مع الإجابة الكاملة

الاختبار الفصلي للمقرر ٢٢٥ ريض، الفصل الثالث للعام الدراسي ١٤٤٤ (٢٠٢٣)

<u>السؤال الأول (٤+٦):</u>

أ) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $\boldsymbol{y' = x - xy - y + 1}$ ، حيث $y \neq 1$. 4

ب) أوجد حل المسألة التالية: $\begin{cases}(x-2y)dx + (2x+y)dy = 0 \\ y(1) = 1\end{cases}$. حيث $x > 0$. 6

<u>السؤال الثاني (٥+٥):</u>

أ) برهن أن المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم أوجد حلها: 5

$$.(y^2 - 2xy + 6x)dx - (x^2 - 2xy + 2)dy = 0$$

ب) أوجد أكبر فترة I بحيث يكون للمسألة التفاضلية التالية حل وحيد: 5

$$.\begin{cases}x^2y'' + \frac{x}{\sqrt{2-x}}y' + \frac{4}{\sqrt{x}}y = 0 \\ y(1) = 0\ ,\ \ y'(1) = -2\end{cases}$$

<u>السؤال الثالث(٥+٥):</u>

أ) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. 5

ب) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$.\begin{cases}x^2y'' + xy' + y = 0 \\ y(1) = 1\ ,\ \ y'(1) = 2\end{cases}$$ 5

الحلول النموذجية لامتحان الفصلي لمقرر (٣٤٥ ريض)
الفصل الثالث للعام الدراسي ١٤٤٤ (٢٠٢٣ م)

السؤال الأول: أ) 4

$$y' = x - xy - y + 1\,; \quad y \neq 1$$

طريقة ① فصل المتغيرات

2 $$y' = x(1-y) + 1 - y$$
$$y' = (x+1)(1-y) \Rightarrow$$

2 $$\frac{dy}{1-y} = (x+1)\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y-1} + (x+1)\,dx = 0$$

1 $$\boxed{\ln|y-1| + \frac{x^2}{2} + x = c}\,, \quad y \neq 1$$

طريقة ②

$$y' = x + 1 - y(x+1)$$

$$y' + (x+1)y = x+1, \quad P(x) = x+1$$

$$\mu(x) = e^{\int (x+1)dx} = e^{\frac{x^2}{2} + x}$$

$$y\,e^{\frac{x^2}{2}+x} = \int e^{\frac{x^2}{2}+x}(x+1)\,dx = e^{\frac{x^2}{2}+x} + c$$

$$\boxed{y = 1 + c\,e^{-\frac{x^2}{2} - x}}\,, \quad c_1 \neq 0$$

ملاحظة

$$\ln|y-1| = -\frac{x^2}{2} - x + c$$

$$|y-1| = e^{-\frac{x^2}{2} - x + c}\,, \quad y - 1 = \mp e^{-\frac{x^2}{2} - x} \cdot e^{c}$$

أي أن الحل بالطريقة ① هو نفس حل الطريقة ② $$\boxed{y = 1 + c_1 e^{-\frac{x^2}{2} - x}}\,; \quad y \neq 1\,, \quad c_1 = \mp e^{c} \neq 0.$$

لاحظ أن $y = 1$ هو حل المعادلة التفاضلية أيضاً

وبالتالي $\boxed{y = 1 + c\,e^{-\frac{x^2}{2} - x} \text{ حل للمعادلة لكل } c \in \mathbb{R}}$

ب) 6

$$\begin{cases} (x-2y)\,dx + (2x+y)\,dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\left(1 - 2\frac{y}{x}\right)dx + \left(2 + \frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

2 $$\frac{y}{x} = u, \quad y = x \cdot u, \quad dy = x\,du + u\,dx$$

$$(1 - 2u)\,dx + (2+u)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$(1 - \cancel{2u} + \cancel{2u} + u^2)\,dx + x(2+u)\,du = 0$$

$$(1+u^2)\,dx + x(2+u)\,du = 0$$

(2) $$\int \frac{dx}{x} + \int \left[\frac{2}{1+u^2} + \frac{u}{1+u^2}\right] du = 0$$

$$\ln x + 2\tan^{-1}(u) + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = C$$

(1) $$\boxed{\ln x + 2\tan^{-1}(y/x) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2/x^2) = C}$$

وتحقيقاً للشرط الابتدائي $y(1)=1$ ، اذاً

$$\ln(1) + 2\tan^{-1}(1) + \frac{1}{2}\ln(2) = C$$

ومنه

(1) $$\boxed{C = \frac{\pi}{2} + \ln\sqrt{2}}$$

اذاً تكون دالة الحل للمعادلة التفاضلية هو المنحنى التالي

$$\boxed{F(x,y) = \ln x + 2\tan^{-1}(y/x) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2/x^2) - \frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2} = 0}$$

السؤال الثاني :

أ) (5)

$$(\underbrace{y^2-2xy+6x}_{M})\,dx - (\underbrace{x^2-2xy+2}_{N})\,dy = 0$$

(2) $$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y-2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x+2y$$

اذاً المعادلة التفاضلية تامة . اذاً توجد دالة F في x ، y وتحقق

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = y^2-2xy+6x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N = -x^2+2xy-2$$

(2) $$F(x,y) = \int (y^2-2xy+6x)\,dx = y^2x - x^2y + 3x^2 + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yx - x^2 + \phi'(y) = -x^2+2xy-2 \Rightarrow \phi(y) = -2y + C$$

اذاً فإن حل المعادلة التفاضلية هو (1)

$$\boxed{F(x,y) = y^2x - x^2y + 3x^2 - 2y + C = 0}$$

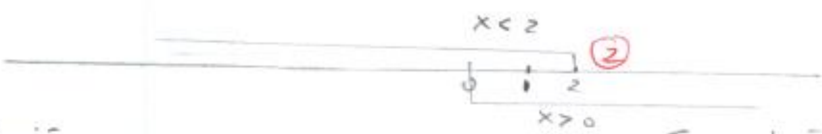
ب) (5)

$$\begin{cases} x^2y'' + \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}\,y' + \dfrac{4}{\sqrt{x}}\,y = 0 \\ y(1)=0, \quad y'(1)=-2 \end{cases}$$

لدينا (1) $a_2(x) = x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، ولا بد $a_2(x)\neq 0$ اذاً لابد أن $x \neq 0$

$I_1 = (-\infty, 2)$ متصلة على $a_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ (1)

$I_2 = (0, \infty)$ متصلة على $a_0(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ (1)



اذاً فإن المبرهنة تضمن في $I=(0,2)$ ، بحيث يكون للمسألة التفاضلية حل وحيد

السؤال الثالث:

أ) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

بتعويض الحل بالشكل $y = e^{mx}$ ، إذاً لدينا $m^4 + 2m^2 + 1 = 0$

$(m^2+1)^2 = 0$ ، $m = \mp i$ ، $m = \mp i$ (3)

إذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3\, x \cos x + c_4\, x \sin x}$$ (2)

ب)
$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \quad y'(1) = 2 \end{cases}$$

بتعويض $y = x^m$ ، حيث $x > 0$ ، ومنه

$$m(m-1) + m + 1 = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0$$

ومنه $m = \mp i$ (2) إذاً يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)}$$ (2)

$$y' = -c_1 \sin(\ln x)\frac{1}{x} + c_2 \cos(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y(1) = c_1 + 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(1) = 0 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 2$$

(1)

إذاً الحل الخاص لها هو وحيد ومعطى ب

$$\boxed{y = \cos(\ln x) + 2\sin(\ln x)}$$

م الإحصاء ٣ الواحد

الاختبار القصير رقم ١ للمقرر ٢٢٥ ريض، الفصل الثالث للعام ١٤٤٤ هـ (٢٠٢٣).

الإسم ______________ : ، الرقم الجامعي ______________ :

السؤال الأول (3): أوجد حل المسألة التفاضلية التالية: $y(1) = 1$, $y\,y' = y^2x^3 + y^2x$ ، حيث. $y > 0$

السؤال الثاني(4): برهن أن، $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ $x > 0$ عامل تكميل للمعادلة التفاضلية التالية ثم أوجد حلها.

$$(x^2 - y^2 - x)dx + 2xydy = 0 \text{ , where } x > 0 , y > 0.$$

السؤال الثالث(3): أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $x\,y' = y + x\,e^{y/x}$ حيث $x > 0$.

الإجابة الكاملة لاختبار المقرر (٢٠٥) ريض

الفصل الثالث - عام ١٤٤٤ (٢٠٢٣)

السؤال الأول :

٣ درجات

$$\begin{cases} y y' = y^2 x^3 + y^2 x, \quad y > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y y' = y^2 (x^3 + x) \Rightarrow y' = y(x^3 + x)$$

$$\frac{dy}{y} = (x^3 + x)\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^2}{2} + c \quad (2)$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 1,\ \ln 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{4}$$

ومنه يكون حل المسألة التفاضلية هو

$$\boxed{\ln y - \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} = 0} \quad (1)$$

السؤال الثاني: اثبت أن $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ هو عامل التكامل للمعادلة التفاضلية:

$$(x^2 - y^2 - x)\,dx + 2xy\,dy = 0, \quad x > 0$$

الحل

$$\frac{1}{x^2}\left[(x^2 - y^2 - x)\,dx + 2xy\,dy = 0\right]$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x}\right)}_{M} dx + \underbrace{\frac{2y}{x}}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \quad (2)$$ المعادلة تامة.

إذاً توجد دالة F في x, y بحيث تكون

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{x}$$

$$F(x,y) = \int \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = \int \frac{2y}{x}\,dy = \frac{y^2}{x} + f(x) \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-y^2}{x^2} + f'(x) = 1 - \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x - \ln x + c$$

إذاً حل المعادلة التفاضلية هو مجموعة المنحنيات التالية

$$\boxed{F(x,y) = \frac{y^2}{x} - \ln x + x + C = 0} \quad (2)$$

السؤال الثالث:

$$x y' = y + x e^{y/x}, \quad x > 0$$ معادلة متجانسة

نفرض $u = y/x$ (1) ، $y = xu$ ، $y' = xu' + u$

$$y' = xu' + u = \frac{y}{x} + e^{y/x}$$

$$xu' + \cancel{u} = \cancel{u} + e^{u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = e^{u} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int e^{-u}\,du \quad (1)$$

$$\ln x = -e^{-u} + c$$

$$\boxed{\ln x + e^{-y/x} = c} \quad (1)$$

وهي مجموعة المنحنيات تمثل حلول المعادلة التفاضلية

مع الإجابة الكاملة

الاختبار القصير رقم ٢ للمقرر ٢٢٥ ريض، الفصل الثالث ١٤٤٤ (٢٠٢٣)

الاسم ______________________ :

الرقم الجامعي ______________________ :

السؤال الأول (٤) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 2y' + y = 2e^{x} - 3e^{-x}$$

السؤال الثاني (٣): أكتب **فقط** شكل الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالي

$$y''' - y' = -4x^2 + 5 + 2xe^{-x} + 4e^{2x} .$$

السؤال الثالث (٤): أوجد حل المسألة التفاضلية التالية

$$x^2y'' + xy' + y = 0,\ \ y(1) = 1 ,\ y'(1) = 2.$$

السؤال الأول:

$$y'' - 2y' + y = 2e^{x} - 3e^{-x}$$

$$1)\ y'' - 2y' + y = 0\ ,\ y = e^{mx},\ \ m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0$$

$$m = 1, 1,\ \ y_c = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$$

$$2)\ y_p = Ax^2e^{x} + Be^{-x}$$

$$y_p' = 2Axe^{x} + Ax^2e^{x} - Be^{-x},\ \ y_p'' = 2Ae^{x} + 4Axe^{x} + Ax^2e^{x} + Be^{-x}$$

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ae^{x} + \cancel{4Axe^{x}} + \cancel{Ax^2e^{x}} + Be^{-x} - \cancel{4Axe^{x}} - \cancel{2Ax^2e^{x}} + 2Be^{-x} + \cancel{Ax^2e^{x}} + Be^{-x} = 2e^{x} - 3e^{-x}$$

$$2Ae^{x} + 4Be^{-x} = 2e^{x} - 3e^{-x} \Rightarrow 2A = 2,\ \ 4B = -3$$

ومنه $A=1$, $B = \frac{-3}{4}$. إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = x^2e^{x} - \frac{3}{4}e^{-x}$$

وإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{y = y_c + y_p = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + x^2e^{x} - \frac{3}{4}e^{-x}}$$

السؤال الثاني :

$$y''' - y' = -4x^2 + 5 + 2xe^{-x} + 4e^{2x}$$

$$y''' - y' = 0 ,\quad y = e^{mx};\quad m^3 - m = m(m^2-1) = 0$$

$$m(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0,\ m = 1,\ m = -1$$

$$\boxed{y_p = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)x + (B_0 + B_1 x)xe^{-x} + C_0 e^{2x}}$$

السؤال الثالث :

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + y = 0 ; & x > 0 \\ y(1) = 1 ,\quad y'(1) = 2 \end{cases}$$

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 ,\quad y = x^m ,\quad m(m-1) + m + 1 = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \mp i$$

$$y = \boxed{y_c = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)}$$

$$y' = -c_1 \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + c_2 \cos(\ln x) \frac{1}{x}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow c_1 + 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(1) = 0 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 2$$

إذاً الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{y = \cos(\ln x) + 2 \sin(\ln x)}$$