التحليل الحقيقي

أ.د. إبراهيم العليان

جامعة الملك سعود

الأعداد الحقيقية

1. مجموعات الأعداد
2. الأعداد الحقيقية
3. مسلمة التمام
4. المجموعات القابلة للعد

مجموعات الأعداد

الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

- مبدأ الاستقراء الرياضي

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

- مبدأ الاستقراء الرياضي

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مبرهنة: خاصية الترتيب التام للأعداد الطبيعية

كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فيها عنصر أصغر

الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

- مبدأ الاستقراء الرياضي

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مبرهنة: خاصية الترتيب التام للأعداد الطبيعية

كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فيها عنصر أصغر

- ما حل المعادلة في $\mathbb{N}$

$$x + 1 = 0$$

الأعداد الصحيحة

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

الأعداد الصحيحة

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- $(\mathbb{Z}, +)$

الأعداد الصحيحة

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة إبدالية

الأعداد الصحيحة

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- $(\mathbb{Z}, +)$
  زمرة إبدالية
- ما حل المعادلة في $\mathbb{Z}$

$$2x + 1 = 0$$

الأعداد النسبية

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

الأعداد النسبية

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

- $(\mathbb{Q}, +, *)$

الأعداد النسبية

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

- $(\mathbb{Q}, +, *)$
  حقل

الأعداد النسبية

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

- $(\mathbb{Q}, +, *)$
  حقل
  مرتب

الأعداد النسبية

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

- $(\mathbb{Q}, +, *)$
  حقل
  مرتب

مبرهنة

المعادلة $x^2 = 2$ ليس لها حل في $\mathbb{Q}$

الأعداد النسبية

لتكن

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$$

ما أكبر عنصر في A ؟

الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية

- $(\mathbb{R}, +, *)$ حقل مرتب

- $(\mathbb{R}, +, *)$ حقل مرتب

متطابقة المثلث

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ ، فإن

-1

$$| a + b | \leq | a | + | b |$$

-2

$$|| a | - | b || \leq | a - b |$$

هل العبارات الآتية صحيحة؟

- $$b < c \Rightarrow | a + b | < | a + c |$$

هل العبارات الآتية صحيحة؟

- $$b < c \Rightarrow |a+b| < |a+c|$$

- $$|b| < |c| \Rightarrow |a+b| < |a+c|$$

تمرين

إذا كان

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

فأثبت أن: $a \leq b$. هل العكس صحيح؟

البرهان: نفرض أن $a > b$ ولنأخذ $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ ونلاحظ أن $a > b + \varepsilon$ وهذا تناقض.

جوار - ε

تعريف

إذا كان $\varepsilon > 0$ $a \in \mathbb{R},$ فإننا نعرف جوار- ε للعدد a بأنه

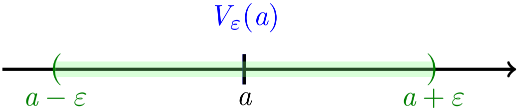
$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

جوار - ε

تعريف

إذا كان $a \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ فإننا نعرف جوار- ε للعدد a بأنه

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$



تمرين

1- إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، وكانت

$$x \in V_{\varepsilon}(a) \ \forall \varepsilon > 0$$

فماذا نستنتج؟

تمرين

1- إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، وكانت

$$x \in V_\varepsilon(a) \ \forall \varepsilon > 0$$

فماذا نستنتج؟

$x = a$.

تمرين

1- إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، وكانت

$$x \in V_\varepsilon(a)\ \forall \varepsilon > 0$$

فماذا نستنتج؟

$x = a$.

2- إذا كانت $A = (0,1)$, و $a \in A$ بحيث $V_\varepsilon(a) \subset A$ ، فما أكبر قيمة للعدد ε ؟

مسلمة التمام

الحد العلوي والحد السفلي

تعريف

1 $u \in \mathbb{R}$ حد علوي (upper bound) للمجموعة A إذا كان

$$a \leq u \qquad \forall a \in A$$

ونقول إن المجموعة A محدودة من أعلى إذا كان لها حد علوي

2 $l \in \mathbb{R}$ حد سفلي (lower bound) للمجموعة A إذا كان

$$l \leq a \qquad \forall a \in A$$

ونقول إن المجموعة A محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي

الحد العلوي والحد السفلي

تعريف

تكون المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي يوجد $l, u \in \mathbb{R}$ بحيث

$$l \le a \le u \qquad \forall a \in A$$

الحد العلوي والحد السفلي

تعريف

تكون المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي يوجد $l, u \in \mathbb{R}$ بحيث

$$l \leq a \leq u \qquad \forall a \in A$$

مثال: أوجد حدين علويين وحدين سفليين للمجموعات الآتية إن وجدت:

1- $[1, 4)$

الحد العلوي والحد السفلي

تعريف

تكون المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي يوجد $l, u \in \mathbb{R}$ بحيث
$$l \leq a \leq u \qquad \forall a \in A$$

مثال: أوجد حدين علويين وحدين سفليين للمجموعات الآتية إن وجدت:

1- $[1, 4)$

2- $(2, \infty)$

الحد العلوي الأصغر $\sup A$

تعريف

- إذا كان $A \subset \mathbb{R}$ ، فإن $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي أصغر ويرمز له بالرمز $\beta = \sup A$ إذا تحقق

1. $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي للمجموعة A ، أي

$$a \leq \beta \qquad \forall a \in A$$

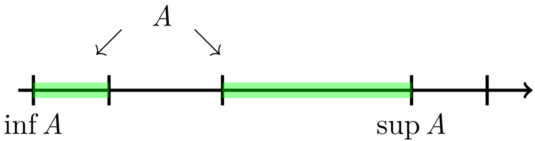
2. إذا كان u حدا علويا للمجموعة A، فإن

$$\beta \leq u$$

الحد السفلي الأكبر $\inf A$

تعريف

- $\alpha \in \mathbb{R}$ حد سفلي أكبر للمجموعة A ويرمز له بالرمز $\alpha = \inf A$ إذا كان حدا سفليا، ولا يوجد حد سفلي أكبر منه.


A
$\inf A$
$\sup A$

ملاحظات

- إذا كان $\sup A \in A$ ، فإن $\sup A = \max A$
- إذا كان $\inf A \in A$ ، فإن $\inf A = \min A$

أمثلة

1. $\{1, 2, 5\}$
2. $[2, 5)$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
5. $\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

ملاحظات

- الحد العلوي الأصغر وحيد
- الحد السفلي الأكبر وحيد

مبرهنة

إذا كان β حدا علويا للمجموعة A ، فإن $\beta = \sup A$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \qquad \beta - \varepsilon < a$$

مثال

إذا كانت A أي من الفترات $(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]$ فإن

$$\sup A = b$$

مثال

إذا كانت A أي من الفترات $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ فإن

$$\sup A = b$$

تمرين:

$$\inf A = a$$

مبرهنة

إذا كانت $-A = \{-a : a \in A\}$ ، فإن المجموعة A محدودة من أسفل إذا وفقط إذا كانت $-A$ محدودة من أعلى، وكذلك

$$\inf A = -\sup(-A)$$

مسلمة التمام

مسلمة التمام

1. إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أعلى، فإن لها حدا علويا أصغر في $\mathbb{R}$
2. إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أسفل، فإن لها حدا سفليا أكبر في $\mathbb{R}$

مبرهنة

مبرهنة

المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى

مبرهنة

مبرهنة

المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى

نتيجة: خاصية أرخميدس

لكل $x > 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{n}$

مبرهنة

مبرهنة

المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى

نتيجة: خاصية أرخميدس

لكل $0 < x$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{n}$

نتيجة

لكل $0 \leq x$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n - 1 \leq x < n$.

سؤال

1. إذا كان

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

سؤال

1. إذا كان

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

2. إذا كان

$$x \in [0, \infty), \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

سؤال

1. إذا كان

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

2. إذا كان

$$x \in [0, \infty), \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

3. إذا كان

$$x \in \mathbb{R}^{+}, \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن ...

تمرين

إذا كانت $p, q \in \mathbb{Q}$، فأثبت أنه يوجد عدد نسبي في الفترة (p, q).

كثافة الأعداد النسبية وغير النسبية

مبرهنة: كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا نسبيا .

أي إذا كان $x < y$ ، $x, y \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد $q \in \mathbb{Q}$ بحيث $x < q < y$

مبرهنة: كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا نسبيا .
أي إذا كان $x < y$ ، $x, y \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد $q \in \mathbb{Q}$ بحيث $x < q < y$

مبرهنة: كثافة $\mathbb{Q}^c$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا غير نسبي .

تمرين

باستخدام طريقة البرهان، أوجد $q \in \mathbb{Q}$ بحيث

$$\sqrt{2} < q < \sqrt{3}$$

المفكوك العشري

إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ ، فإنه يوجد عدد $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
وأعداد $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ بحيث

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} < \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ونكتب

$$x = x_0.x_1 x_2 \ldots$$

ويسمى المفكوك العشري للعدد x

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

$$n = 0 \Longrightarrow x_0 = 1 \Longrightarrow \sqrt{2} - 1 = 0.41\ldots < 10^0 = 1$$

ملاحظات

1. إذا كان لعددين نفس المفكوك العشري، فإنهما متساويان.
2. لكل عدد $x > 0$ مفكوك عشري وحيد.

ملاحظات

1. تساؤل:

$$\frac{1}{2} = 0.500000\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0.499999\ldots$$

2.

$$1 = 0.99999\ldots$$

ملاحظات

1. تساؤل:

$$\frac{1}{2} = 0.500000\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0.499999\ldots$$

2.

$$1 = 0.99999\ldots$$

3. لو غيرنا الشرط السابق إلى

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} \leq \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

فقد يكون لبعض الأعداد مفكوكين.

المجموعات القابلة للعد

نظرية المجموعات

- في أواخر القرن التاسع عشر نشأت نظرية المجموعات على يد جورج كانتور

تعريف

نقول إن A تكافئ B

$$A \sim B$$

إذا وجد تقابل $f : A \to B$.

تعريف

نقول إن A منتهية، إذا كانت خالية أو وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

أمثلة

1

$$\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_1 \sim \mathbb{N}_2$$

أمثلة

1

$$\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_1 \sim \mathbb{N}_2$$

2

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$$

أمثلة

1.
$$\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$$
$$\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$$
$$\mathbb{N}_1 \sim \mathbb{N}_2$$

2.
$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$$

3. ملاحظة

$$\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}. \qquad \mathbb{N}_2 \neq \mathbb{N}$$

أمثلة

1

$$\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_1 \sim \mathbb{N}_2$$

2

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$$

3 ملاحظة

$$\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}. \qquad \mathbb{N}_2 \neq \mathbb{N}$$

4

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$$

المجموعات القابلة للعد

تعريف

المجموعة A قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

المجموعات القابلة للعد

تعريف

المجموعة A قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

نظرية

كل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

المجموعات القابلة للعد

تعريف

المجموعة A قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

نظرية

كل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

نظرية

كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي قابلة للعد.

المجموعات القابلة للعد

نظرية

إذا كانت A, B قابلة للعد، فإن $A \times B$ قابلة للعد.

المجموعات القابلة للعد

نظرية

إذا كانت A, B قابلة للعد، فإن $A \times B$ قابلة للعد.

نظرية

إذا كانت A_n قابلة للعد لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ قابلة للعد.

المجموعات القابلة للعد

نظرية

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

المجموعات القابلة للعد

نظرية

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

نظرية

المجموعة $[0, 1)$ غير قابلة للعد

المجموعات القابلة للعد

نظرية

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

نظرية

المجموعة $[0,1)$ غير قابلة للعد

نظرية

المجموعة $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد.

تمرين

تمرين

هل المجموعة $\{x \in \mathbb{Q}^c : x \in [0,1)\}$ قابلة للعد

تمرين

هل المجموعة $\{x \in \mathbb{Q}^c : x \in [0,1)\}$ قابلة للعد

أثبت أن:

1- $(0,1) \sim (2,5)$

تمرين

هل المجموعة $\{x \in \mathbb{Q}^c : x \in [0,1)\}$ قابلة للعد

أثبت أن:

1- $(0,1) \sim (2,5)$

2- $\mathbb{R}^+ \sim (0,1)$