حل الإختبار الفصلي الأول	الثلاثي الثالث 1444 هـ	481 ريض

السؤال 1 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln 2.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{2n}\frac{1}{n+j}=\frac{1}{2n}\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{2n}\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{j}{2n}}=\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{2}+x}=\ln 3$.

السؤال 2 :

1. بجوار 0 الدالة $\sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ محدودة. إذا التكامل متقارب.
بجوار $+\infty$ الدالة $\sin(\frac{1}{x})$ تناقصية ونهايتها 0 و $\left|\int_0^a \sin(x)dx\right|\leq 2$.
إذاً التكامل $\int_0^{+\infty}\sin(x)\sin(\frac{1}{x})dx$ مقارب.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x}(1+|\ln x|)}=+\infty$.
إذاً التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+|\ln x|)}$ غير متقارب.

السؤال 3 :

1. إذا كان $x\in(-2,0)$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=-1$.
إذا كان $x\in\mathbb{R}\setminus[-2,0]$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=1$.
$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(0)=0$.
إذاً مجال التقارب البسيط للمتتالية $(f_n)_n$ هو $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

2. إذا كان $a > 1$ فإن التقارب منتظم للمتتالية على أي فترة $[a, b]$.
كذلك إذا كان $a < -1$ فإن التقارب منتظم للمتتالية على أي فترة $[b, a]$.
إذا كان $-2 < a, b < 0$ فإن التقارب منتظم للمتتالية على أي فترة $[a, b]$.

السؤال 4 :

لتكن $f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha x(1-nx) & \text{if} \quad 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$، $\alpha \in \mathbb{R}$.
ادرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم للمتتالية $(f_n)_n$ حسب قيمة α على الفترة $[0, 1]$.
المتتالية متقاربة تقارب بسيط على الفترة $[0, 1]$.

- إذا كان $\alpha < -1$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ ، لكل $x \in \mathbb{R}_+$، و لكن $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(n^{-\alpha}) = -\infty$.

إذًا التقارب ليس منتظما على الفترة $[0, 1]$.

- إذا كان $\alpha = -1$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = -x^2$ ، لكل $x \ge 0$. إذًا التقارب ليس منتظما.
- إذا كان $\alpha > -1$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$ ، لكل $x > 0$.