حل الإختبار الفصلي الثاني	الفصل الثاني 1442 هـ	تحليل 2 482 ريض

حل السؤال 1 :

1. $f_n(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{(-1)^n}{n}$ و بالتالي فإن المتتالية $(f_n(\frac{1}{\sqrt{2}}))_n$ متقاربة.

2. إذا كان $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن $|1-4x^2| \leq 1$ و $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. إذًا المتتالية $(f_n(\frac{1}{\sqrt{2}}))_n$ متقاربة.
إذا كانت $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن $|1-4x^2| > 1$ و بالتالي فإن المتتالية $(f_n)_n$ غير متقاربة.

3. في مجال التقارب $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ فإن $|f_n| \leq\leq \frac{1}{n}$ و بالتالي فإن المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام.

حل السؤال 2 :

1. إذا كان $|x| < 1$، فإن $|f_n(x)| \leq |x|^n$ و بالتالي فإن المتسلسلة : $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة.
إذا كان $|x| = 1$، فإن $|f_n(x)| = \frac{1}{2}$ و بالتالي فإن المتسلسلة : $\sum_{n\geq 1} f_n$ غير متقاربة.
بما أن $f_n(\frac{1}{x}) = f_n(x)$، فإن المتسلسلة : $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة إذا كان $|x| > 1$.

2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} g_n$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ لأن المتتالية $\frac{1}{x^2+n}$ تناقصية و تتقارب بانتظام نحو 0.

حل السؤال 3 :

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ تتقارب بانتظام على الفترة $[-1,1]$ لأن
المتتالية $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ تناقصية و تتقارب بانتظام نحو 0.

لتكن $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$، لكل $x \in [-1,1]$

أثبت أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق

2. الدوال $f_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ قابلة للإشتقاق باتصال على الفترة $]-1,1[$ و $f'_n(x) = (-1)^n x^{2n}$ و المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$ تتقارب بانتظام على كل فترة مغلقة في $]-1,1[$. و بالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $]-1,1[$ و $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3. $f(x) = \tan^{-1}(x)$ لكل $-1 \leq x \leq 1$.

4. باستعمال التكامل بالتجزيء $\int_0^1 \tan^{-1} x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. و $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.