حل الإختبار الفصلي الأول	الفصل الثاني 1442 هـ	تحليل 2 482 ريض

حل السؤال 1 :

1. $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{kt}{n}\right)=\int_0^1\sin(tx)dx=\frac{1-\cos(t)}{t}$ ، إذا كانت $t\neq 0$ و 0 إذا كانت $t=0$.

2. (ا) $\left|\frac{\sin x}{x(1+x)}\right|\leq\frac{1}{1+x}$ إذا كان $0\leq x\leq 1$، و $\left|\frac{\sin x}{x(1+x)}\right|\leq\frac{1}{x(1+x)}$ إذا كان $0\leq x\leq 1$. و بما أن $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$ و $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\ln 2$، فإن التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+x)}dx$ متقارب.

(ب)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}&=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\cos x)}\\&=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{x}+\frac{\sqrt{x}\sin x\cos x}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x}+\cos x)}\end{aligned}$$

و بما أن التكاملات $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ ، $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{x}dx$ و $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x\cos x}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x}+\cos x)}dx$ متقاربة، فإن التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}dx$ متقارب.

(ج) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\ln(1+\frac{1}{x})dx=\int_0^{+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\ln(1+\frac{1}{x})dx$ و بما أن $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\ln(1+\frac{1}{x})\leq\frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ فإن التكامل $\int_0^{+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\ln(1+\frac{1}{x})dx$ متقارب.

حل السؤال 2 :

1. $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}\frac{(\sqrt{n}+1)^3}{(n+2)^3}=1$ ، إذًا المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{(\sqrt{n}+1)^3}{(n+2)^3}$ متقاربة.

2. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$ إذًا المتسلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ غير متقاربة.

3. $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ إذًا المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln(1+\frac{1}{n})$ متقاربة.