_a x^r = r \log_a x \quad (3)$$

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $\log(x+1) = 2$
 الحل : $\log(x+1) = 2 \implies 10^{\log(x+1)} = 10^2$
 $\implies x+1 = 100 \implies x = 100 - 1 = 99$

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $3^{2x-1} = 7$
 الحل : $3^{2x-1} = 7 \implies \log_3 3^{2x-1} = \log_3 7$
 $2x - 1 = \log_3 7 \implies 2x = 1 + \log_3 7 \implies x = \frac{1 + \log_3 7}{2}$

إشتقاق الدالة اللوغاريتمية العامة :

$$\frac{d}{dx} \log_a |x| = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a |f(x)| = \frac{1}{\ln a} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \log_5 |x^3 + \sin 5x| \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \frac{3x^2 + \cos 5x}{x^3 + \sin 5x} \quad (5) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = [\log_3 |x^2 - 1| + e^{3x}]^8 \quad (2)$$

$$f'(x) = 8 [\log_3 |x^2 - 1| + e^{3x}]^7 \left(\frac{1}{\ln 3} \frac{2x}{x^2 - 1} + e^{3x}(3) \right) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = \sin(\log_7 |2x + 3|) \quad (3)$$

$$f'(x) = \cos(\log_7 |2x + 3|) \left(\frac{1}{\ln 7} \frac{2}{2x + 3} \right) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = \sin(x^2) \log_7 |2x + 3| \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = \cos(x^2) (2x) \log_7 |2x + 3| + \sin(x^2) \frac{1}{\ln 7} \frac{2}{2x + 3}$$

3.3 تمارين

1. أوجد قيمة x التي تحقق ما يلي :

$$(1) 5^{3x+4} = 30 \quad (2) 2^{x^2-5x+6} = 1$$

$$(3) \log_5(x+4) = 2 \quad (4) \log(2x-2) = 0$$

2. احسب مشتقات الدوال التالية :

$$(1) f(x) = 5^{\sin 2x} \quad (2) f(x) = \tan(7^{x^2})$$

$$(3) f(x) = \ln |3^{\cos x} + e^{5x}| \quad (4) f(x) = (\sec x^2 + \pi^{2x-1})^5$$

$$(5) f(x) = \log_5 |x^4 - \csc 6x| \quad (6) f(x) = \sin(\log_3 |x^2 - 1|)$$

$$(7) f(x) = \sqrt{x} \log_6 |2 + \cot x| \quad (8) f(x) = (\log_2 |3x - 2| + \sqrt[4]{x})^8$$

3. احسب التكاملات التالية :

$$(1) \int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad (2) \int \frac{\pi^{\sin 3x}}{\sec 3x} dx$$

$$(3) \int x 3^{x^2+1} \cos(3^{x^2+1}) dx \quad (4) \int \frac{\sin x 7^{\cos x}}{7^{\cos x} + 3} dx$$

$$(5) \int \frac{6^{3x}}{(6^{3x} + 2)^9} dx \quad (6) \int 2^x 5^{2^x} dx$$

$$(7) \int x 4^{x^2} (1 + \sec(4^{x^2})) dx \quad (8) \int \frac{(4 + \log_2 x)^7}{3x} dx$$

$$(9) \int \frac{\cos(\log 3x)}{2x} dx \quad (10) \int \frac{1}{x \log_3 x} dx$$

4.3 تكامل الدوال المثلثية العكسية

مراجعة اشتقاق الدوال المثلثية العكسية :

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad |x| < 1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} , \quad |f(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad |x| < 1 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} , \quad |f(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} , \quad |x| > 1 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} , \quad |f(x)| > 1$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} , \quad |x| > 1 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} , \quad |f(x)| > 1$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \sin^{-1} (\sqrt{x}) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \quad \text{الحل :}$$

$$f(x) = \tan^{-1}(2x^2 + 3) \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (2x^2 + 3)^2} (4x) = \frac{4x}{1 + (2x^2 + 3)^2} : \text{الحل}$$

$$f(x) = \sec^{-1}(3 + \sin 3x) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(3 + \sin 3x) \sqrt{(3 + \sin 3x)^2 - 1}} (\cos 3x) \quad (3)$$

$$f(x) = e^{\cos^{-1}(4x+1)} \quad (4)$$

$$f'(x) = e^{\cos^{-1}(4x+1)} \frac{-1}{\sqrt{1 - (4x+1)^2}} \quad (4) : \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln |e^{5x} + \sec^{-1}(3x)| \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{e^{5x} (5) + \frac{1}{3x\sqrt{(3x)^2-1}} (3)}{e^{5x} + \sec^{-1}(3x)} : \text{الحل}$$

$$f(x) = (5^x + \tan^{-1}(2x + 1))^5 \quad (6)$$

: الحل

$$f'(x) = 5 (5^x + \tan^{-1}(2x + 1))^4 \left(5^x \ln 5 + \frac{1}{1 + (2x + 1)^2} (2) \right)$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c, \quad |x| < a \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c, \quad |f(x)| < a$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (2)$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c, \quad |x| > a \quad (3)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x) \sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c, \quad |f(x)| > a$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^2}{9+x^6} dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{9+x^6} dx &= \int \frac{x^2}{3^2+(x^3)^2} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{3^2+(x^3)^2} dx = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x^3}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}} dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx &= \int (16-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{-2} \int (16-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) dx = \frac{1}{-2} \frac{(16-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx &= \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1^2-(\ln x)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{\ln x}{1} \right) + c = \sin^{-1} (\ln x) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}} dx \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}} dx &= \int \frac{e^{2x}}{5^2+(e^{2x})^2} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x} (2)}{5^2+(e^{2x})^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{5} \tan^{-1} \left(\frac{e^{2x}}{5} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{25-\cos^2 x}} dx \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sqrt{25 - \cos^2 x}} dx &= \int \frac{\sin x}{\sqrt{5^2 - (\cos x)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{-1} \int \frac{-\sin x}{\sqrt{5^2 - (\cos x)^2}} dx = -\sin^{-1} \left(\frac{\cos x}{5} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{1}{x^2 + 6x + 25} dx \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 6x + 25} dx &= \int \frac{1}{(x^2 + 6x + 9) + 16} dx : \text{الحل} \\ &= \int \frac{1}{(x + 3)^2 + 4^2} dx = \frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x + 3}{4} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx &= \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{(x^2 - 2x + 1) - 4}} dx : \text{الحل} \\ &= \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{(x - 1)^2 - 2^2}} dx = \frac{1}{2} \sec^{-1} \left(\frac{x - 1}{2} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x + c \\ &\qquad \int \frac{x + 2}{\sqrt{16 - x^2}} dx \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 2}{\sqrt{16 - x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{16 - x^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{-2} \int (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{4^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{-2} \frac{(16 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{x + \tan^{-1} x}{x^2 + 1} dx \quad (11) \end{aligned}$$

$$\int \frac{x + \tan^{-1} x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{\tan^{-1} x}{x^2 + 1} dx : \text{الحل}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int (\tan^{-1} x)^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} + c \\
&\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}} dx \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2-6^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{(e^x)^2-6^2}} dx = \frac{1}{6} \sec^{-1} \left(\frac{e^x}{6} \right) + c$$

تمارين 4.3

1. احسب مشتقات الدوال التالية :

$$\begin{aligned}
 (1) f(x) &= \sqrt{x} \sin^{-1}(5x) & (2) f(x) &= \ln|3x-1| \cos^{-1}(\sqrt{x}) \\
 (3) f(x) &= \ln|x^3 + \tan^{-1}(2x)| & (4) f(x) &= \cot^{-1}(e^{3x}) + 5\sqrt[3]{x} \\
 (5) f(x) &= e^{\sec^{-1}(4x)} & (6) f(x) &= \left(\csc^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + x^4 \right)^7
 \end{aligned}$$

2. احسب التكاملات التالية :

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{x}{\sqrt{25-9x^4}} dx & & (2) \int \frac{5x^2}{x^6+36} dx \\
 (3) \int \frac{1}{x\sqrt{x^8-16}} dx & & (4) \int \frac{3x}{\sqrt{4-(x^2+1)^2}} dx \\
 (5) \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx & & (6) \int \frac{7}{25+(x-1)^2} dx \\
 (7) \int \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-16}} dx & & (8) \int \frac{1}{x\sqrt{x^3-36}} dx \\
 (9) \int \frac{2}{\sqrt{-x^2+2x+8}} dx & & (10) \int \frac{3}{x^2+4x+13} dx \\
 (11) \int \frac{5}{(x-2)\sqrt{x^2-4x}} dx & & (12) \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 (13) \int \frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}} dx & & (14) \int \frac{x+5}{x^2+36} dx \\
 (15) \int \frac{(1+\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx & & (16) \int \frac{3-\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx
 \end{aligned}$$

باب 4

الدوال الزائدية ومعكوساتها

1.4 الدوال الزائدية

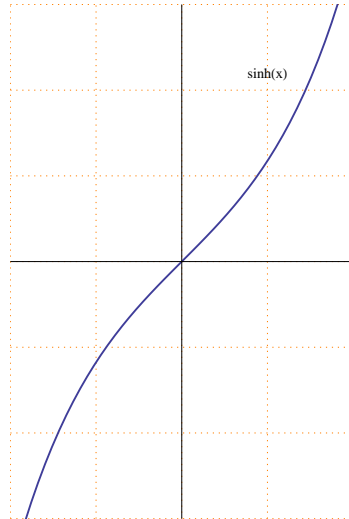
(1) دالة الجيب الزائدية :

نرمز لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh x$ وتعرف كالتالي :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

- 1 مجال دالة الجيب الزائدية \mathbb{R} ومداه \mathbb{R}
- 2 دالة الجيب الزائدية دالة فردية (متناظرة حول نقطة الأصل) و $\sinh(0) = 0$
- 3 رسم دالة الجيب الزائدية



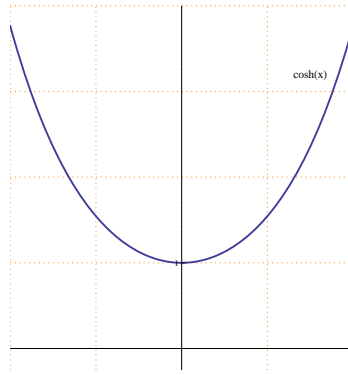
(2) دالة جيب التمام الزائدية :

نرمز لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh x$ وتعرف كالتالي :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

- 1 مجال دالة جيب التمام الزائدية \mathbb{R} ومداهما الفترة $[1, \infty)$
- 2 دالة جيب التمام الزائدية دالة زوجية (متناظرة حول محور y) و $\cosh(0) = 1$
- 3 رسم دالة جيب التمام الزائدية



تعرف باقي الدوال الزائدية على النحو التالي :

(3) دالة الظل الزائدية :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(4) دالة ظل التمام الزائدية :

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(5) دالة القاطع الزائدية :

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(6) دالة قاطع التمام الزائدية :

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

قوانين هامة :

$$x \in \mathbb{R} \text{ لكل } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ لكل } 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x \quad (3)$$

إشتقاق الدوال الزائدية :

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh (f(x)) = \cosh (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh (f(x)) = \sinh (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh (f(x)) = \operatorname{sech}^2 (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \coth (f(x)) = -\operatorname{csch}^2 (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}(f(x)) = -\operatorname{sech}(f(x)) \tanh(f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}(f(x)) = -\operatorname{csch}(f(x)) \coth(f(x)) f'(x)$$

البرهان :

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad (2)$$

أمثلة : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \operatorname{sech}(1 + \sqrt{x}) \quad (1)$$

الحل :

$$f'(x) = -\operatorname{sech}(1 + \sqrt{x}) \tanh(1 + \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$f(x) = e^{\sinh 4x} \quad (2)$$

الحل :

$$f'(x) = e^{\sinh 4x} \cosh 4x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln |\cosh(1 - x^2)| \quad (3)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\sinh(1 - x^2) (-2x)}{\cosh(1 - x^2)}$$

$$f(x) = \tanh(5^x) \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = \operatorname{sech}^2(5^x) 5^x \ln 5$$

$$f(x) = (\coth(3x) + e^{6x})^4 \quad (5)$$

الحل :

$$f'(x) = 4 (\coth(3x) + e^{6x})^3 (-\operatorname{csch}^2(3x) (3) + e^{6x} (6))$$

$$f(x) = x^{\operatorname{csch} x} \quad (6)$$

الحل :

$$\ln |f(x)| = \ln |x^{\operatorname{csch} x}| = \operatorname{csch} x \ln |x|$$

ياشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-\operatorname{csch} x \coth x) \ln |x| + \operatorname{csch} x \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) [(-\operatorname{csch} x \coth x) \ln |x| + \operatorname{csch} x \frac{1}{x}]$$

$$f'(x) = x^{\operatorname{csch} x} [(-\operatorname{csch} x \coth x) \ln |x| + \operatorname{csch} x \frac{1}{x}]$$

تكامل الدوال الزائدية :

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c \quad (1)$$

$$\int \cosh (f(x)) f'(x) \, dx = \sinh (f(x)) + c$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c \quad (2)$$

$$\int \sinh (f(x)) f'(x) \, dx = \cosh (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c \quad (3)$$

$$\int \operatorname{sech}^2 (f(x)) f'(x) \, dx = \tanh (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c \quad (4)$$

$$\int \operatorname{csch}^2 (f(x)) f'(x) \, dx = -\coth (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c \quad (5)$$

$$\int \operatorname{sech} (f(x)) \tanh (f(x)) f'(x) \, dx = -\operatorname{sech} (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c \quad (6)$$

$$\int \operatorname{csch}(f(x)) \coth(f(x)) f'(x) \, dx = -\operatorname{csch}(f(x)) + c$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + c \quad (7)$$

$$\int \tanh(f(x)) f'(x) \, dx = \ln |\cosh(f(x))| + c$$

$$\int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + c \quad (8)$$

$$\int \coth(f(x)) f'(x) \, dx = \ln |\sinh(f(x))| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int x^2 \cosh(x^3) \, dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cosh(x^3) \, dx &= \frac{1}{3} \int \cosh(x^3) (3x^2) \, dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{3} \sinh(x^3) + c \end{aligned}$$

$$\int e^x \tanh(e^x) \, dx \quad (2)$$

$$\int e^x \tanh(e^x) \, dx = \int \tanh(e^x) e^x \, dx = \ln |\cosh(e^x)| + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx &= \int \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx : \text{الحل} \\ &= 2 \int \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = 2 \tanh(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{\operatorname{csch}(\frac{1}{x}) \coth(\frac{1}{x})}{x^2} \, dx \quad (4)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{coth}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx &= \int \operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{coth}\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int -\operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{coth}\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx = \operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) + c \end{aligned}$$

$$\int e^{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x dx \quad (5)$$

$$\int e^{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x dx = e^{\tanh x} + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx = \ln |1 + \cosh x| + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh^2 x} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh^2 x} dx = \int \frac{\sinh x}{1 + (\cosh x)^2} dx = \tan^{-1}(\cosh x) + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sech} x \sqrt{4 - \sinh^2 x}} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sech} x \sqrt{4 - \sinh^2 x}} dx = \int \frac{\cosh x}{\sqrt{2^2 - (\sinh x)^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= \sin^{-1} \left(\frac{\sinh x}{2} \right) + c$$

$$\int \frac{\coth x}{\sqrt{\sinh^2 x - 4}} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{\coth x}{\sqrt{\sinh^2 x - 4}} dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x \sqrt{(\sinh x)^2 - (2)^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{2} \sec^{-1} \left(\frac{\sinh x}{2} \right) + c$$

تمارين 1.4

1. احسب مشتقات الدوال التالية :

- (1) $f(x) = \sinh(e^{2x})$ (2) $f(x) = \cosh(\ln|x|)$
 (3) $f(x) = \tanh(\sin^{-1}x)$ (4) $f(x) = \operatorname{sech}\left(\frac{1}{x}\right)$
 (5) $f(x) = \operatorname{csch}(x^2) \cos 3x$ (6) $f(x) = (\tanh\sqrt{x} + \coth\sqrt[3]{x})^6$
 (7) $f(x) = \ln|\cosh(x^2) - 4^x|$ (8) $f(x) = e^{\sinh^2 x}$

2. احسب التكاملات التالية :

- (1) $\int e^{4x} \sinh(5 - e^{4x}) dx$ (2) $\int \frac{\cosh(\ln|x|)}{5x} dx$
 (3) $\int \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} dx$ (4) $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{x} \tanh\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
 (5) $\int \frac{\coth(\sin x)}{\sec x} dx$ (6) $\int \frac{e^{\cosh 3x}}{\operatorname{csch} 3x} dx$
 (7) $\int \frac{5^{\operatorname{sech} x} \sinh x}{\cosh^2 x} dx$ (8) $\int \frac{\operatorname{sech} 4x \tanh 4x}{2 + \operatorname{sech} 4x} dx$
 (9) $\int \frac{\operatorname{csch}^2 x}{4 + \coth^2 x} dx$ (10) $\int \frac{3}{\operatorname{csch} x \sqrt{9 - \cosh^2 x}} dx$

2.4 الدوال الزائدية العكسية

(1) الدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sinh y = x \iff y = \sinh^{-1} x$$

(2) الدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\cosh^{-1} : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\cosh y = x \iff y = \cosh^{-1} x$$

(3) الدالة العكسية لدالة الظل الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الظل الزائدية بالرمز $\tanh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\tanh^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tanh y = x \iff y = \tanh^{-1} x$$

(4) الدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية بالرمز $\coth^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\coth y = x \iff y = \coth^{-1} x$$

(5) الدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية بالرمز $\operatorname{sech}^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1] \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\operatorname{sech} y = x \iff y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

(6) الدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية بالرمز $csch^{-1}x$ وتعرف كالتالي

$$csch^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

$$cschy = x \iff y = csch^{-1}x$$

الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية :

$$x \in \mathbb{R} \text{ لكل } \sinh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (1)$$

$$x \in [1, \infty) \text{ لكل } \cosh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (2)$$

$$x \in (-1, 1) \text{ لكل } \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad (3)$$

$$x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ لكل } \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad (4)$$

$$x \in (0, 1] \text{ لكل } sech^{-1} x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right) \quad (5)$$

$$x \in \mathbb{R}^* \text{ لكل } csch^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \quad (6)$$

البرهان : سنكتفي ببرهان الفقرة (1) ، والبقية يمكن برهانها بطريقة مشابهة.

$$y = \sinh^{-1} x \implies x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad (1)$$

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

لاحظ أن $\sqrt{x^2 + 1} > x$ وبالتالي $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ وبما أن $e^y > 0$ دائماً فإن

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$y = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right|$$

$$\sinh^{-1} x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right|$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

$$x \in (1, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (2)$$

$$f(x) \in (1, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \cosh^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}$$

$$x \in (-1, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (3)$$

$$f(x) \in (-1, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$

$$x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ لكل } \frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{-1}{1-x^2} \quad (4)$$

$$f(x) \in \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ لكل } \frac{d}{dx} \coth^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$

$$x \in (0, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (5)$$

$$f(x) \in (0, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \quad (6)$$

$$f(x) \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

البرهان :

$$y = \sinh^{-1} x \implies \sinh y = x \quad (1)$$

بالإشتقاق ضمناً

$$\cosh y y' = 1 \implies y' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \cosh^{-1} x \implies \cosh y = x \quad (2)$$

بالإشتقاق ضمناً

$$\sinh y \, y' = 1 \implies y' = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \sinh^{-1}(5x - 1) \quad (1)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (5x - 1)^2}} \quad (5)$$

$$f(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{x}) \quad (2)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \operatorname{csch}^{-1}(e^{3x}) \quad (3)$$

الحل :

$$f'(x) = -\frac{1}{e^{3x}\sqrt{1 + (e^{3x})^2}} (e^{3x} (3)) = -\frac{3}{\sqrt{1 + e^{6x}}}$$

$$f(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)} \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)} \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 1}} (2) \ln 6$$

$$f(x) = \ln|x^2 + \coth^{-1}(2x)| \quad (5)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{2x + \frac{-1}{1-(2x)^2} (2)}{x^2 + \coth^{-1}(2x)}$$

$$f(x) = [\operatorname{sech}^{-1}(3x) + 7^x]^5 \quad (6)$$

الحل :

$$f'(x) = 5 [\operatorname{sech}^{-1}(3x) + 7^x]^4 \left[\frac{-1}{3x\sqrt{1 - (3x)^2}} (3) + 7^x \ln 7 \right]$$

$$f(x) = \sqrt{x} \sinh^{-1}(5x) \quad (7)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sinh^{-1}(5x) + \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{1+(5x)^2}} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{\cosh^{-1}(x^2)}{e^{3x}} \quad (8)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^2)^2-1}} (2x) e^{3x} - \cosh^{-1}(x^2) e^{3x}}{(e^{3x})^2} \quad (3)$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$x > a \text{ حيث } \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (2)$$

$$f(x) > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (3)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$|x| > a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (4)$$

$$|f(x)| > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2} dx = -\frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + c \quad (5)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) + c$$

$$|x| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + c \quad (6)$$

$$|f(x)| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{|f(x)|}{a} \right) + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2)^2 - 4^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{cosh}^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{25 - e^{2x}} dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{25 - e^{2x}} dx &= \int \frac{e^x}{5^2 - (e^x)^2} dx : \text{الحل} \\ |e^x| < 5 \text{ حيث} &= \frac{1}{5} \operatorname{tanh}^{-1} \left(\frac{e^x}{5} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 25}} dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 25}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{(2x)^2 + 5^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sinh}^{-1} \left(\frac{2x}{5} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4+x}} dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4+x}} dx &= 2 \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{x})^2}} dx : \text{الحل} \\ &= 2 \operatorname{sinh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}} dx \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}} dx &= \int \frac{x}{x^2\sqrt{4^2 - (x^2)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2\sqrt{4^2 - (x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \frac{-1}{4} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx &= \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{1^2+(e^x)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= -\operatorname{csch}^{-1}(e^x) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}} dx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+1)-9}} dx : \text{الحل} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-3^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} dx \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} dx &= \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{3-(x^2-2x)}} dx : \text{الحل} \\ &= \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4-(x^2-2x+1)}} dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{2^2-(x-1)^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

تمارين 2.4

1. احسب مشتقات الدوال التالية :

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \sinh^{-1}(3^x) \sqrt{x} & (2) f(x) &= \cosh^{-1}(\sqrt{x}) \ln|x^2 - 1| \\ (3) f(x) &= (e^{4x} + \tanh^{-1} 3x)^5 & (4) f(x) &= \ln|\coth^{-1} 2x + \sinh 2x| \\ (5) f(x) &= \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{\cosh x} & (6) f(x) &= \operatorname{csch}^{-1}(\cos x) + \ln|\sinh x| \end{aligned}$$

2. احسب التكاملات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{5x^2}{\sqrt{9 + 16x^6}} dx & & (2) \int \frac{3x}{\sqrt{25x^4 + 16}} dx \\ (3) \int \frac{x^3}{36 - 9x^8} dx & & (4) \int \frac{3x}{x^2 \sqrt{9 - 16x^4}} dx \\ (5) \int \frac{5x}{x^2 \sqrt{4 - 9x^4}} dx & & (6) \int \frac{\sinh x}{4 - 25 \cosh^2 x} dx \\ (7) \int \frac{x - 2}{\sqrt{25 + x^2}} dx & & (8) \int \frac{x + 1}{16 - x^2} dx \\ (9) \int \frac{\cosh^{-1} x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx & & (10) \int \frac{2}{\sqrt{9 - e^{6x}}} dx \\ (11) \int \frac{5}{x \sqrt{25 + 4x^4}} dx & & (12) \int \frac{1}{x \sqrt{25 - x^3}} dx \\ (13) \int \frac{7}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx & & (14) \int \frac{5}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} dx \\ (15) \int \frac{2}{(x + 3) \sqrt{x^2 + 6x + 25}} dx & & (16) \int \frac{3}{(x + 1) \sqrt{3 - x^2 - 2x}} dx \end{aligned}$$

باب 5

طرائق التكامل

1.5 التكامل بالتجزئ

مبرهنة : إذا كانت $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ و كانت كل من f' و g' متصلة فإن :

$$\int u dv = u v - \int v du$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

$$\int x \cos x dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos x dx \\ du &= dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + c = x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\int x^2 e^x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= e^x dx \\ du &= 2x dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^x dx \\ du &= dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right] \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x + c \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln|x| dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \ln|x| & v &= x^2 dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln|x| dx &= \frac{x^3}{3} \ln|x| - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c \end{aligned}$$

$$\int \ln(1+x^2) dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \ln(1+x^2) & dv &= dx \\ du &= \frac{2x}{1+x^2} dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{(2x^2+2)-2}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2} dx + \int \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - \int 2 dx - 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

$$\int \tan^{-1} x dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x \, dx &= x \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} x \, dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \\ &\int \sin^{-1} x \, dx \quad (6) \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \sin^{-1} x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^{-1} x \, dx &= x \sin^{-1} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \sin^{-1} x - \frac{1}{-2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) \, dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\ &\int e^x \cos x \, dx \quad (7) \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \cos x & dv &= e^x \, dx \\ du &= -\sin x \, dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int -\sin x e^x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x e^x \, dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{aligned} u &= \sin x & dv &= e^x \, dx \\ du &= \cos x \, dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + \int \sin x e^x \, dx \\ \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ 2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\ \int e^x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} [e^x \cos x + e^x \sin x] + c \end{aligned}$$

تمارين 1.5

احسب التكاملات التالية :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (1) $\int (2x + 1) \cosh x \, dx$ | (2) $\int (x^2 - 1) \sin 2x \, dx$ |
| (3) $\int x^3 e^x \, dx$ | (4) $\int (x + 1) \sec^2 x \, dx$ |
| (5) $\int \ln x \, dx$ | (6) $\int x^5 \ln x \, dx$ |
| (7) $\int x^{-4} \ln x \, dx$ | (8) $\int \sec^{-1} x \, dx$ |
| (9) $\int \sinh^{-1} x \, dx$ | (10) $\int x \operatorname{csch}^{-1} x \, dx$ |
| (11) $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$ | (12) $\int e^{5x} \cos 2x \, dx$ |
| (13) $\int e^{3x} \sinh x \, dx$ | (14) $\int e^x \cosh 5x \, dx$ |
| (15) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ | (16) $\int (\ln x)^2 \, dx$ |
| (17) $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$ | (18) $\int x^7 \sqrt{x^4 + 2} \, dx$ |

2.5 تكامل قوى الدوال المثلثية

أولاً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x dx$ و $\int \cos^n x dx$

(1) إذا كان n عدداً فردياً فيمكن حل التكامل بالتعويض

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل $\int \sin^n x dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل $\int \cos^n x dx$

(2) إذا كان n عدداً زوجياً

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \sin^n x dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \cos^n x dx$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \cos^3 x dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x dx$$

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - u^2) du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$\int \sin^5 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x dx \implies -du = \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = -\int (1 - u^2)^2 du \\ &= -\int (1 - 2u^2 + u^4) du = -\left(u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + c \\ &= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$\int \cos^4 2x dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام متطابقة ضعف الزاوية $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned} \int \cos^4 2x dx &= \int (\cos^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4} [1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x] dx \\ &= \int \frac{1}{4} \left[1 + 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 8x\right] dx \\ &= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right] dx \\ &= \int \frac{3}{8} dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx + \frac{1}{8} \int \cos 8x dx \\ &= \int \frac{3}{8} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int \cos 4x (4) dx + \frac{1}{8} \frac{1}{8} \int \cos 8x (8) dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + c \end{aligned}$$

ثانياً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x \cos^m x dx$

(1) إذا كان n فردياً نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل

(2) إذا كان m فردياً نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل

(3) إذا كان كل من m و n زوجياً

نستخدم $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ لحل التكامل

مثال : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx \implies -du = \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx &= - \int (1 - u^2)^2 u^2 \, du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 \, du = - \int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du \\ &= - \left(\frac{u^3}{3} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + c = - \frac{\cos^3 x}{3} + 2 \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, dx &= \int \sqrt{\sin x} \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sqrt{\sin x} (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx &= \int \sqrt{u} (1 - u^2) \, du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} (1 - u^2) \, du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}} \right) \, du \\ &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} (\sin x)^{\frac{7}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int \sin^5 x \cos^7 x dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^7 x dx &= \int \sin^4 x \cos^7 x \sin x dx \\ &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^7 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^7 x \sin x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x dx \implies -du = \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^7 x \sin x dx &= - \int (1 - u^2)^2 u^7 du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) u^7 du = - \int (u^7 - 2u^9 + u^{11}) du \\ &= - \left(\frac{u^8}{8} - 2 \frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{12}}{12} \right) + c = - \frac{\cos^8 x}{8} + 2 \frac{\cos^{10} x}{10} - \frac{\cos^{12} x}{12} + c \end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) (\cos^2 x)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x) (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx + \frac{1}{8} \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \cos 2x (2) dx \\ &= \frac{1}{16} \int 1 dx - \frac{1}{16} \frac{1}{4} \int \cos 4x (4) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cos 2x (2) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + c$$

ثالثاً - التكاملات من النوع $\int \tan^m x \sec^n x dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \tan^m x \sec^n x dx = \int \sec^n x dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\begin{aligned} \int \tan^m x \sec^n x dx &= \int \tan^m x dx = \int \tan^{m-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{m-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{m-2} x dx \\ &= \frac{1}{m-1} \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x dx \end{aligned}$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \tan x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \sec x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\sec x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \sec^3 x dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx$$

$$\begin{aligned} u &= \sec x & dv &= \sec^2 x dx \\ du &= \sec x \tan x dx & v &= \tan x \end{aligned}$$

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\
 &2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx \\
 \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + c
 \end{aligned}$$

$$\int \tan^4 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
 \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx \\
 &= \int (\tan x)^2 \sec^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int (\tan x)^2 \sec^2 x dx - \int \sec^2 x dx + \int 1 dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c
 \end{aligned}$$

$$\int \tan^2 x \sec^6 x dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
 \int \tan^2 x \sec^6 x dx &= \int \tan^2 x \sec^4 x \sec^2 x dx \\
 &= \int \tan^2 x (\sec^2 x)^2 \sec^2 x dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x dx
 \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \tan x$

$$du = \sec^2 x dx$$

$$\begin{aligned}
 \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x dx &= \int u^2 (1 + u^2)^2 du \\
 &= \int u^2 (1 + 2u^2 + u^4) du = \int (u^2 + 2u^4 + u^6) du \\
 &= \frac{u^3}{3} + 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + 2 \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c
 \end{aligned}$$

$$\int \tan^5 x \sec^3 x dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x dx \\ &= \int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \sec x$

$$du = \sec x \tan x dx$$

$$\begin{aligned} \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx &= \int (u^2 - 1)^2 u^2 du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^2 du = \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= \frac{u^7}{7} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sec^7 x}{7} - 2 \frac{\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

رابعاً - التكاملات من النوع $\int \cot^m x \csc^n x dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \cot^m x \csc^n x dx = \int \csc^n x dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\begin{aligned} \int \cot^m x \csc^n x dx &= \int \cot^m x dx = \int \cot^{m-2} x (\csc^2 x - 1) dx \\ &= \int \cot^{m-2} x \csc^2 x dx - \int \cot^{m-2} x dx \\ &= -\frac{1}{m-1} \cot^{m-1} x - \int \cot^{m-2} x dx \end{aligned}$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cot x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \csc x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\csc x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$\int \cot^4 x \csc^4 x dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \cot^4 x \csc^4 x dx &= \int \cot^4 x \csc^2 x \csc^2 x dx \\ &= \int \cot^4 x (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \cot x$

$$du = -\csc^2 x dx \implies -du = \csc^2 x dx$$

$$\begin{aligned} \int \cot^4 x (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx &= - \int u^4 (1 + u^2) du \\ &= - \int (u^4 + u^6) du = - \left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + c = - \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^7 x}{7} + c \end{aligned}$$

$$\int \cot^5 x \csc^5 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \cot^5 x \csc^5 x dx &= \int \cot^4 x \csc^4 x \csc x \cot x dx \\ &= \int (\cot^2 x)^2 \csc^4 x \csc x \cot x dx \\ &= \int (\csc^2 x - 1)^2 \csc^4 x \csc x \cot x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \csc x$

$$du = -\csc x \cot x dx \implies -du = \csc x \cot x dx$$

$$\begin{aligned} \int (\csc^2 x - 1)^2 \csc^4 x \csc x \cot x dx &= - \int (u^2 - 1)^2 u^4 du \\ &= - \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^4 du = - \int (u^8 - 2u^6 + u^4) du \\ &= - \left(\frac{u^9}{9} - 2 \frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} \right) + c = - \frac{\csc^9 x}{9} + 2 \frac{\csc^7 x}{7} - \frac{\csc^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

خامساً - التكاملات $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$ تكامل هذه التكاملات باستخدام المتطابقات التالية :

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x])$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} (\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$\int \sin 7x \cos 5x \, dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin 7x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} (\sin[(7-5)x] + \sin[(7+5)x]) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 12x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \sin 2x \, (2) \, dx + \frac{1}{2} \frac{1}{12} \int \sin 12x \, (12) \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{24} \cos 12x + c \end{aligned}$$

$$\int \sin 4x \sin 3x \, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \sin 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} (\cos[(4-3)x] - \cos[(4+3)x]) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 7x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \frac{1}{7} \int \cos 7x \, (7) \, dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + c \end{aligned}$$

تمارين 2.5

احسب التكاملات التالية :

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (1) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ | (2) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$ |
| (3) $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$ | (4) $\int \sqrt[3]{\cos x} \sin^3 x dx$ |
| (5) $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x dx$ | (6) $\int \tan^5 x \sec^5 x dx$ |
| (7) $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$ | (8) $\int \cot^2 x \csc^6 x dx$ |
| (9) $\int \cot^5 x \csc^3 x dx$ | (10) $\int \sin 3x \cos 5x dx$ |
| (11) $\int \sin 2x \sin 6x dx$ | (12) $\int \cos 4x \cos 7x dx$ |
| (13) $\int \sin^2 x dx$ | (14) $\int \cos^2 x dx$ |
| (15) $\int \sec^5 x dx$ | (16) $\int \tan^6 x dx$ |

3.5 التعويضات المثلثية

تستخدم التعويضات المثلثية لحل التكاملات التي تحتوي على الجذور $\sqrt{x^2 - a^2}$ ، $\sqrt{a^2 + x^2}$ ، $\sqrt{a^2 - x^2}$ حيث $a > 0$ تقوم التعويضات المثلثية بتحويل هذه التكاملات إلى تكاملات لقوى دوال مثلثية وبشكل تفصيلي :

(1) نستخدم التعويض $x = a \sin \theta$ حيث $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ للتخلص من $\sqrt{a^2 - x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

(2) نستخدم التعويض $x = a \tan \theta$ حيث $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{a^2 + x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta$$

(3) نستخدم التعويض $x = a \sec \theta$ حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{x^2 - a^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{4^2 - x^2}} dx$$

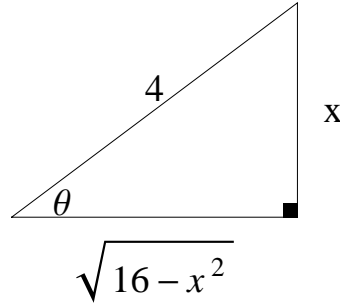
$$x = 4 \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{x}{4}$$

$$dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx = \int \frac{4 \cos \theta}{16 \sin^2 \theta \sqrt{16 - 16 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{4 \cos \theta}{16 \sin^2 \theta \sqrt{16 \cos^2 \theta}} d\theta = \int \frac{4 \cos \theta}{16 \sin^2 \theta 4 \cos \theta} d\theta$$

$$= \int \frac{1}{16 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{16} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{16} \cot \theta + c$$



$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx = -\frac{1}{16} \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3^2}} dx$$

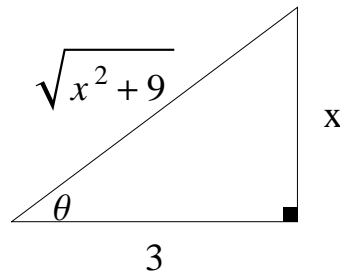
$$x = 3 \tan \theta \implies \tan \theta = \frac{x}{3} \text{ نستخدم التعويض}$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{\sqrt{9 \tan^2 \theta + 9}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{\sqrt{9 (\tan^2 \theta + 1)}} d\theta$$

$$= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{\sqrt{9 \sec^2 \theta}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3 \sec \theta} d\theta$$

$$= \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3} \right| + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx = \int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{(x^2)^2} dx$$

$$x = 5 \sec \theta \implies \sec \theta = \frac{x}{5}$$

$$dx = 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{(x^2)^2} dx = \int \frac{\sqrt{25 \sec^2 \theta - 25}}{(5^2 \sec^2 \theta)^2} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

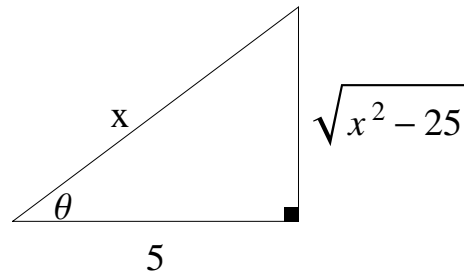
$$= \int \frac{\sqrt{25(\sec^2 \theta - 1)}}{5^4 \sec^4 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{25 \tan^2 \theta}}{5^4 \sec^4 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{5 \tan \theta}{5^4 \sec^4 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta = \int \frac{5^2 \sec \theta \tan^2 \theta}{5^4 \sec^4 \theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2 \theta}{5^2 \sec^3 \theta} d\theta = \frac{1}{25} \int \tan^2 \theta \frac{1}{\sec^3 \theta} d\theta = \frac{1}{25} \int \frac{\sin^2 \theta \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{25} \int (\sin \theta)^2 \cos \theta d\theta = \frac{1}{25} \frac{(\sin \theta)^3}{3} + c = \frac{1}{75} (\sin \theta)^3 + c$$



$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx = \frac{1}{75} \left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{x} \right)^3 + c$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (4)$$

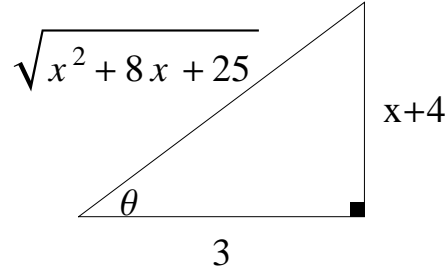
الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{1}{((x^2 + 8x + 16) + 9)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \int \frac{1}{((x + 4)^2 + 3^2)^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned}$$

$$x + 4 = 3 \tan \theta \implies \tan \theta = \frac{x + 4}{3} \quad \text{نستخدم التعويض}$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{((x + 4)^2 + 3^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9 \tan^2 \theta + 9)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9(\tan^2 \theta + 1))^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(3^2 \sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3^3 \sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3^2} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{9} \sin \theta + c \end{aligned}$$



$$\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{9} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x + 25}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - x^2}} dx$$

$$x = 2 \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{x}{2} \text{ نستخدم التعويض}$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4(1-\sin^2 \theta)}} d\theta = \int \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = \int 1 d\theta = \theta + c = \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c \\ \sin \theta = \frac{x}{2} &\implies \theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \text{ لاحظ أن} \end{aligned}$$

تمارين 3.5

احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9+x^2}} dx$

(3) $\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-25}} dx$

(4) $\int \frac{1}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

(5) $\int \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x} dx$

(6) $\int \sqrt{36-x^2} dx$

(7) $\int \sqrt{32-x^2-4x} dx$

(8) $\int \frac{1}{(x^2+4x+13)^{\frac{5}{2}}} dx$

(9) $\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

(10) $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2-9}} dx$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}} dx$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$

4.5 الكسور الجزئية

تستخدم الكسور الجزئية لحساب تكاملات الدوال الكسرية ، والدالة الكسرية هي حاصل قسمة كثيرتي حدود .

العامل الخطي : هو كثيرة حدود من الدرجة الأولى ، أي أنه على الصورة $ax + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

مثال : $2x$ ، $x - 3$ ، $4x + 1$ جميعها عوامل خطية .

المقدار التربيعي غير القابل للاختزال : هو كثيرة حدود من الدرجة الثانية ليس لها حلول حقيقية ، أي أنه على الشكل $ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac < 0$.

مثال : $x^2 + 1$ ، $x^2 + 9$ ، $x^2 + x + 1$ جميعها مقادير تربيعية غير قابلة للاختزال .
أما المقدار التربيعي $x^2 - 4$ فهو قابل للاختزال
لأن $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

مبرهنة : إذا كانت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ دالة كسرية ودرجة $g(x)$ أصغر من درجة $h(x)$ ، فإن هناك كسوراً F_1, F_2, \dots, F_n تحقق

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_n(x)$$

و تكون كل $F_i(x)$ إما على الصورة $\frac{A}{(ax + b)^m}$ (حيث $m \in \mathbb{N}$) أو على الصورة $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^m}$ حيث $b^2 - 4ac < 0$

مساهمة العامل الخطي $(ax + b)^m$ تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_m}{(ax + b)^m}$$

حيث A_1, A_2, \dots, A_m ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مساهمة المقدار التربيعي غير القابل للاختزال $(ax^2 + bx + c)^m$ تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1 + B_1x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2x}{(ax^2 + bx + c)^2} \dots + \frac{A_m + B_mx}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

حيث $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مثال : أكتب الدوال الكسرية التالية على هيئة كسور جزئية

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3} \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x - 3}$$

$$\frac{x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+4x} = \frac{x+4}{x(x+2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} \quad (3)$$

الحل :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x-2}{x^4+4x^2} \quad (4)$$

الحل :

$$\frac{x-2}{x^4+4x^2} = \frac{x-2}{x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x^2+9)} \quad (5)$$

الحل :

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+9} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+1} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4+2}{x^3+x} \quad (6)$$

الحل : باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\frac{x^4+2}{x^3+x} = x + \frac{-x^2+2}{x(x^2+1)} = x + \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3}$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A_1(x+3)}{(x-2)(x+3)} + \frac{A_2(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$x - 7 = A_1(x + 3) + A_2(x - 2)$$

$$\text{ضع } x = 2$$

$$2 - 7 = A_1(2 + 3) \implies -5 = 5A_1 \implies A_1 = -1$$

$$\text{ضع } x = -3$$

$$-3 - 7 = A_2(-3 - 2) \implies -10 = -5A_2 \implies A_2 = 2$$

$$\frac{x - 7}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{-1}{x - 2} + \frac{2}{x + 3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 7}{x^2 + x - 6} dx &= \int \left(\frac{-1}{x - 2} + \frac{2}{x + 3} \right) dx \\ &= \int \frac{-1}{x - 2} dx + \int \frac{2}{x + 3} dx = - \int \frac{1}{x - 2} dx + 2 \int \frac{1}{x + 3} dx \\ &= -\ln|x - 2| + 2\ln|x + 3| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} dx \quad (2)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} &= \frac{7x^2 + 11x + 5}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{7x^2 + 11x + 5}{x(x + 1)^2} \\ &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A_1(x + 1)^2}{x(x + 1)^2} + \frac{A_2 x(x + 1)}{(x + 1)x(x + 1)} + \frac{A_3 x}{x(x + 1)^2}$$

$$7x^2 + 11x + 5 = A_1(x + 1)^2 + A_2 x(x + 1) + A_3 x$$

$$7x^2 + 11x + 5 = A_1(x^2 + 2x + 1) + A_2x^2 + A_2x + A_3x$$

$$7x^2 + 11x + 5 = A_1x^2 + 2A_1x + A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x$$

$$7x^2 + 11x + 5 = (A_1 + A_2)x^2 + (2A_1 + A_2 + A_3)x + A_1$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$A_1 + A_2 = 7 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$2A_1 + A_2 + A_3 = 11 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A_1 = 5 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$A_2 = 7 - A_1 = 7 - 5 = 2$$

من المعادلة (2) نستنتج أن

$$10 + 2 + A_3 = 11 \implies A_3 = 11 - 12 = -1$$

$$\frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx - \int (x+1)^{-2} dx$$

$$= 5 \ln |x| + 2 \ln |x+1| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x} dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x-2 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$A+B=0 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$C=1 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A=-2 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$-2+B=0 \implies B=2$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= -2 \ln |x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + 4}$$

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{(B_1x + C_1)(x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} + \frac{(B_2x + C_2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$$

$$3 = (B_1x + C_1)(x^2 + 4) + (B_2x + C_2)(x^2 + 1)$$

$$3 = B_1x^3 + 4B_1x + C_1x^2 + 4C_1 + B_2x^3 + B_2x + C_2x^2 + C_2$$

$$3 = (B_1 + B_2)x^3 + (C_1 + C_2)x^2 + (4B_1 + B_2)x + (4C_1 + C_2)$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$B_1 + B_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$4B_1 + B_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (3)$$

$$4C_1 + C_2 = 3 \quad \rightarrow \quad (4)$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (3) نحصل على :

$$3B_1 = 0 \implies B_1 = 0$$

من المعادلة (1) نستنتج أن : $B_2 = 0$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (4) نحصل على :

$$3C_1 = 3 \implies C_1 = 1$$

من المعادلة (2) نستنتج أن : $C_2 = -1$

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

تمارين 4.5

احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{8x + 2}{x^2 + 2x - 8} dx$

(3) $\int \frac{4x^2 + 2x + 12}{x^3 + 4x} dx$

(5) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx$

(7) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} dx$

(9) $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} dx$

(11) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 5 \sin x + 6} dx$

(2) $\int \frac{5x^2 + 3x - 2}{x^3 + 2x^2} dx$

(4) $\int \frac{x^4 + 13x^2 + 36}{5} dx$

(6) $\int \frac{-2x^3 + 5x^2 - 2x + 3}{x^4 + x^2} dx$

(8) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} dx$

(10) $\int \frac{4x^2 - 13x + 6}{(x+2)(x-2)^2} dx$

(12) $\int \frac{4e^x}{e^{2x} + 2e^x - 3} dx$

5.5 تعويضات متفرقة

أولاً - التكاملات التي تحتوي على قوى كسرية
إذا كان التكامل يحتوي على قوى كسرية للمتغير x ، نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{n}}$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه القوى فنستبدل القوى الكسرية بقوى صحيحة .

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$u = x^{\frac{1}{6}} \implies x = u^6 \text{ نستخدم التعويض}$$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} dx = \int \frac{6u^5}{u^3 + u^2} du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(u+1)} du = \int \frac{6u^3}{u+1} du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^3}{u+1} du = \int \left(6u^2 - 6u + 6 - \frac{6}{u+1} \right) du$$

$$= 6 \frac{u^3}{3} - 6 \frac{u^2}{2} + 6u - 6 \ln |u+1| + c = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6 \ln |u+1| + c$$

$$= 2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 - 3 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} + 1 \right| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} + 1 \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} dx$$

$$u = x^{\frac{1}{6}} \implies x = u^6 \text{ نستخدم التعويض}$$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} dx &= \int \frac{6u^5}{u^3 + u} du \\ &= \int \frac{6u^5}{u(u^2 + 1)} du = \int \frac{6u^4}{u^2 + 1} du\end{aligned}$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\begin{aligned}\int \frac{6u^4}{u^2 + 1} du &= \int \left(6u^2 - 6 + \frac{6}{u^2 + 1} \right) du \\ &= 6 \frac{u^3}{3} - 6u + 6 \tan^{-1} u + c = 2u^3 - 6u + 6 \tan^{-1} u + c \\ &= 2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \tan^{-1} \left(x^{\frac{1}{6}} \right) + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \tan^{-1} \left(x^{\frac{1}{6}} \right) + c\end{aligned}$$

ثانياً - التكاملات التي تحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$:
إذا كان التكامل يحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$ نستخدم التعويض $u = \sqrt[n]{g(x)}$ لحل التكامل .

مثال : أحسب التكاملين التاليين :

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx \quad (1)$$

الحل : نستخدم التعويض

$$\begin{aligned}u = \sqrt{1 + \sqrt{x}} &\implies 1 + \sqrt{x} = u^2 \implies \sqrt{x} = u^2 - 1 \implies x = (u^2 - 1)^2 \\ dx &= 2(u^2 - 1)(2u) du = (4u^3 - 4u) du \\ \int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx &= \int u(4u^3 - 4u) du = \int (4u^4 - 4u^2) du \\ &= 4 \frac{u^5}{5} - 4 \frac{u^3}{3} + c = \frac{4}{5} \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right)^5 - \frac{4}{3} \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right)^3 + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx \quad (2)$$

الحل : نستخدم التعويض

$$\begin{aligned}u = \sqrt{e^x + 1} &\implies e^x + 1 = u^2 \implies e^x = u^2 - 1 \implies x = \ln |u^2 - 1| \\ dx &= \frac{2u}{u^2 - 1}\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2 - 1} du = \int \frac{2}{u^2 - 1} du$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{2}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{A_1}{u - 1} + \frac{A_2}{u + 1}$$

$$\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{A_1(u + 1)}{(u - 1)(u + 1)} + \frac{A_2(u - 1)}{(u + 1)(u - 1)}$$

$$2 = A_1(u + 1) + A_2(u - 1)$$

$$\text{ضع } u = 1$$

$$2 = A_1(1 + 1) \implies 2A_1 = 2 \implies A_1 = 1$$

$$\text{ضع } u = -1$$

$$2 = A_2(-1 - 1) \implies -2A_2 = 2 \implies A_2 = -1$$

$$\int \frac{2}{u^2 - 1} du = \int \left(\frac{1}{u - 1} + \frac{-1}{u + 1} \right) du$$

$$= \ln |u - 1| - \ln |u + 1| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \ln |\sqrt{e^x + 1} - 1| - \ln |\sqrt{e^x + 1} + 1| + c$$

تمارين 5.5

احسب التكاملات التالية :

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}} dx & (2) \int \frac{1}{x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{3}}} dx \\
 (3) \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{5}}} dx & (4) \int \sqrt{3 + \sqrt{x}} dx \\
 (5) \int \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{x}}} dx & (6) \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
 (7) \int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx & (8) \int \sqrt{e^x - 1} dx
 \end{array}$$

باب 6

صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة

1.6 صيغ عدم التعيين

أولاً - حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$
مبرهنة (قاعدة لوبيتال):

إذا كانت الدالتان $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابلتين للاشتقاق على فترة I تحوي c (باستثناء ربما عند c) وكانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I - \{c\}$

. وكان الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الصيغة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وكانت $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

أمثلة : أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (4)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

لاحظ أن $e^x \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$

ثانياً - حالة عدم التعيين $0 \cdot \infty$

يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

1.6. صيغ عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (\infty \cdot 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

لاحظ أن $e^{x^2} \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad (0 \cdot -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

ثالثاً - حالة عدم التعيين $\infty - \infty$ يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x}$$

باب 6. صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{(x-1) \frac{1}{x} + \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\left(\frac{x-1+x \ln x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x-1+x \ln x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \end{aligned}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x-1+x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{1+1+\ln x} = \frac{-1}{1+1+0} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + x e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(x+1)e^x - 1} \right) \quad \left(\frac{0}{0} \right) \end{aligned}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(x+1)e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x + (x+1)e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x (1 + (x+1))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

رابعاً - حالات عدم التعيين 0^0 , ∞^0 , 1^∞
باستخدام الدالة اللوغاريتمية تحول جميع هذه الحالات إلى صيغة عدم التعيين $0 \cdot \infty$

مثال : أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad (0^0)$$

$$y = x^x \text{ ضع}$$

$$\ln |y| = \ln |x^x| = x \ln |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln |y| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln |x| \quad (0 \cdot -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |x|}{x^{-1}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |x|}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \quad (\infty^0)$$

$$y = (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \text{ ضع}$$

$$\ln |y| = \ln \left| (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \right| = \frac{1}{x} \ln |1 + e^{2x}| = \frac{\ln |1 + e^{2x}|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |y| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |1 + e^{2x}|}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |1 + e^{2x}|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad (1^\infty)$$

$$y = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad \text{ضع}$$

$$\ln |y| = \ln \left| \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \right| = x \ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |y| = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right| \quad (\infty \cdot 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-\frac{3}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{1 + 0} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

تمارين 1.6

احسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - e^x}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x^2 + \sin x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^2 + e^{2x}}{2 + x + e^{3x}}$

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right)$

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 5^{-x}$

(11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

(13) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

(15) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\cot x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{x^3}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \ln x}{e^{2x}}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right)$

(10) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[1 - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right]$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$

(14) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{\frac{3}{x}}$

(16) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{x-1}}$

2.6 التكاملات المعتلة

أولاً - حالة الفترة غير المحدودة :

(1) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, \infty)$. نعرف التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $(-\infty, b]$. نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

$$\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t (x-1)^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(x-1)} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{t-1} - \frac{-1}{2-1} \right] = (0+1) = 1 \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln|x-1|]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln|t-1| - \ln(1)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|t-1| = \infty \end{aligned}$$

التكامل المعتل متباعد

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{2x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_t^0 e^{2x} (2) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^0}{2} - \frac{e^{2t}}{2} \right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+9} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{x^2+9} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{x^2+3^2} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+3^2} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_s^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_0^t \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{0}{3} \right) - \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{s}{3} \right) \right] \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{t}{3} \right) - \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{0}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

باب 6. صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة

$$= \left[0 - \frac{1}{3} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right) - 0 \right] = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

ثانياً - حالة الدالة غير المحدودة

(1) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $(a, b]$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ماعدا عند $c \in (a, b)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x) dx \text{ كالتالي :}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\text{لاحظ أن } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \infty$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(- \int_0^t (2-x)^{-\frac{1}{2}} (-1) dx \right) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(- \left[\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^t \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(-2 \left[(2-t)^{\frac{1}{2}} - (2-0)^{\frac{1}{2}} \right] \right) = -2[0 - \sqrt{2}] = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_3^4 \frac{1}{x-3} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty \text{ لاحظ أن}$$

$$\begin{aligned}
&\int_3^4 \frac{1}{x-3} dx = \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_t^4 \frac{1}{x-3} dx = \lim_{t \rightarrow 3^+} [\ln|x-3|]_t^4 \\
&= \lim_{t \rightarrow 3^+} [\ln(1) - \ln|t-3|] = \lim_{t \rightarrow 3^+} [0 - \ln|t-3|] = -(-\infty) = \infty
\end{aligned}$$

التكامل المعتل متباعد

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \infty \text{ لاحظ أن}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t (x-1)^{-\frac{1}{3}} dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^3 (x-1)^{-\frac{1}{3}} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\frac{3}{2} (x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_0^t + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{2} (x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_s^3 \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\frac{3}{2} (t-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} (0-1)^{\frac{2}{3}} \right] + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{2} (3-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} (t-1)^{\frac{2}{3}} \right] \\
&= \left[\frac{3}{2} (0) - \frac{3}{2} (1) \right] + \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{4} - \frac{3}{2} (0) \right] = \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \infty \text{ لاحظ أن}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 \int_t^1 \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2 + 1} dx \right) + \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 \int_1^s \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2 + 1} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{x})]_t^1 \right) + \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{x})]_1^s \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{1}) - \tan^{-1}(\sqrt{t})] \right) \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{s}) - \tan^{-1}(\sqrt{1})] \right) \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] + 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) + 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

تمارين 2.6

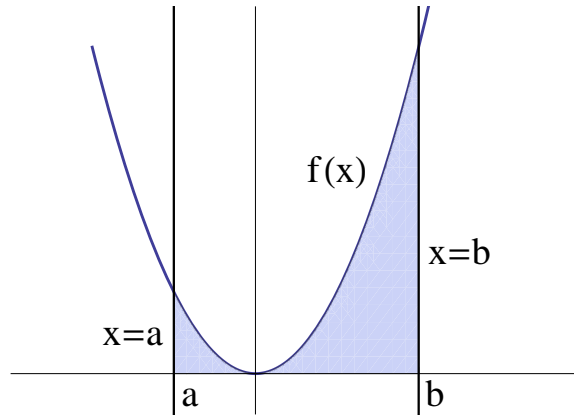
حدد ما إذا كانت التكاملات المعتلة التالية متقاربة أم متباعدة ؟ واحسب قيمتها في حالة التقارب :

- | | |
|--|--|
| (1) $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^4} dx$ | (2) $\int_5^{\infty} \frac{1}{x-3} dx$ |
| (3) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ | (4) $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ |
| (5) $\int_0^{\infty} e^x dx$ | (6) $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$ |
| (7) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ | (8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ |
| (9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ | (10) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ |
| (11) $\int_0^2 \frac{x}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx$ | (12) $\int_0^1 \ln x dx$ |
| (13) $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ | (14) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ |
| (15) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} dx$ | (16) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ |

باب 7

تطبيقات التكامل

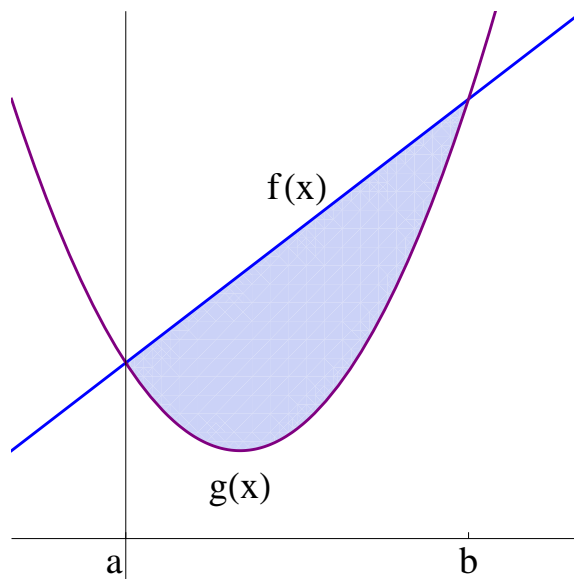
1.7 المساحات



إذا كانت f دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور السينات

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي



إذا كانت الدالتان f و g متقاطعتين عند $x = a$ و $x = b$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in (a, b)$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ هي $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $x = -1$ و $x = 2$ و $y = 0$

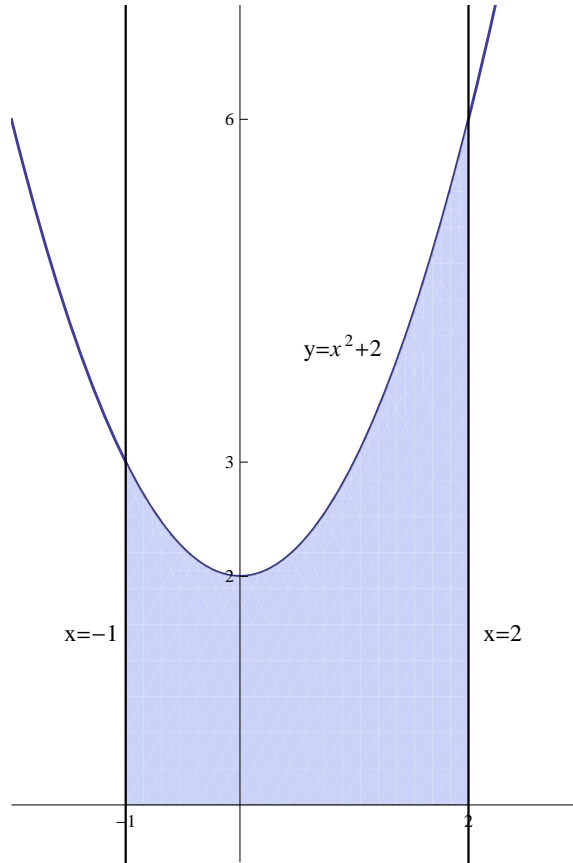
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1, 0)$

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x



$$A = \int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^2$$

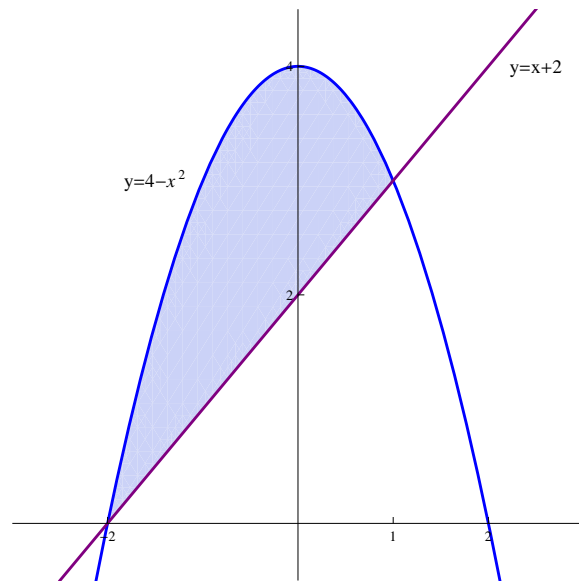
$$= \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2(2) \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right) \right] = \left[\left(\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{-1}{3} - 2 \right) \right] = \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 2 = 9$$

(2) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\implies x = -2, x = 1$$

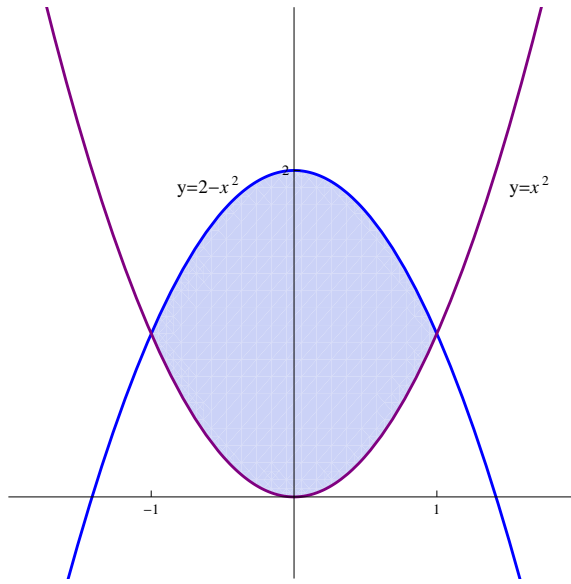
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(3) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$

الحل:

المنحنى $y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0$$

$$\implies (x - 1)(x + 1) = 0 \implies x = -1, x = 1$$

$$A = \int_{-1}^1 [(2 - x^2) - x^2] dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

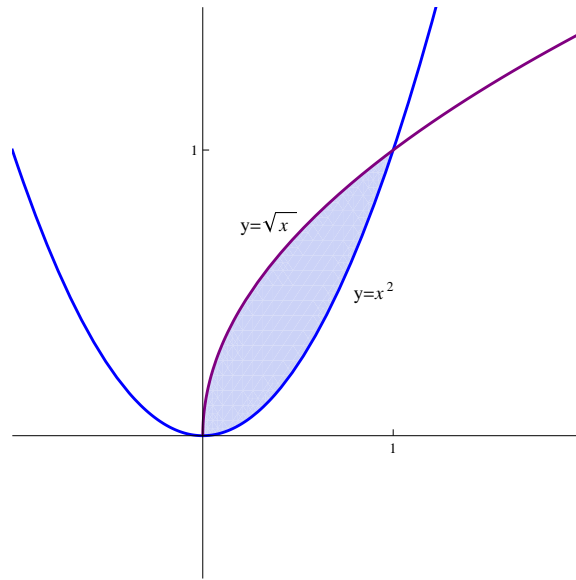
$$= \left[\left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) \right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}$$

(4) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي من القطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه النقطة $(0, 0)$ وفتحته لليمين



نقاط تقاطع المنحنيين $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0$$

$$\implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0, x = 1$$

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \int_0^1 [x^{\frac{1}{2}} - x^2] dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - (0 - 0) \right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

تمارين 1.7

احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية :

$$1. \quad y = x^2 + 1, y = 0, x = -2, x = 3$$

$$2. \quad y = e^x, y = 0, x = 0, x = 5$$

$$3. \quad y = \ln x, y = 0, x = 4$$

$$4. \quad y = 4 - x^2, y = 0$$

$$5. \quad y = x^2 + 1, y = 2$$

$$6. \quad y = 6 - x^2, y = 2$$

$$7. \quad y = x^2 + 3, y = 1, x = 0, x = 4$$

$$8. \quad y = 1 - x^2, y = 4, x = -1, x = 1$$

$$9. \quad y = x^2 + 2, y = x + 2$$

$$10. \quad y = x^2 + 1, y = 1 - x$$

$$11. \quad y = x^2 + 4, y = 4 - x, x = 4$$

$$12. \quad y = x^2 + 1, y = 1 - x^2, x = -1, x = 3$$

$$13. \quad y = x^2 - 3, y = 5 - x^2$$

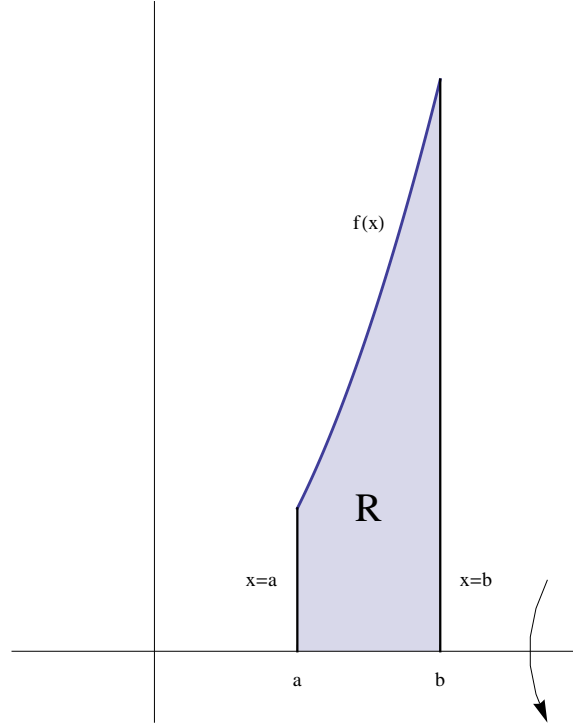
$$14. \quad y = 2x^2 + 1, y = x^2 + 5$$

$$15. \quad y = x^2, y = x^2 - 4x + 4, y = 0$$

$$16. \quad y = \sqrt{x-1} + 2, y = 2, y = 3, x = 0$$

2.7 حجوم أجسام الدوران

أولاً - الأقراص الأسطوانية :



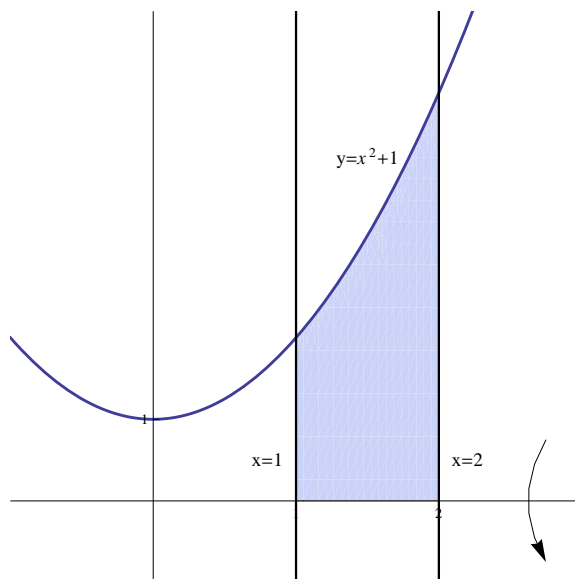
إذا كانت الدالة f موجبة ومتصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور x والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. ملاحظة : نستخدم طريقة الأقراص الأسطوانية عندما تكون منطقة الدوران R تلامس بالكامل محور الدوران .

مثال :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $x = 1$ و $x = 2$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

- المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .
- المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.
- المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.
- المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x \right]_1^2 = \pi \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) \right] \\
 &= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 1 \right] = \pi \left(\frac{31}{5} + \frac{14}{3} + 1 \right) \\
 &= \left(\frac{93 + 70 + 15}{15} \right) \pi = \frac{178}{15} \pi
 \end{aligned}$$

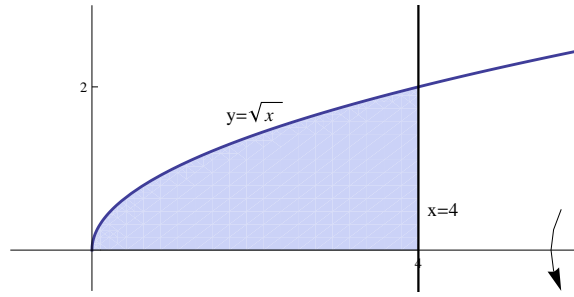
(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$ و $x = 4$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0, 0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $x = 4$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(4, 0)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراس الأسطوانية :

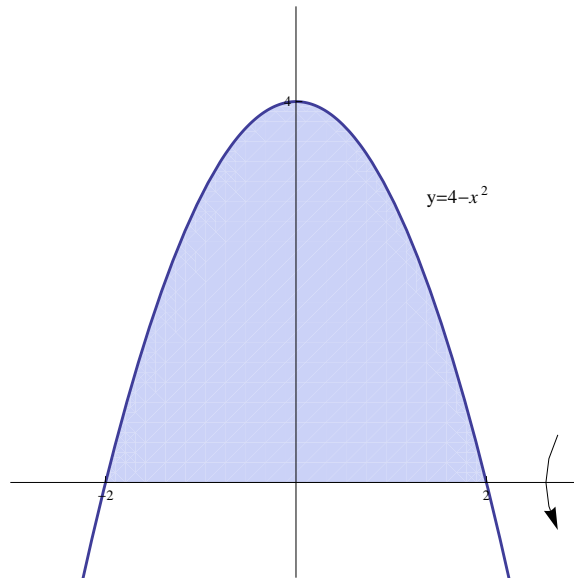
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2} \right) = 8\pi \end{aligned}$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = 4 - x^2$ مع $y = 0$:

$$4 - x^2 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = -2, x = 2$$

باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

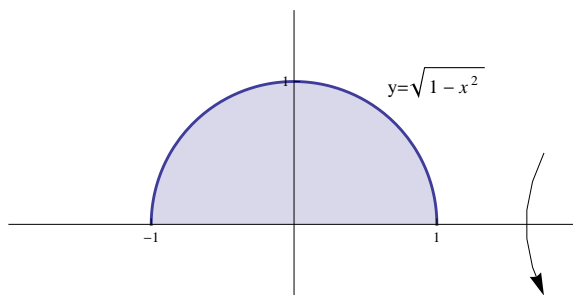
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \pi \left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) - \left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{5} \right) \right] \\ &= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \pi \left(64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5} \right) = \frac{512}{15} \pi \end{aligned}$$

(4) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = \sqrt{1-x^2}$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ يمثل النصف العلوي للدائرة $y^2 + x^2 = 1$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



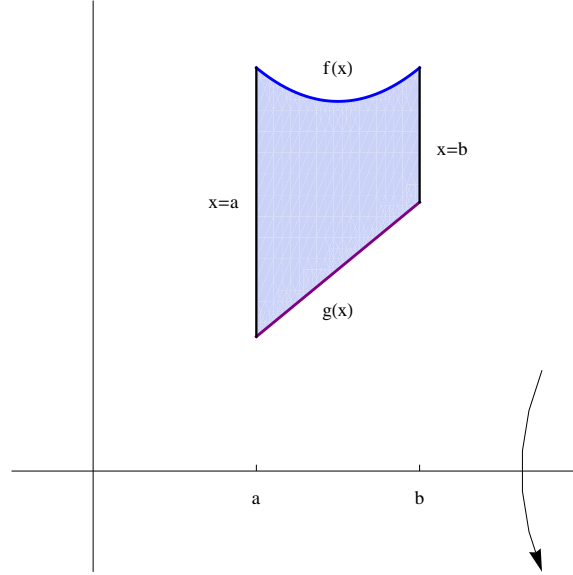
نقاط تقاطع المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ مع $y = 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} = 0 &\implies 1-x^2 = 0 \implies x^2 = 1 \\ &\implies x = -1, x = 1 \end{aligned}$$

باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

ثانياً - طريقة الوردات



إذا كانت f و g دالتين موجبتين ومتصلتين على الفترة $[a, b]$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in [a, b]$ ، وكانت R هي المنطقة المحصورة بالمنحنيات $f(x)$ و $g(x)$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول

$$\text{محور } x \text{ يساوي } V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

ملاحظة : نستخدم طريقة الوردات حينها لا تكون منطقة الدوران ملاصقة بالكامل لمحور الدوران .

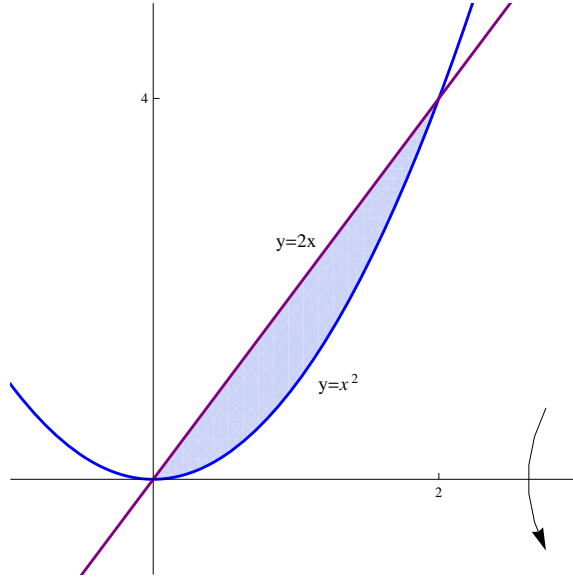
أمثلة :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويبر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2x$ و $y = x^2$:

$$\begin{aligned} x^2 = 2x &\implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0 \\ &\implies x = 0, x = 2 \end{aligned}$$

باستخدام طريقة الوردات:

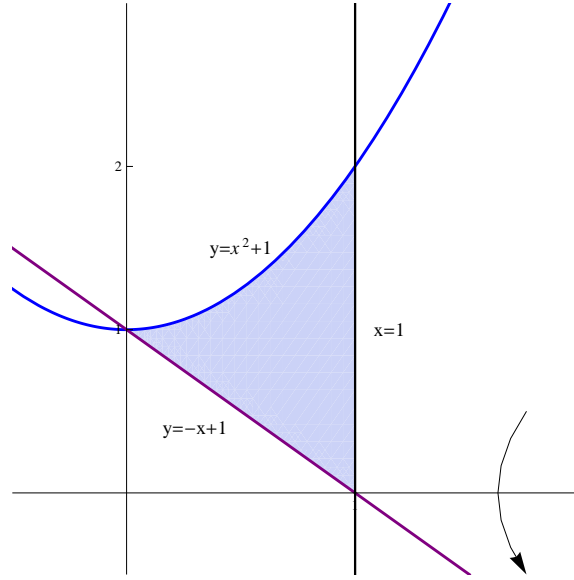
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5} \right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5} \right) \right] \\ &= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{64}{15}\pi \end{aligned}$$

(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $y = -x + 1$ و $x = 1$ حول محور x .

الحل:

المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى.

المنحنى $y = -x + 1$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0, 1)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنى $y = x^2 + 1$ مع المنحنى $y = -x + 1$:

$$x^2 + 1 = -x + 1 \implies x^2 + x = 0 \implies x(x + 1) = 0 \\ \implies x = -1, x = 0$$

نقطة تقاطع المستقيمين $y = -x + 1$ و $x = 1$ هي النقطة $(1, 0)$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 [(x^2 + 1)^2 - (-x + 1)^2] dx \\ = \pi \int_0^1 [(x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1)] dx \\ = \pi \int_0^1 (x^4 + x^2 + 2x) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 \\ = \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \right) - (0 + 0 + 0) \right] = \frac{23}{15} \pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $y = 1$ و $x = 1$ و $x = 0$ حول محور x .

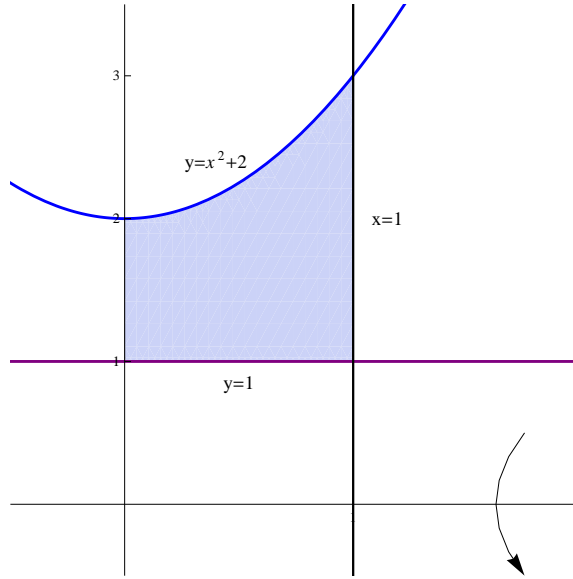
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, 1)$.

المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.

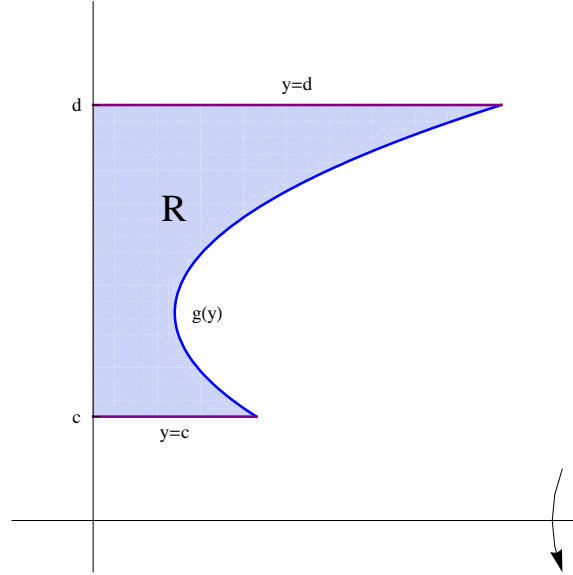
المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 [(x^2 + 2)^2 - (1)^2] dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4 - 1) dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 3) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 + 3x \right]_0^1 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 3 \right) - (0 + 0 + 0) \right] = \frac{68}{15}\pi
 \end{aligned}$$

ثالثاً - طريقة الشرائح الأسطوانية :



إذا كانت الدالة $g(y)$ دالة موجبة وملتصدة على الفترة $[c, d]$ و كانت R هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=c$ و $y=d$ و

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y) dy$$

تساوي حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x

أمثلة :

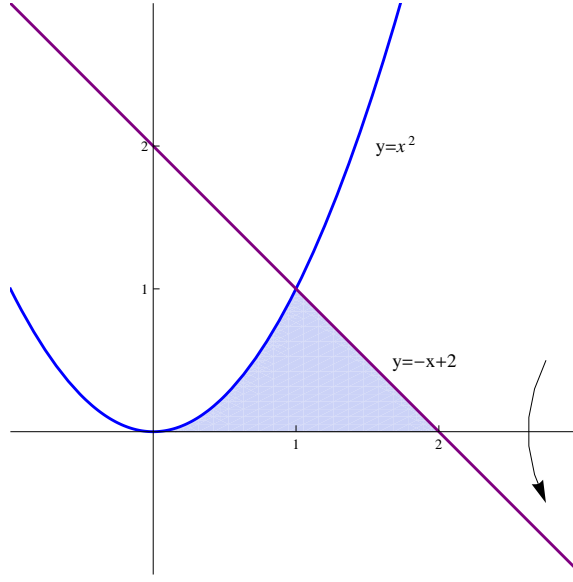
(1) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = -x + 2$ و $y = 0$ ، حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = -x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0, 2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحني $y = x^2$ مع $y = -x + 2$:

$$x^2 = -x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\implies x = -2, x = 1 \implies y = 4, y = 1$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية:

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = -x + 2 \implies x = -y + 2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y [(-y + 2) - \sqrt{y}] dy = 2\pi \int_0^1 y \left(-y - y^{\frac{1}{2}} + 2\right) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(-y^2 - y^{\frac{3}{2}} + 2y\right) dy = 2\pi \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + y^2\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + 1\right) - (0 - 0 + 0)\right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{-5 - 6 + 15}{15}\right) = 2\pi \left(\frac{4}{15}\right) = \frac{8\pi}{15}$$

(2) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x-1}$ و $y = 2$ و $y = 0$ و $x = 0$ ، حول محور x .

الحل:

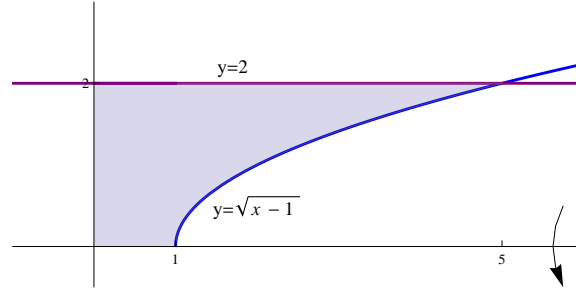
المنحني $y = \sqrt{x-1}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2 + 1$ الذي رأسه $(1, 0)$ وفتحته لليمين.

باب 7. تطبيقات التكامل

المنحنى $y = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويبرر بالنقطة $(0, 2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .

المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = \sqrt{x-1} \implies y^2 = x-1 \implies x = y^2 + 1$$

$$V = 2\pi \int_0^2 y (y^2 + 1) dy = 2\pi \int_0^2 (y^3 + y) dy = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right]_0^2$$

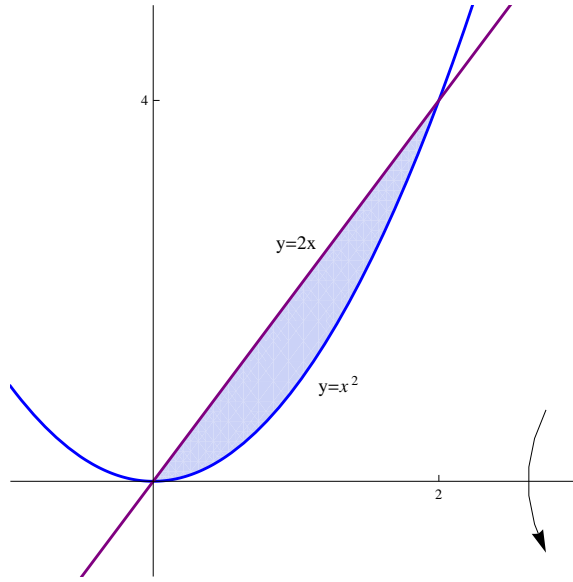
$$= 2\pi \left[\left(\frac{16}{4} + \frac{4}{2} \right) - (0 + 0) \right] = 2\pi (4 + 2) = 12\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويبرر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2x$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0$$

$$\implies x = 0, x = 2 \implies y = 0, y = 4$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية:

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = 2x \implies x = \frac{1}{2}y$$

$$V = 2\pi \int_0^4 y \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y \right) dy = 2\pi \int_0^4 \left(y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 2\pi \left[\left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{(4)^3}{6} \right) - (0 - 0) \right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{64}{5} - \frac{64}{6} \right) = 128\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{128}{30}\pi = \frac{64}{15}\pi$$

تمارين 2.7

احسب حجم الجسم الدوراني الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية حول محور x :

$$1. \quad y = x^2, y = 0, x = 2$$

$$2. \quad y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$$

$$3. \quad y = \sqrt{x-1}, y = 0, x = 5$$

$$4. \quad \text{حيث } r, h \in \mathbb{R}^+ \text{ (حجم المخروط) } , y = \frac{r}{h}x, y = 0, x = h$$

$$5. \quad y = -x^2 + 2x, y = 0$$

$$6. \quad y = x^2 + 1, y = 3x + 1$$

$$7. \quad y = 4 - x^2, y = 4 + x^2, x = 2$$

$$8. \quad y = 1 - x^2, y = 3, x = 0, x = 1$$

$$9. \quad y = x^2, y = 2 - x^2$$

$$10. \quad y = 4 - x^2, y = x + 4, x = 2$$

$$11. \quad y = x^2 + 1, y = 3x + 1$$

$$12. \quad y = x^2 - 4x + 4, y = x, y = 0$$

$$13. \quad y = \sqrt{x}, y = 1, y = 2, x = 0$$

$$14. \quad x = y^2 - 4y + 5, y = 1, y = 4, x = 0$$

3.7 طول القوس

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ فإن طول منحنى الدالة f من $x = a$ إلى $x = b$ يساوي $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

أمثلة :

$$(1) \text{ أحسب طول القوس للدالة } y = 1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \text{ من } x = 0 \text{ إلى } x = 3.$$

الحل :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \int_0^3 (1 + x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}(1 + 3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 0)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{16 - 2}{3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ أحسب طول القوس للدالة } y = \cosh x \text{ من } x = 0 \text{ إلى } x = \ln 2.$$

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x dx = [\sinh x]_0^{\ln 2} \\ &= \sinh(\ln 2) - \sinh(0) = \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

$$(3) \text{ أحسب طول القوس } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x \text{ من } x = 1 \text{ إلى } x = 2.$$

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}\right)} dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}} dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^2 \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right| dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \ln x\right]_1^2 = \left[\left(1 + \frac{1}{2} \ln 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 1\right)\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

(4) أحسب طول القوس للدالة $y = \sqrt{4 - x^2}$ من $x = -2$ إلى $x = 2$.

الحل :

$$\begin{aligned}
f(x) = \sqrt{4 - x^2} &\implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \\
L &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx \\
&= \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{(4 - x^2) + x^2}{4 - x^2}} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}} dx = 2 \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx \\
&= 2 \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^2 = 2 [\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)] = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi
\end{aligned}$$

تمارين 3.7

احسب طول القوس للدوال التالية على الفترات المعطاة :

$$1. \text{ على الفترة } [0, 8] \quad y = \pi + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

$$2. \text{ على الفترة } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad y = \ln |\sec x|$$

$$3. \text{ على الفترة } [0, 1] \quad y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$$

$$4. \text{ على الفترة } [0, 1] \quad y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$$

$$5. \text{ على الفترة } [1, 3] \quad y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

$$6. \text{ على الفترة } [1, 4] \quad y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x}$$

4.7 مساحة سطح الدوران

إذا كانت الدالة f موجبة وقابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران الدالة f من $x = a$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

إلى $x = b$ حول محور x تساوي

أمثلة :

(1) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \frac{1}{3}x^3$ ، $0 \leq x \leq 1$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \implies f'(x) = x^2$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1 + (x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} dx$$

$$= \frac{2\pi}{3} \frac{1}{4} \int_0^1 (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} (4x^3) dx = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{3}(1 + x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{3}(1 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 0)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{8} - 1)$$

(2) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ ، $1 \leq x \leq 4$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x + 1}{4x}} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \frac{\sqrt{4x + 1}}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4x + 1} dx = \pi \int_1^4 (4x + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \pi \frac{1}{4} \int_1^4 (4x + 1)^{\frac{1}{2}} (4) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}(4x + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}(17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{6} \left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}} \right]$$

(3) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{9 - x^2}$ ، $-3 \leq x \leq 3$ حول محور x .

الحل :

$$\begin{aligned}
 f(x) = \sqrt{9-x^2} &\implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\
 S &= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2} dx \\
 &= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9-x^2}} dx \\
 &= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{\frac{(9-x^2)+x^2}{9-x^2}} dx = 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{\frac{9}{9-x^2}} dx \\
 &= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dx = 6\pi \int_{-3}^3 1 dx \\
 &= 6\pi [x]_{-3}^3 = 6\pi[3 - (-3)] = 6\pi(6) = 36\pi
 \end{aligned}$$

تمارين 4.7

احسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنيات التالية حول محور x على الفترات المعطاة :

$$1. \quad y = \frac{1}{3} (3\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}) \text{ على الفترة } [1, 3]$$

$$2. \quad y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \text{ على الفترة } [1, 2]$$

$$3. \quad y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2} \text{ على الفترة } [1, 3]$$

$$4. \quad y = r \text{ على الفترة } [0, h] , \text{ حيث } r, h \in \mathbb{R}^+ \text{ (المساحة الجانبية للأسطوانة)}$$

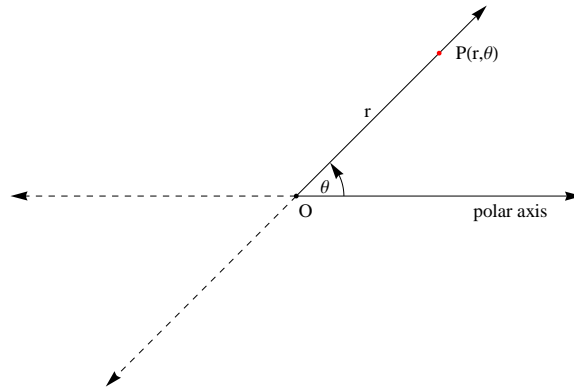
$$5. \quad y = \frac{r}{h}x \text{ على الفترة } [0, h] , \text{ حيث } r, h \in \mathbb{R}^+ \text{ (المساحة الجانبية للمخروط)}$$

باب 8

الإحداثيات القطبية

1.8 الإحداثيات القطبية

تمثل أي نقطة في المستوى الديكارتي بواسطة الزوج المرتب (a, b) حيث a يرمز للإحداثي x بينما يرمز b للإحداثي y . يمكن تمثيل أي نقطة بطريقة أخرى تسمى الإحداثيات القطبية. يتكون المستوى القطبي من القطب والمحور القطبي. القطب هو نقطة الأصل في المستوى الديكارتي، والمحور القطبي هو محور x في المستوى الديكارتي. إذا كانت P أي نقطة في المستوى نحرك المحور القطبي في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) حتى نصل إلى النقطة P نرسم للمسافة بين P والقطب بالرمز r ، ونرمز للزاوية التي يصنعها المحور بعد تحريكه حتى نصل إلى P بالرمز θ ، نسمي الزوج المرتب (r, θ) بالتمثيل القطبي للنقطة P .



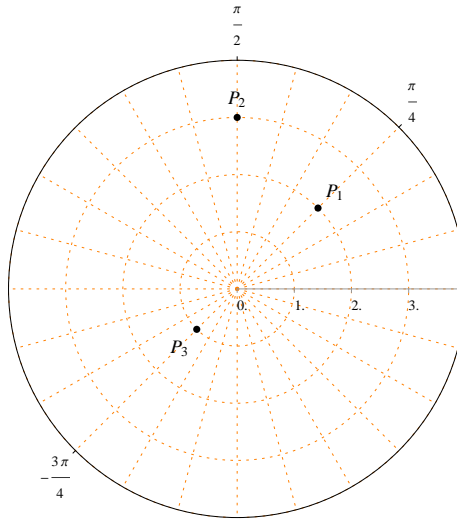
ملاحظات :

- في التمثيل القطبي لنقاط المستوى نستخدم القياس الدائري للزوايا .
 - التمثيل القطبي لنقطة الأصل أو القطب هو $(0, \theta)$ لأي زاوية θ .
 - التمثيل القطبي لأي نقطة ليس وحيداً .
- الإحداثيات القطبية $(-2, -\frac{3\pi}{4})$, $(-2, \frac{5\pi}{4})$, $(2, \frac{\pi}{4})$ تمثل نفس النقطة في المستوى .

مثال : أرسم النقاط التالية

$$P_1 \left(2, \frac{\pi}{4} \right) , P_2 \left(3, \frac{\pi}{2} \right) , P_3 \left(1, -\frac{3\pi}{4} \right)$$

الحل :

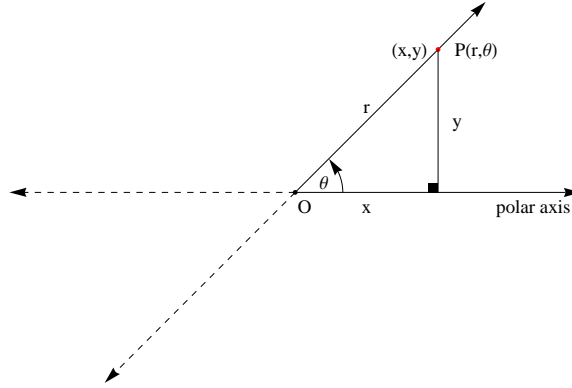


تمارين 1.8

حدد النقاط التالية في المستوى القطبي :

- | | | | |
|--|---------------------------------------|--|--|
| (1) $(3, 0)$ | (2) $(-2, 0)$ | (3) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ | (4) $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| (5) $(2, \pi)$ | (6) $(-1, \pi)$ | (7) $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ | (8) $\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$ |
| (9) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ | (10) $\left(-1, \frac{\pi}{6}\right)$ | (11) $\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$ | (12) $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ |
| (13) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ | (14) $\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$ | (15) $\left(1, -\frac{\pi}{6}\right)$ | (16) $\left(-2, -\frac{\pi}{6}\right)$ |
| (17) $\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$ | (18) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$ | (19) $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ | (20) $(-3, -\pi)$ |

2.8 العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية



- إذا كان (x, y) هو التمثيل الديكارتية للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات القطبية للنقطة P من العلاقتين :

$$r^2 = x^2 + y^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \implies \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

- إذا كان (r, θ) هو التمثيل القطبي للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات الديكارتية للنقطة P من العلاقتين :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \implies x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \implies y = r \sin \theta$$

مثال :

(1) أوجد الإحداثيات القطبية للنقطة التي إحداثياتها الديكارتية هي $(1, \sqrt{3})$

الحل :

$$x = 1, y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

2.8 . العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \implies \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

الإحداثيات القطبية هي $(2, \frac{\pi}{3})$

(2) أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة التي إحداثياتها القطبية هي $(2, \frac{3\pi}{4})$

الحل :

$$r = 2, \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الإحداثيات الديكارتية هي $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

مثال :

(1) حول المعادلة القطبية $r = 3 \sec \theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 3 \sec \theta \implies r = \frac{3}{\cos \theta} \implies r \cos \theta = 3 \implies x = 3$$

المعادلة الديكارتية $x = 3$ تمثل خط عمودي .

(2) حول المعادلة القطبية $r = 2$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2 \implies r^2 = 4 \implies x^2 + y^2 = 4$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + y^2 = 4$ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .

(3) حول المعادلة القطبية $r = 2 \sin \theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2 \sin \theta \implies r^2 = 2(r \sin \theta) \implies x^2 + y^2 = 2y$$

$$\implies x^2 + y^2 - 2y = 0 \implies x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 1 \implies x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(0, 1)$ ونصف قطرها 1 .

تمارين 2.8

1. حول النقاط التالية من الإحداثيات الديكارتية (الكارتيزية) إلى الإحداثيات القطبية :

$$\begin{array}{llll} (i) (x, y) = (2, 2) & (ii) (x, y) = (\sqrt{3}, 1) & (iii) (x, y) = (1, \sqrt{3}) & (iv) (x, y) = (-1, 1) \\ (v) (x, y) = (5, 0) & (vi) (x, y) = (0, 3) & (vii) (x, y) = (0, -2) & (viii) (x, y) = (-1, 0) \end{array}$$

2. حول النقاط التالية من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية (الكارتيزية) :

$$\begin{array}{lll} (i) (r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right) & (ii) (r, \theta) = \left(3, \frac{\pi}{4}\right) & (iii) (r, \theta) = \left(1, -\frac{\pi}{4}\right) \\ (iv) (r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right) & (v) (r, \theta) = \left(-2, -\frac{\pi}{2}\right) & (vi) (r, \theta) = \left(3, \frac{\pi}{2}\right) \\ (vii) (r, \theta) = \left(1, \frac{3\pi}{4}\right) & (viii) (r, \theta) = \left(2, -\frac{3\pi}{3}\right) & \end{array}$$

3. حول المعادلات الديكارتية التالية إلى معادلات قطبية :

$$\begin{array}{llll} (i) y = \sqrt{3}x & (ii) y = 2 & (iii) x = -1 & (iv) x^2 + y^2 = 16 \\ (v) x^2 + y^2 = 6x & (vi) x^2 + y^2 = 2y & (vii) x^2 + y^2 = -4x & (viii) x^2 + y^2 = -8y \end{array}$$

4. حول المعادلات القطبية التالية إلى معادلات ديكارتية :

$$\begin{array}{llll} (i) \theta = \frac{\pi}{6} & (ii) r = -2 \sec \theta & (iii) r = 3 \csc \theta & (iv) r = 4 \\ (v) r = -2 & (vi) r = 2 \sin \theta & (vii) r = -4 \cos \theta & (viii) r = 6 \sin \theta + 8 \cos \theta \end{array}$$

3.8 المنحنيات القطبية

اختبار التناظر :

(1) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المحور القطبي إذا كان $r(\theta) = r(-\theta)$.(2) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كان $r(\theta) = -r(-\theta)$.(3) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول القطب إذا كان $r(\theta) = -r(\theta)$.

أولاً - الخطوط المستقيمة :

(1) الخط المستقيم المار بالقطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية للخط المستقيم المار بالقطب هي $\theta = \theta_0$.

$$\theta = \theta_0 \implies \tan(\theta) = \tan(\theta_0) \implies \frac{y}{x} = \tan(\theta_0) \implies y = \tan(\theta_0) x$$

 $\theta = \theta_0$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب ويميله $\tan(\theta_0)$.

(2) الخط المستقيم العمودي على المحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم العمودي على المحور القطبي هي $r = a \sec \theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$r = a \sec \theta = \frac{a}{\cos \theta} \implies r \cos \theta = a \implies x = a$$

 $r = a \sec \theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r, \theta) = (a, 0)$.

(3) الخط المستقيم الموازي للمحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم الموازي للمحور القطبي هي $r = a \csc \theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in (0, \pi)$.

$$r = a \csc \theta = \frac{a}{\sin \theta} \implies r \sin \theta = a \implies y = a$$

 $r = a \csc \theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r, \theta) = \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

مثال : حول المعادلات القطبية التالية إلى معادلات ديكارتية وارسمها :

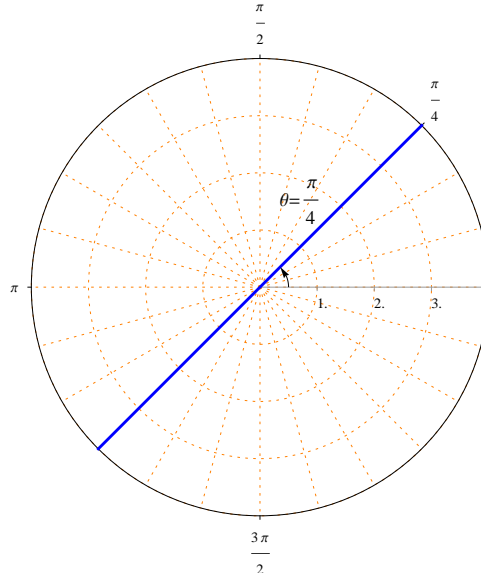
$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

الحل :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \implies \tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \frac{y}{x} = 1 \implies y = x$$

باب 8. الإحداثيات القطبية

المعادلة $\theta = \frac{\pi}{4}$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب وميله 1.

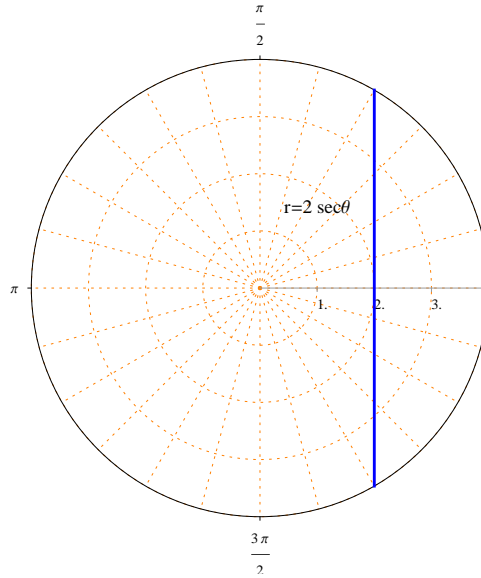


$$r = 2 \sec \theta \quad (2)$$

الحل :

$$r = 2 \sec \theta = \frac{2}{\cos \theta} \implies r \cos \theta = 2 \implies x = 2$$

المعادلة $r = 2 \sec \theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r, \theta) = (2, 0)$.

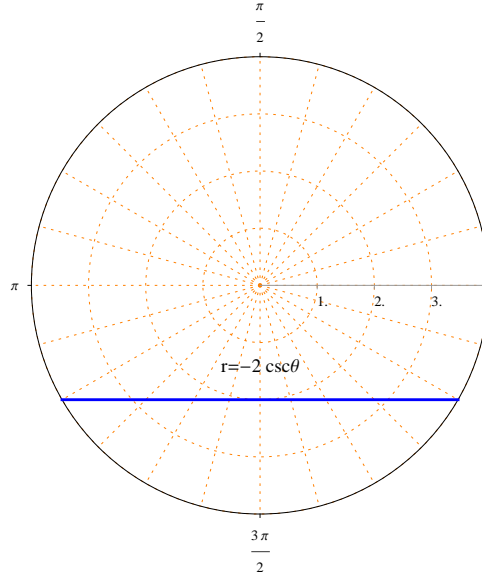


$$r = -2 \csc \theta \quad (3)$$

الحل :

$$r = -2 \csc \theta = \frac{-2}{\sin \theta} \implies r \sin \theta = 2 \implies y = -2$$

المعادلة $r = -2 \csc \theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r, \theta) = (-2, \frac{\pi}{2})$.



ثانياً - الدوائر

(1) الدوائر التي مركزها القطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية $r = a$ حيث $a \neq 0$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها $|a|$.

$$r = a \implies r^2 = a^2 \implies x^2 + y^2 = a^2$$

(2) الدوائر على الصورة $r = a \cos \theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$r = a \cos \theta \implies r^2 = a(r \cos \theta) \implies x^2 + y^2 = ax$$

$$\implies (x^2 - ax) + y^2 = 0 \implies \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a \cos \theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(\frac{a}{2}, 0)$ ونصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a \cos \theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a \cos \theta$ تقع على يمين الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a \cos \theta$ تقع على يسار الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(3) الدوائر على الصورة $r = a \sin \theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$r = a \sin \theta \implies r^2 = a(r \sin \theta) \implies x^2 + y^2 = ay$$

$$\implies x^2 + y^2 - ay = 0 \implies x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a \sin \theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2})$ و نصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a \sin \theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a \sin \theta$ تقع أعلى المحور القطبي .

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a \sin \theta$ تقع أسفل المحور القطبي .

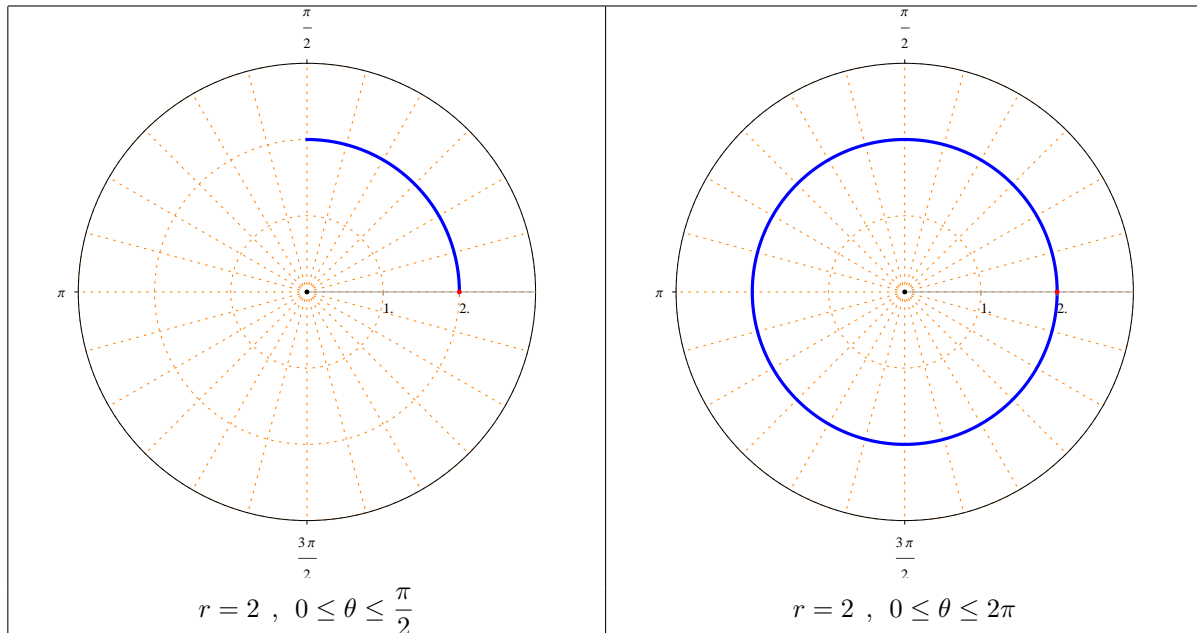
مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية :

$$r = 2 \quad (1)$$

الحل :

المعادلة $r = 2$ تمثل دائرة مركزها القطب و نصف قطرها 2 .

لاحظ أن نقطة البداية هي $(r, \theta) = (2, 0)$.



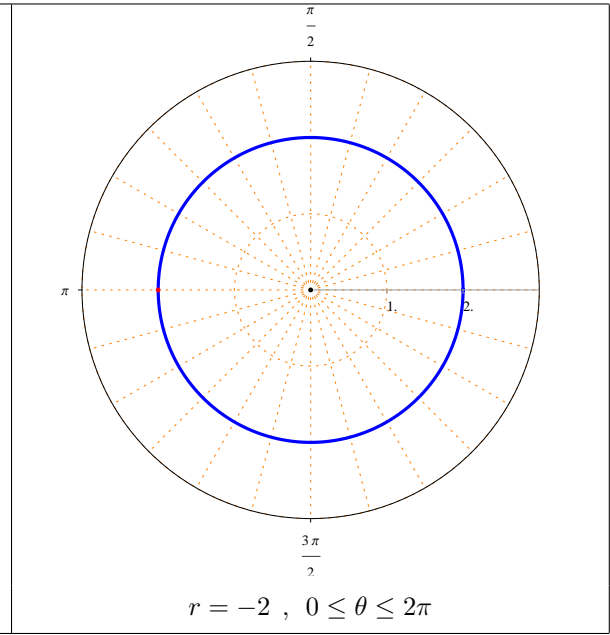
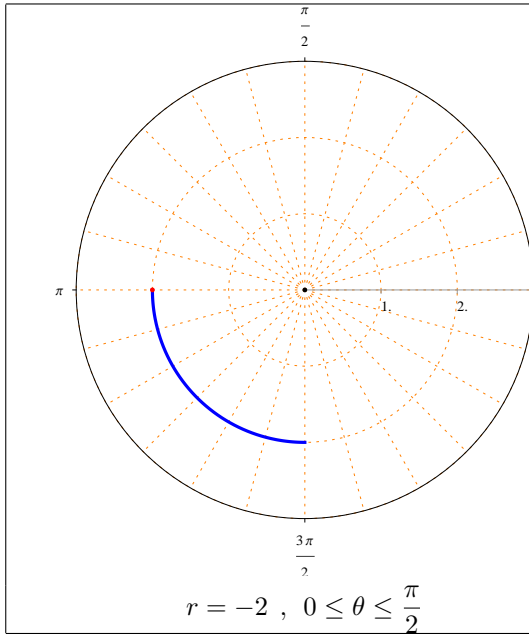
$$r = -2 \quad (2)$$

الحل :

المعادلة $r = -2$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.

لاحظ أن نقطة البداية هي $(r, \theta) = (-2, 0)$.

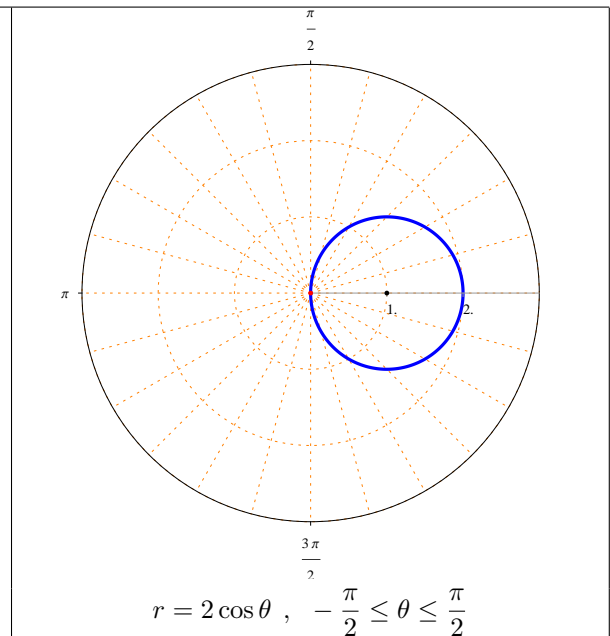
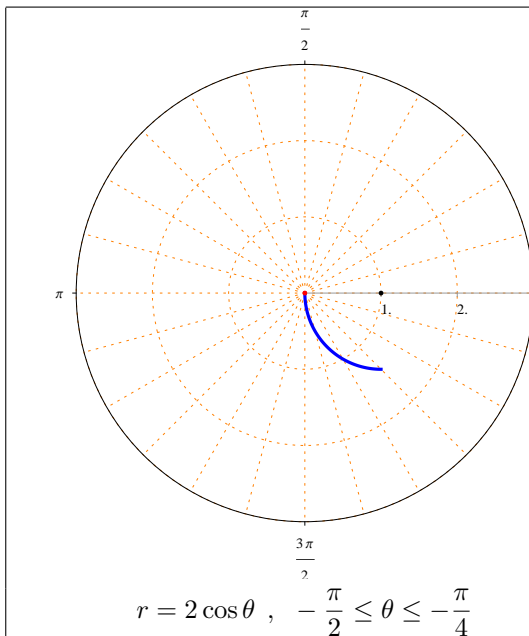
باب 8. الإحداثيات القطبية



$$r = 2 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

الحل :

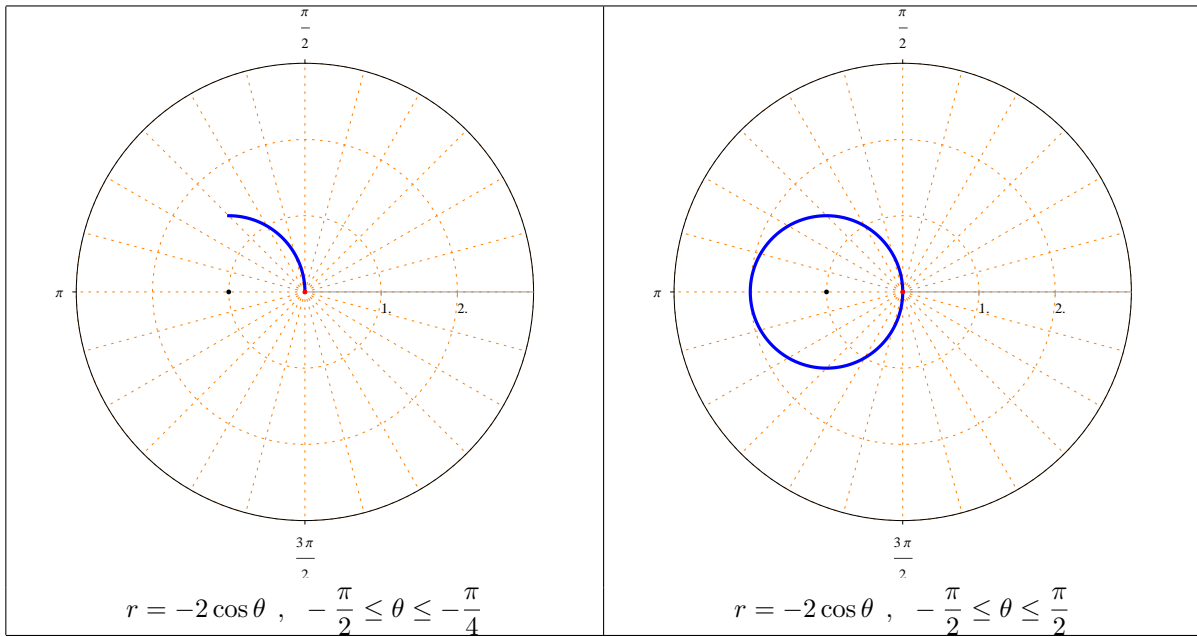
المعادلة $r = 2 \cos \theta$ تمثل دائرة مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها 1.



$$r = -2 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

الحل :

المعادلة $r = -2 \cos \theta$ تمثل دائرة مركزها $(r, \theta) = (-1, 0)$ ونصف قطرها 1.

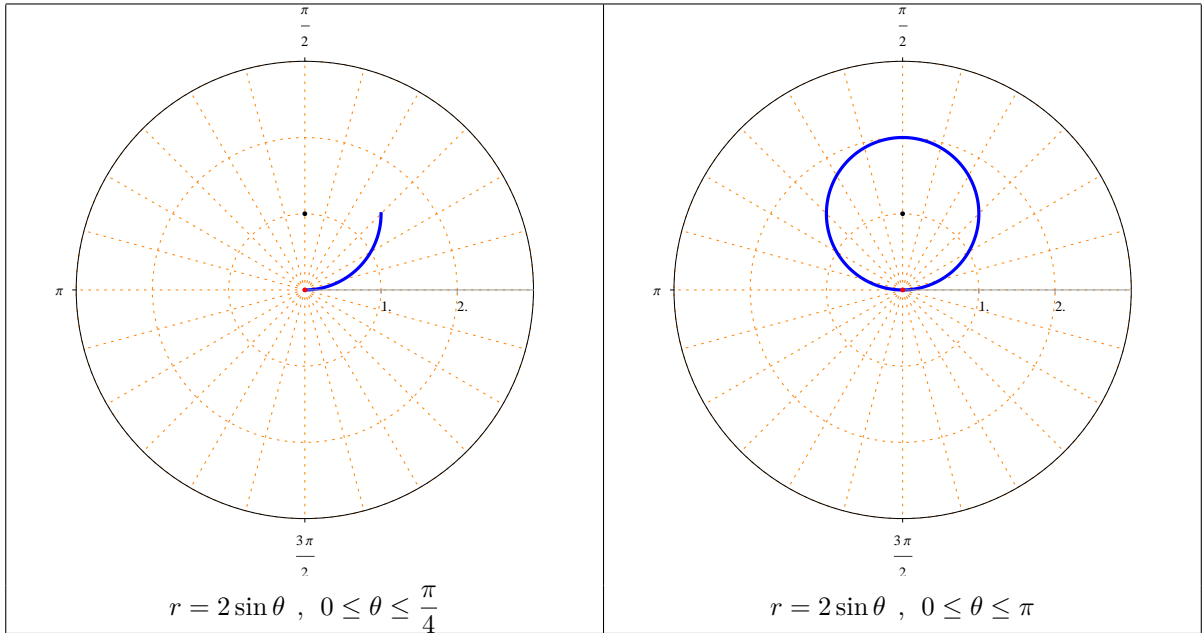


$$r = 2 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (5)$$

الحل :

المعادلة $r = 2 \sin \theta$ تمثل دائرة مركزها $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 1.

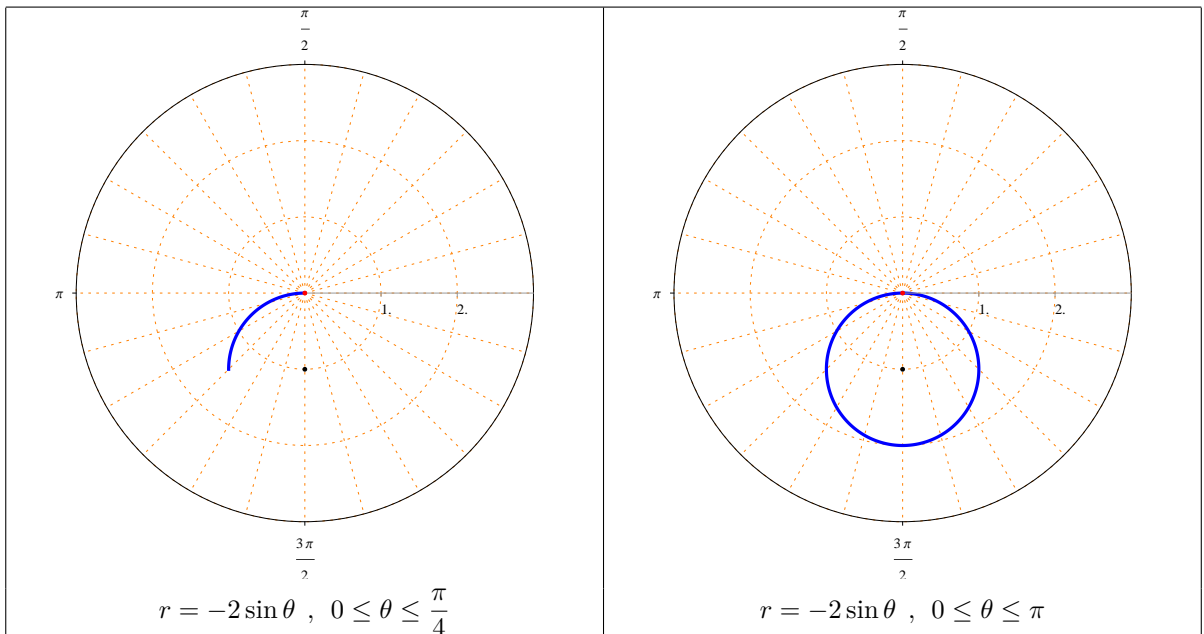
باب 8. الإحداثيات القطبية



$$r = -2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi \quad (6)$$

الحل:

المعادلة $r = -2 \sin \theta$ تمثل دائرة مركزها $(-1, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 1.



ثالثاً - المنحنيات القلبية :

(1) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \cos \theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

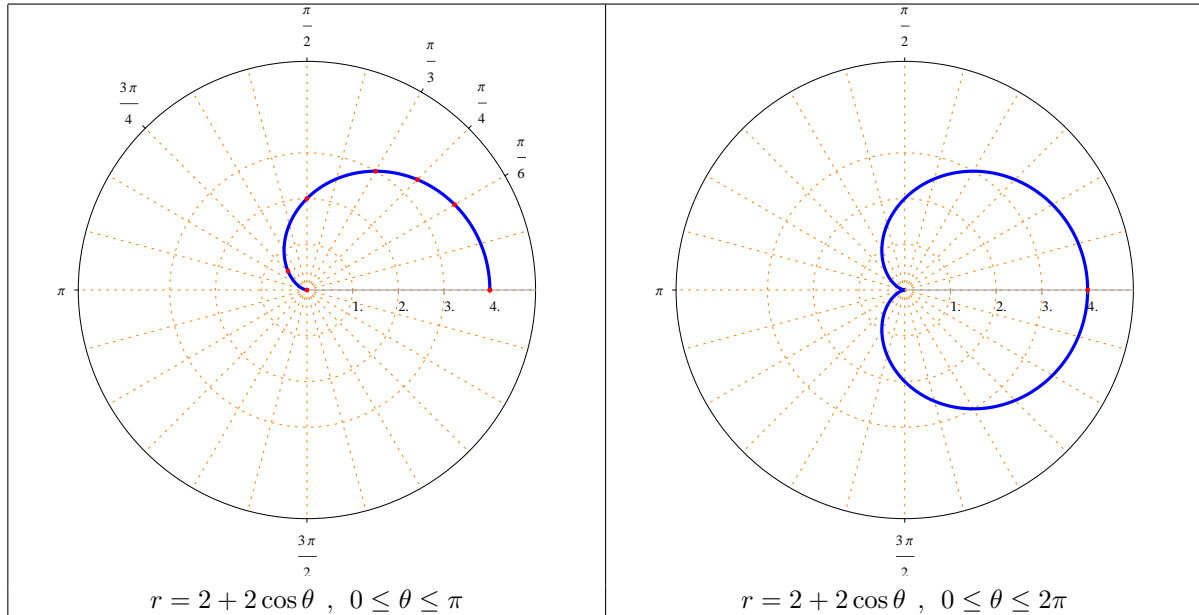
(2) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \sin \theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول الخط المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية

$$r = 2 + 2 \cos \theta \quad (1)$$

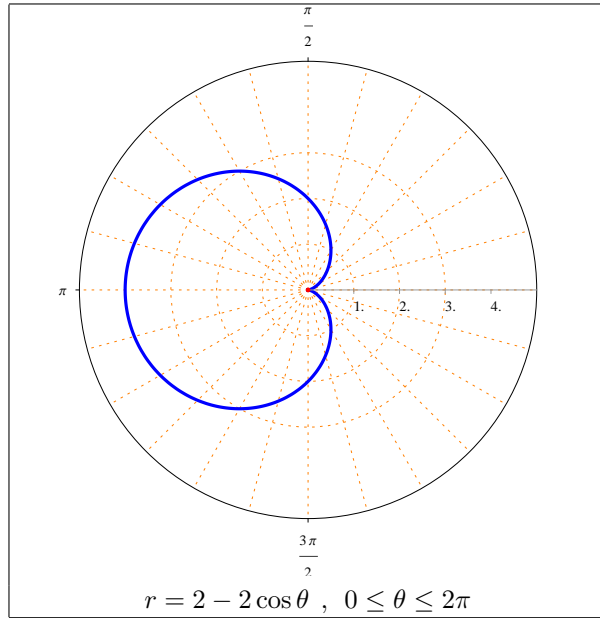
لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r(\theta)$	4	$2 + \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{2}$	3	2	$2 - \sqrt{2}$	0



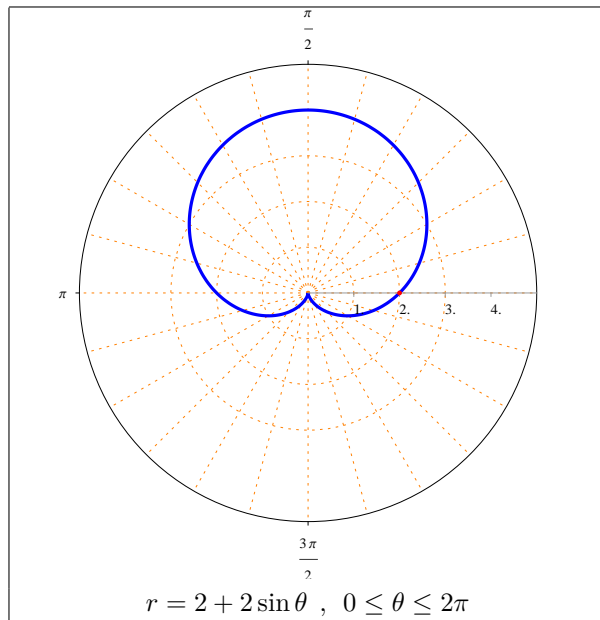
$$r = 2 - 2 \cos \theta \quad (2)$$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .



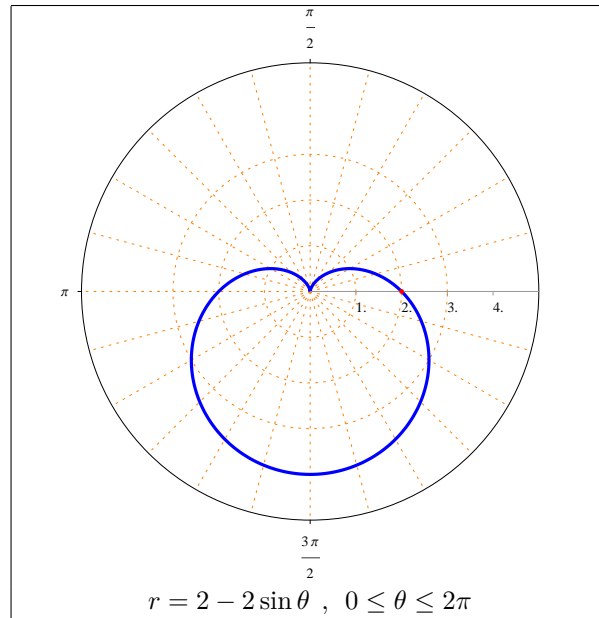
$$r = 2 + 2 \sin \theta \quad (3)$$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.



$$r = 2 - 2 \sin \theta \quad (4)$$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.



تمارين 3.8

حدد نوع المنحنى القطبي وارسمه فيما يلي :

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \text{ .1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ .2}$$

$$r = 3 \sec \theta \text{ .3}$$

$$r = -\csc \theta \text{ .4}$$

$$r = 4 \text{ .5}$$

$$r = -3 \text{ .6}$$

$$r = 2 \cos \theta \text{ .7}$$

$$r = -4 \cos \theta \text{ .8}$$

$$r = 6 \sin \theta \text{ .9}$$

$$r = -\sin \theta \text{ .10}$$

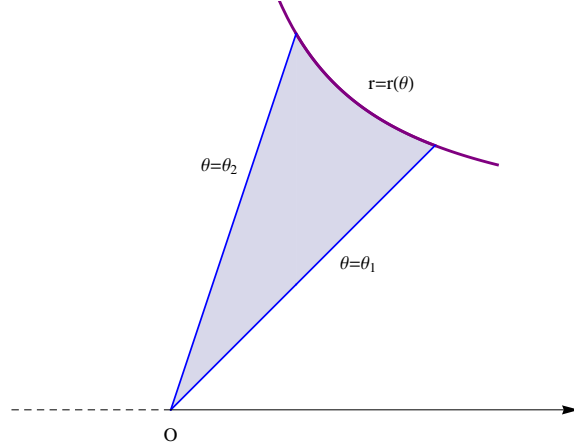
$$r = 2 + 2 \cos \theta \text{ .11}$$

$$r = 2 - 2 \cos \theta \text{ .12}$$

$$r = 1 + \sin \theta \text{ .13}$$

$$r = 1 - \sin \theta \text{ .14}$$

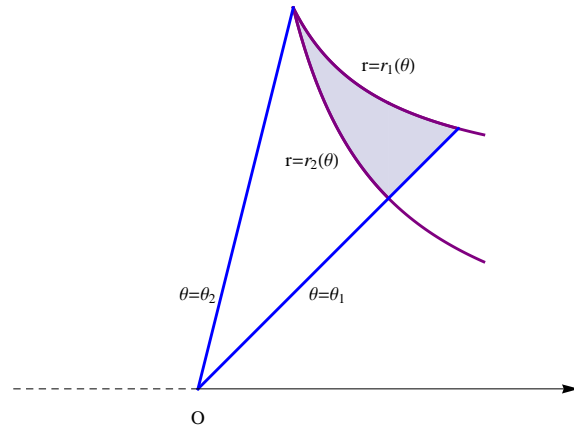
4.8 المساحات في الإحداثيات القطبية



إذا كانت الدالة $r = r(\theta)$ متصلة و موجبة فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $r(\theta)$ والمستقيمين $\theta = \theta_1$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [r(\theta)]^2 d\theta$$

و $\theta = \theta_2$ تساوي

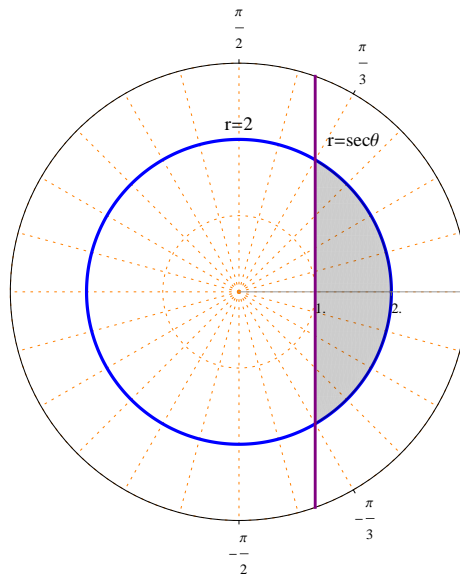


مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات القطبية $r_1(\theta)$ و $r_2(\theta)$ و $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ تساوي $A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ([r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2) d\theta$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2$ وإلى اليمين من المستقيم $r = \sec \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.المنحنى $r = \sec \theta$ يمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r, \theta) = (1, 0)$.نقاط تقاطع المنحنى $r = 2$ مع المنحنى $r = \sec \theta$:

$$\sec \theta = 2 \implies \frac{1}{\cos \theta} = 2 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

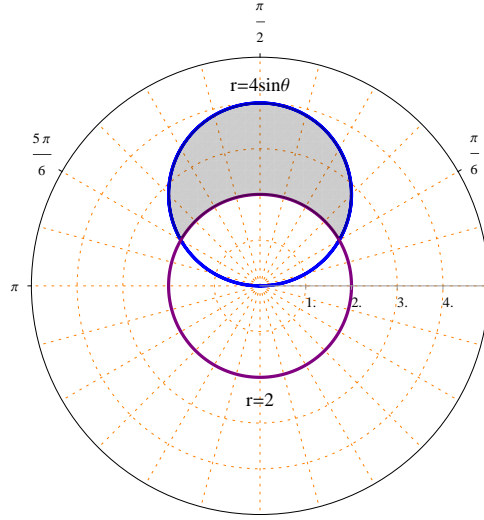
$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(2)^2 - (\sec \theta)^2] d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 - \sec^2 \theta) d\theta$$

$$= [4\theta - \tan \theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(4 \left(\frac{\pi}{3} \right) - \tan \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) - (4(0) - \tan(0)) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

(2) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.المنحنى $r = 4 \sin \theta$ يمثل دائرة مركزها $(2, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 2.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 4 \sin \theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$4 \sin \theta = 2 \implies \sin \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [(4 \sin \theta)^2 - (2)^2] d\theta \right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (16 \sin^2 \theta - 4) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[16 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) - 4 \right] d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8 \cos 2\theta - 4) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8 \cos 2\theta) d\theta = [4\theta - 4 \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[4 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 4 \sin \left(4 \frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[4 \left(\frac{\pi}{6} \right) - 4 \sin \left(2 \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= (2\pi - 4 \sin(2\pi)) - \left(\frac{2\pi}{3} - 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= 2\pi - 0 - \frac{2\pi}{3} + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

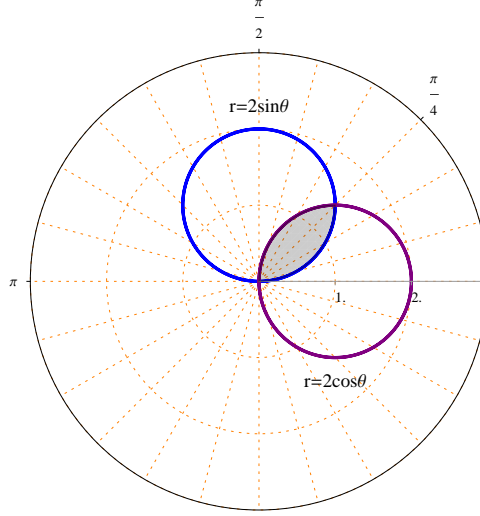
(3) أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين المنحنيين $r = 2 \sin \theta$ و $r = 2 \cos \theta$.

الحل :

باب 8. الإحداثيات القطبية

المنحنى $r = 2 \sin \theta$ يمثل دائرة مركزها $(1, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 1.

المنحنى $r = 2 \cos \theta$ يمثل دائرة مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها 1.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 \sin \theta$ مع المنحنى $r = 2 \cos \theta$:

$$2 \sin \theta = 2 \cos \theta \implies \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1 \implies \tan \theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \sin^2 \theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[4 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[4 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - 2 \cos 2\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2 \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} [2\theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} [2\theta + \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - (0 - 0) \right] + \frac{1}{2} \left[(\pi + 0) - \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \right]$$

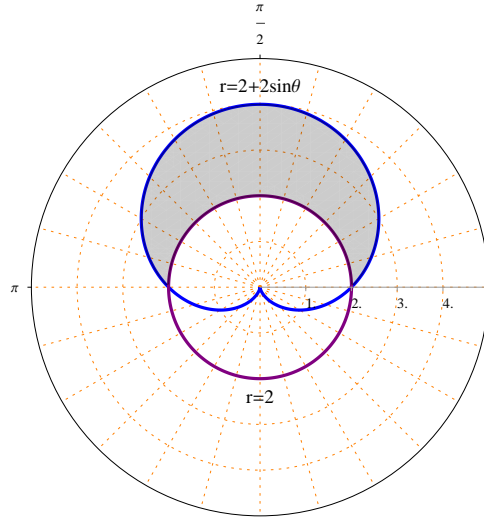
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

(4) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$2 + 2 \sin \theta = 2 \implies \sin \theta = 0 \implies \theta = 0, \theta = \pi$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

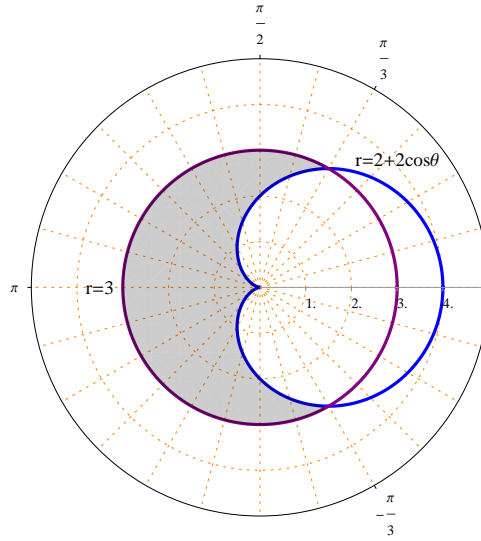
$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2 + 2 \sin \theta)^2 - (2)^2] d\theta \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 + 8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta - 4] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8 \sin \theta + 4 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 8 \sin \theta - 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= [2\theta - 8 \cos \theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 8 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(2 \frac{\pi}{2} \right) \right] - [2(0) - 8 \cos(0) - \sin(2(0))] \\ &= (\pi - 0 - 0) - (0 - 8 - 0) = 8 + \pi \end{aligned}$$

(5) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3$ وخارج المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2 \cos \theta = 3 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} [(3)^2 - (2 + 2 \cos \theta)^2] d\theta \right) \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} [9 - (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta)] d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} \left[5 - 8 \cos \theta - 4 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} (3 - 8 \cos \theta - 2 \cos 2\theta) d\theta = [3\theta - 8 \sin \theta - \sin 2\theta]_{\pi/3}^{\pi} \\ &= [3(\pi) - 8 \sin(\pi) - \sin(2\pi)] - \left[3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 8 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

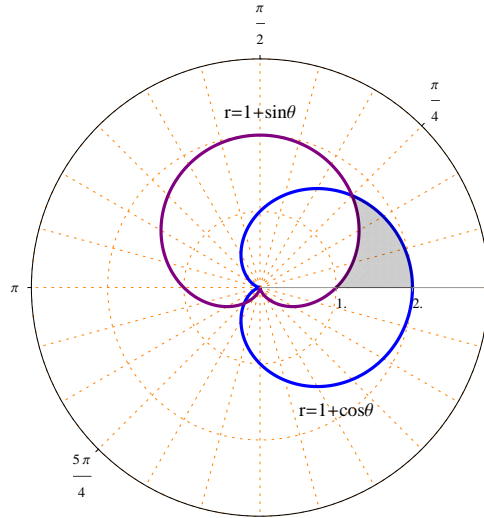
$$\begin{aligned}
&= [3\pi - 8(0) - (0)] - \left[\pi - 8 \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \right] \\
&= 3\pi - \pi + 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

(6) أحسب مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول و داخل المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 1 + \sin \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 1 + \sin \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ مع المنحنى $r = 1 + \sin \theta$:

$$1 + \cos \theta = 1 + \sin \theta \implies \cos \theta = \sin \theta \implies \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \cos \theta)^2 - (1 + \sin \theta)^2] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) - (1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta)] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 \cos \theta - 2 \sin \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta] d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 \cos \theta - 2 \sin \theta + \cos 2\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \sin \theta + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(2(0) + 2(1) + \frac{1}{2}(0) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - 0 - 2 - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = \sqrt{2} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

تمارين 4.8

1. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3$ وخارج المنحنى $r = 2$ ، ثم احسب مساحتها .
2. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2$ وأعلى من الخط $r = -\csc \theta$ ، ثم احسب مساحتها .
3. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4$ وخارج المنحنى $r = 4 \sin \theta$ ، ثم احسب مساحتها .
4. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4 \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 2 \cos \theta$ ، ثم احسب مساحتها .
5. ارسم المنطقة المشتركة بين المنحنيين $r = \sqrt{3} \cos \theta$ و $r = \sin \theta$ ، ثم احسب مساحتها .
6. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1$ وخارج المنحنى $r = 1 - \cos \theta$ ، ثم احسب مساحتها .
7. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ ، ثم احسب مساحتها .
8. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 1 + \sin \theta$ ، ثم احسب مساحتها .
9. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 1 - \cos \theta$ ، ثم احسب مساحتها .
10. ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 3 \cos \theta$ ، ثم احسب مساحتها .