السؤال 1 :

لتكن $f_n(x) = n^2x^3(1-x^2)^n$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

1. مجال التقارب البسيط للمتتالية $(f_n)_n$ هو $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. $\int_0^1 f_n(x)dx \overset{t=1-x^2}{=} \frac{1}{2}n^2 \int_0^1 t^n(1-t^2)dt = \frac{n^2}{2(n+1)(n+2)}$. و بما أن $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ على الفترة $[0,1]$ و $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq 0$ ، فإن المتتالية $(f_n)_n$ ليست متقاربة بانتظام على الفترة $[0,1]$.

3. $\lim_{n\to+\infty} f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(1-\frac{1}{n})^n = +\infty$. إذًا المتتالية (f_n) ليست متقاربة بانتظام بجوار 0.

السؤال 2 :

1. المتسلسلة متقاربة في 0 و المتسلسلة متقاربة مطلقا على $\mathbb{R}$.
التقارب منتظم على $\mathbb{R}$ باستعمال مبرهنة آبل.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} = x\frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x(1+x^2)}{2+x^2}$.

السؤال 3 :

شعاع تقارب المتسلسلة هو 1.

$$f(x) = \frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1+x}{1-x^3} = (1+x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}.$$

السؤال 4 :

1. فترة التقارب هي $[-1,1]$.

2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 2} f'_n(x)$ متقاربة على الفترة $(-1,1)$.
المتسلسلة $\sum_{n\geq 2} f''_n(x)$ متقاربة على الفترة $(-1,1)$.

3. $\sum_{n=2}^{+\infty} f''_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$.
$f'(x) = \ln(1+x)$ و $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

السؤال 5 :

لتكن $f_n(x) = \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ لكل $x \in]0,+\infty[$ و لتكن $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$

1. (ا) $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{n^x}$. $\sup_{x\in[a,b]} |f'_n(x)| = \frac{\ln^2 n}{n^a}$ و بما أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 11} \frac{\ln^2 n}{n^a}$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ تتقارب معياريا على الفترة مغلقة $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

(ب) بما أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ متقاربة على $]1,+\infty[$، فإن الدالة f قابلة للتفاضل باتصال (C^1) على الفترة $]1,+\infty[$.

2. (ا) بما أنّ المتسلسلة متناوبة و المتتالية $(\frac{1}{n^x})_n$ تناقصية و تتقارب بانتظام و نهايتها 0 على الفترة $]a,+\infty[$، $a>0$، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[a,+\infty[$، لكل $a>0$.

(ب) بما أن الدوال f_n، C^∞ فإن الدالة f قابلة للتفاضل باتصال (C^1) على الفترة $]0,+\infty[$.

3. $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k+1}\ln^k n}{n^x}$. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+k+1}\ln^k n}{n^x}$ تتقارب بانتظام على كل الفترة $[a,+\infty[$، لكل $a>0$. إذًا الدالة f قابلة للتفاضل ما لا نهائي (C^∞) على $]0,+\infty[$.