السؤال 1 :

1. $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin(\frac{k\pi}{n})=\int_0^1 x^2\sin(\pi x)dx=\frac{\pi^2-4}{\pi^3}$.

2. (أ) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{\ln(1-x)}{x\sqrt{x}}=-1$ و $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\frac{\ln(1-x)}{x\sqrt{x}}=0$.
إذاً التكامل $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x\sqrt{x}}dx$ متقارب.

(ب) $\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{e^{\tan^{-1}x}}{\sqrt{x}(1+x^2)}=0$ و $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{e^{\tan^{-1}x}}{\sqrt{x}(1+x^2)}=1$
إذاً التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\tan^{-1}x}}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx$ متقارب.

(ج) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{2\tan^{-1}x-\pi}{\sqrt{x}}=-\pi$ و $\frac{2\tan^{-1}x-\pi}{\sqrt{x}}=\frac{-2\tan^{-1}(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$, $x\neq 0$.
$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2\tan^{-1}(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}=-2$.
إذاً التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{2\tan^{-1}x-\pi}{\sqrt{x}}dx$ متقارب.

السؤال 2 :

1. $\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{3}{2}}\frac{n}{(n+1)^2\ln^2 n}=0$.
إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{n}{(n+1)^2\ln^2 n}$ متقاربة.

2. $\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{3}{2}}\ln(1-\frac{1}{n^2})=0$.
إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 2}\ln(1-\frac{1}{n^2})$ متقاربة.

3. $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + (-1)^n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}(n^{\frac{3}{4}} + (-1)^n)}$. إذًا المتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + (-1)^n}$ و $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ متقاربتين.