التحليل الحقيقي

أ.د. إبراهيم العليان

جامعة الملك سعود

المحتويات

المتتاليات

المتتاليات

- يعود مفهوم تقارب المتتاليات إلى بدايات القرن التاسع عشر على يد بولزانو وكوشي.

المتتالية

تعريف

المتتالية الحقيقية (sequence of real numbers) هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومداها الأعداد الحقيقية ، أي

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

نعرف $x_n := f(n)$.

المتتالية

تعريف

المتتالية الحقيقية (sequence of real numbers) هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومداها الأعداد الحقيقية ، أي

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

نعرف $x_n := f(n)$.

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots), \qquad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \qquad (x_n)$$

- x_n الحد النوني.

المتتالية

تعريف

المتتالية الحقيقية (sequence of real numbers) هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومداها الأعداد الحقيقية ، أي

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

نعرف $x_n := f(n)$.

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots), \qquad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \qquad (x_n)$$

- x_n الحد النوني.
- $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ هي مدى المتتالية .

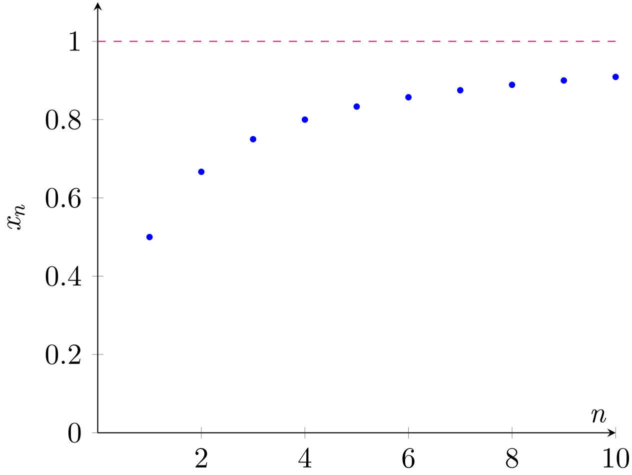
مثال

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

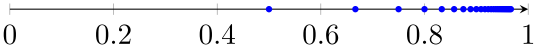
مثال

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \dots & \frac{n}{n+1} & \dots
\end{array}$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x_n
n
2
4
6
8
10


0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

أمثلة

1. $(2) = (2, 2, 2, \ldots)$ هي متتالية ثابتة.
2. $(2n) = (2, 4, 6, \ldots)$ هي متتالية الأعداد الزوجية.
3. $((-1)^n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ هي متتالية مداها المجموعة $\{-1, 1\}$.
4. $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$
5. يمكن تعريف المتتالية باستخدام الاستقراء مثل

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

تقارب المتتاليات

في المتتاليات، يكون التركيز على الحدود المتأخرة، فمثلا المتتالية $\frac{1}{n}$ حدودها المتأخرة تصغر وتقترب من 0.

تقارب المتتاليات

في المتتاليات، يكون التركيز على الحدود المتأخرة، فمثلا المتتالية $\frac{1}{n}$ حدودها المتأخرة تصغر وتقترب من 0.

تعريف

المتتالية (x_n) متقاربة (convergent) إذا وجد $x \in \mathbb{R}$ ، بحيث

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \\ |x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

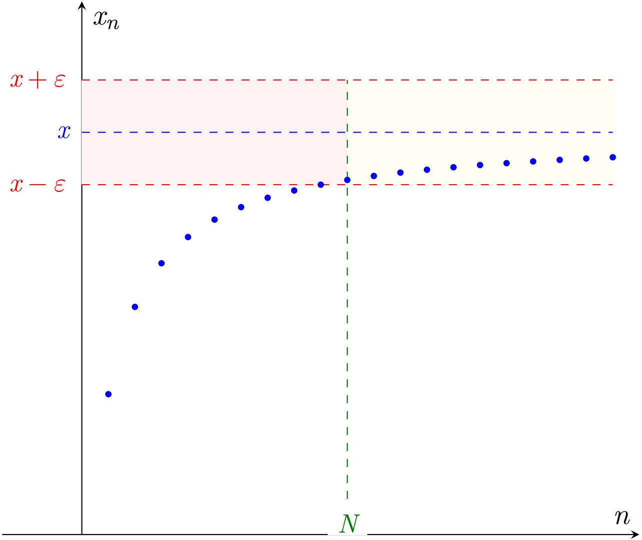
ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ أو اختصارا $\lim x_n = x$ ، أو $x_n \to x$.

تقارب المتتاليات

تعريف

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} :$$
$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$



x_n
$x+\varepsilon$
x
$x-\varepsilon$
N
n

ملاحظات

1. إذا وجدنا عددا $N \in \mathbb{N}$ يحقق العلاقة

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

فإن أي عدد أكبر من N يحقق هذه العلاقة.

ملاحظات

1. إذا وجدنا عددا $N \in \mathbb{N}$ يحقق العلاقة

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad\qquad \forall\ n \geq N$$

فإن أي عدد أكبر من N يحقق هذه العلاقة.

2. عندما نُغير قيمة ε، فقد نحتاج لتغيير قيمة N، وفي الغالب، كلما كانت قيمة ε أصغر، كلما احتجنا لاختيار قيمة أكبر للعدد N.

أمثلة

1. أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{1}{n} = 0$

أمثلة

1. أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{1}{n} = 0$
2. أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

ملاحظات

إذا كانت المتتالية (x_n) تحقق أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ وثابت $C > 0$ لا يعتمد على n أو ε، بحيث

$$|x_n - x| < C\varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

فإن $x \to x_n$.

كيف نثبت أن متتالية غير متقاربة؟

كيف نثبت أن متتالية غير متقاربة؟

حتى نبين إن المتتالية (x_n) غير متقاربة إلى x، يكفي أن نوجد ε_0، بحيث لكل $N \in \mathbb{N}$ يوجد $n_N \geq N$ تحقق

$$|x_{n_N} - x| \geq \varepsilon_0$$

أمثلة

أثبت باستخدام التعريف

1. $$\lim \frac{3n}{5n+9} = \frac{3}{5}$$

أمثلة

أثبت باستخدام التعريف

1. $$\lim \frac{3n}{5n+9} = \frac{3}{5}$$
2. $$\lim \frac{n^2+2n}{n^3-4} = 0$$

أمثلة

أثبت باستخدام التعريف

1. $$\lim \frac{3n}{5n+9} = \frac{3}{5}$$
2. $$\lim \frac{n^2+2n}{n^3-4} = 0$$

تمرين: أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$

أمثلة

1. المتتالية $((-1)^n)$ غير متقاربة.

أمثلة

1. المتتالية $((-1)^n)$ غير متقاربة.
2. المتتالية (n) غير متقاربة.

ملاحظات

1. يعتمد تقارب المتتالية على الحدود المتأخرة والتي تسمى ذيل المتتالية. الذيل m للمتتالية (x_n) هو $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$. فمثلا الذيل الثالث للمتتالية $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ هو $(7, 9, \ldots)$.

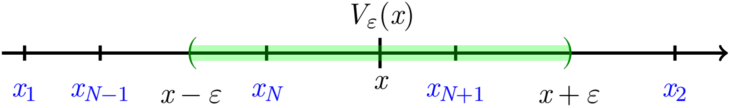
ملاحظات

1. يعتمد تقارب المتتالية على الحدود المتأخرة والتي تسمى ذيل المتتالية. الذيل m للمتتالية (x_n) هو $(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$. فمثلا الذيل الثالث للمتتالية $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ هو $(7, 9, \dots)$.
2. من تعريف المتتالية المتقاربة نجد أن

$$|x_n - x| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to x$$

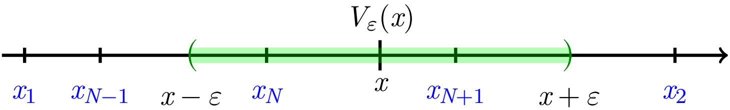
ملاحظات

1. جميع حدود المتتالية ما عدا $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ تقع في جوار- ε للعدد x ، أي $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.



ملاحظات

1. جميع حدود المتتالية ما عدا $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ تقع في جوار- ε للعدد x ، أي $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

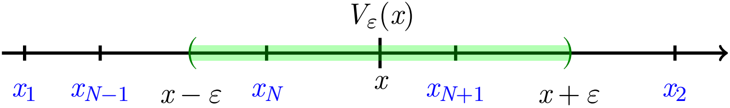


2. نقول إن V جوارا للنقطة x، إذا كان هناك $\varepsilon > 0$ بحيث

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$$

ملاحظات

1. جميع حدود المتتالية ما عدا $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ تقع في جوار- ε للعدد x ، أي $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.



2. نقول إن V جوارا للنقطة x، إذا كان هناك $0 < \varepsilon$ بحيث

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$$

3. يمكن تعريف التقارب باستخدام لغة الجوار كما يلي المتتالية (x_n) متقاربة ونهايتها x إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي كل حدود المتتالية ما عدا عدد منته منها.

مبرهنة

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فإن نهايتها وحيدة.

المتتاليات المحدودة

تعريف

المتتالية (x_n) محدودة (bounded) إذا وجد $K \in \mathbb{R}$ بحيث

$$|x_n| \leq K \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

أي إن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة .

المتتاليات المحدودة

تعريف

المتتالية (x_n) محدودة (bounded) إذا وجد $K \in \mathbb{R}$ بحيث

$$|x_n| \leq K \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

أي إن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة .

مبرهنة

المتتالية المتقاربة محدودة.

المتتاليات المحدودة

تعريف

المتتالية (x_n) محدودة (bounded) إذا وجد $K \in \mathbb{R}$ بحيث

$$|x_n| \leq K \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

أي إن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة .

مبرهنة

المتتالية المتقاربة محدودة.

هل العكس صحيح؟

المتتاليات المحدودة

تعريف

المتتالية (x_n) محدودة (bounded) إذا وجد $K \in \mathbb{R}$ بحيث

$$|x_n| \leq K \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

أي إن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة .

مبرهنة

المتتالية المتقاربة محدودة.

هل العكس صحيح؟
متى يكون العكس صحيحا؟

مبرهنة

إذا كانت $x_n \to x \neq 0$ ، فإنه يوجد $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \implies |x_n| > M$$

العمليات على المتتاليات

مبرهنة

إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها x و (y_n) متتالية متقاربة ونهايتها y ، فإن المتتالية $(x_n + y_n)$ متقاربة ونهايتها $y + x$.

مبرهنة

إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها x و (y_n) متتالية متقاربة ونهايتها y ، فإن

1. المتتالية $(x_n + y_n)$ متقاربة ونهايتها $x + y$.
2. المتتالية $(x_n y_n)$ متقاربة ونهايتها xy.

العمليات على المتتاليات

مبرهنة

إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها x و (y_n) متتالية متقاربة ونهايتها y ، فإن

1. المتتالية $(x_n + y_n)$ متقاربة ونهايتها $x + y$.
2. المتتالية $(x_n y_n)$ متقاربة ونهايتها xy.
3. إذا كان $k \in \mathbb{R}$، فإن المتتالية (kx_n) متقاربة ونهايتها kx.

مبرهنة

إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها x و (y_n) متتالية متقاربة ونهايتها y ، فإن

1. المتتالية $(x_n + y_n)$ متقاربة ونهايتها $x + y$.
2. المتتالية $(x_n y_n)$ متقاربة ونهايتها xy.
3. إذا كان $k \in \mathbb{R}$، فإن المتتالية (kx_n) متقاربة ونهايتها kx.
4. إذا كان $y_n \neq 0$، لكل $n \in \mathbb{N}$ ، و $y \neq 0$، فإن المتتالية $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ متقاربة ونهايتها $\frac{x}{y}$.

مثال

أوجد

1

$$\lim \frac{2n+1}{n}$$

مثال

أوجد

1.
$$\lim \frac{2n+1}{n}$$

2.
$$\lim \frac{5n+1}{2n^2+4}$$

مبرهنة

مبرهنة

إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ و

$$x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن $x \leq y$.

مبرهنة

إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ و

$$x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن $x \leq y$.

ملاحظة

ماذا لو كانت $x_n < y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ؟ هل نستنتج أن $x < y$ ؟

مبرهنة الحصر

مبرهنة

إذا كانت

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n \geq N_0$$

وكان $\lim x_n = \lim z_n = L$ ، فإن (y_n) متقاربة ونهايتها L .

مبرهنة الحصر

مبرهنة

إذا كانت

$$x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \ge N_0$$

وكان $\lim x_n = \lim z_n = L$ ، فإن (y_n) متقاربة ونهايتها L .

مثال أوجد النهاية

$$\lim \frac{\sin n}{n^2}$$

مبرهنة

مبرهنة ذات الحدين

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

أمثلة

1. إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x_n| \to |x|$. هل العكس صحيح؟

أمثلة

1. إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x_n| \to |x|$. هل العكس صحيح؟
2. إذا كان $0 < a < 1$ ، فأثبت أن $\lim a^n = 0$.

أمثلة

1. إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x_n| \to |x|$. هل العكس صحيح؟
2. إذا كان $0 < a < 1$ ، فأثبت أن $\lim a^n = 0$.
3. إذا كان $c > 0$ ، فأثبت أن $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.

أمثلة

1. إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x_n| \to |x|$. هل العكس صحيح؟
2. إذا كان $0 < a < 1$ ، فأثبت أن $\lim a^n = 0$.
3. إذا كان $c > 0$ ، فأثبت أن $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.
4. أثبت أن $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$

أمثلة

1. إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x| \to |x_n|$. هل العكس صحيح؟
2. إذا كان $0 < a < 1$ ، فأثبت أن $\lim a^n = 0$.
3. إذا كان $c > 0$ ، فأثبت أن $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.
4. أثبت أن $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$
5. إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، وكان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $\sqrt{x} \to \sqrt{x_n}$.

المتتاليات المطردة

المتتاليات المطردة

تعريف

1. المتتالية (x_n) متزايدة (increasing) إذا كان

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

متزايدة فعلا (strictly increasing) إذا كانت $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. (x_n) متناقصة (decreasing) إذا كان $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

متناقصة فعلا (strictly decreasing) $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3. إذا كانت (x_n) متزايدة أو متناقصة فهي تسمى مطردة.

ملاحظة

المتتالية (x_n) متزايدة، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(-x_n)$ متناقصة.

أمثلة

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\left(n^2\right)$
3. $\left((-1)^n\right)$
4. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

أمثلة

أثبت أن المتتالية (x_n) متناقصة، حيث

1. $$x_n = \frac{2}{n+3}$$

أمثلة

أثبت أن المتتالية (x_n) متناقصة، حيث

1. $$x_n = \frac{2}{n+3}$$

2. تمرين
$$x_n = \frac{n}{n^2+1}$$

المتتاليات المطردة

مبرهنة

المتتالية المطردة متقاربة، إذا وفقط إذا كانت محدودة. كما أنه

1 إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة، فإن

$$\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ونكتب $x_n \uparrow \sup\{x_n\}$

2 إذا كانت (x_n) متناقصة ومحدودة، فإن

$$\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad x_n \downarrow \inf\{x_n\}$$

مثال

1. إذا كانت $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

مثال

1. إذا كانت $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها
2. ماذا لوكانت $x_1 = 10$

مثال

1. إذا كانت $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها
2. ماذا لوكانت $x_1 = 10$
3. ماذا لوكانت $x_1 = 0,\ x_{n+1} = 2x_n + 3$

أمثلة

1. إذا كانت $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

أمثلة

1. إذا كانت $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

أمثلة

1. إذا كانت $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \frac{7}{4}, \quad x_4 = \frac{97}{56}$$

أمثلة

1. إذا كانت $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \frac{7}{4}, \quad x_4 = \frac{97}{56}$$

ماذا تلاحظ على المتتالية ونهايتها؟

تعريف

تسمى المجموعة $[-\infty, \infty] = \{-\infty, \infty\} \bigcup \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}}$ ، مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة.

نقول إن G جوار للنقطة ∞ إذا وجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث $(M, \infty] \subset G$.

ملاحظات

- إذا كانت A غير محدودة من أعلى، فإن $\sup A = \infty$
- إذا كانت A غير محدودة من أسفل، فإن $\inf A = -\infty$

ملاحظات

- إذا كانت A غير محدودة من أعلى، فإن $\sup A = \infty$
- إذا كانت A غير محدودة من أسفل، فإن $\inf A = -\infty$
- $\sup \phi = ...$
- $\inf \phi = ...$

تعريف

إذا كانت (x_n)متتالية، فإننا نقول إن (x_n) تتباعد إلى ∞ ونكتب

$$\lim x_n = \infty$$

إذا كان لكل $M \in \mathbb{R}^+$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$x_n > M \qquad \forall\ n \geq N$$

أمثلة

1. إذا كانت $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ فأثبت ان (x_n) متزايدة. ثم أوجد

$$\lim x_n$$

أمثلة

إذا كانت المتتالية (x_n) غير محدودة من أعلى فهل

$$\lim x_n = \infty$$

المتتاليات الجزئية

المتتاليات الجزئية

تعريف

لتكن (x_n) متتالية، (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلا، أي $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ ، فإننا نسمي المتتالية $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ متتالية جزئية من (x_n) .

إي إن المتتالية الجزئية ناتجة عن بعض عناصر المتتالية الأصلية وإعادة ترقيم الحدود الباقية.

المتتاليات الجزئية

تعريف

لتكن (x_n) متتالية، (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلا، أي $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ، فإننا نسمي المتتالية $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ متتالية جزئية من (x_n) .

إي إن المتتالية الجزئية ناتجة عن بعض عناصر المتتالية الأصلية وإعادة ترقيم الحدود الباقية.

$$(x_4, x_7, x_8, \dots)$$

أمثلة

1. كل ذيل من (x_n) هو متتالية جزئية.
2. الحدود الفردية تشكل متتالية جزئية من (x_n) حيث $n_k = 2k - 1$ ، وكذلك الحدود الزوجية.
3. هل $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5}, \dots)$ متتالية جزئية من $(\frac{1}{n})$
4. هل $(4, 8, 9, \dots)$ متتالية جزئية من $(2n)$

ملاحظة

الشرط $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ يقتضي أن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

مبرهنة

إذا كانت (x_n) متقاربة ونهايتها x، فإن كل متتالية جزئية منها متقاربة لنفس النهاية.

ملاحظات

1. إذا أمكن إيجاد متتاليتين جزئيتين (x_{k_n}) و (x_{m_n}) متقاربتين لنهايتين مختلفتين، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.
2. إذا أوجدنا متتالية جزئية (x_{n_k}) غير متقاربة، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.

أمثلة

1. المتتالية $((-1)^n)$ ليست متقاربة.

أمثلة

1. المتتالية $((-1)^n)$ ليست متقاربة.
2. المتتالية $(\frac{(-1)^n n}{n+1})$ ليست متقاربة.

أمثلة

1. المتتالية $((-1)^n)$ ليست متقاربة.
2. المتتالية $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ ليست متقاربة.
3. إذا عرفنا

$$x_n := \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

فإن (x_n) ليست متقاربة.

أمثلة

إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن

$$\lim a^n = 0$$

نتيجة

إذا كانت (x_n) متقاربة ، ولها متتالية جزئية متقاربة من x ، فإن $\lim x_n = x$.

نتيجة

إذا كانت (x_n) متقاربة ، ولها متتالية جزئية متقاربة من x ، فإن $\lim x_n = x$.

المتتالية الجزئية المطردة

إذا كانت (x_n) متتالية، فإن لها متتالية جزئية مطردة.

مبرهنة

مبرهنة بولزانو-فايرشتراس

إذا كانت (x_n) متتالية محدودة ، فإن لها متتالية جزئية متقاربة.

مبرهنة

إذا كانت (x_n) محدودة ، وجميع متتالياتها الجزئية المتقاربة لها نفس النهاية، فإن (x_n) متقاربة إلى نفس النهاية.

معيار كوشي

سؤال

كيف نثبت أن متتالية متقاربة؟

متتالية كوشي

تعريف

تسمى المتتالية (x_n) متتالية كوشي، إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \\ |x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N$$

متتالية كوشي

تعريف

تسمى المتتالية (x_n) متتالية كوشي، إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \\ |x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N$$

وهذا يعني أن الحدود المتأخرة للمتابعة قريبة من بعضها.

مثال

أثبت أن (x_n) متتالية كوشي

$$x_n = \frac{1}{n}$$

مثال

أثبت أن (x_n) متتالية كوشي

$$x_n = \frac{1}{n}$$

أثبت أن (x_n) ليست متتالية كوشي

$$x_n = \sqrt{n}$$

مثال

أثبت أن (x_n) متتالية كوشي

$$x_n = \frac{1}{n}$$

أثبت أن (x_n) ليست متتالية كوشي

$$x_n = \sqrt{n}$$

تمرين أثبت أن المتتالية الآتية كوشي

$$x_n = \frac{2n}{3n+1}$$

متتالية كوشي

مبرهنة

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فهي من نوع كوشي.

مبرهنة

إذا كانت (x_n) من نوع كوشي، فإنها محدودة.

مبرهنة

إذا كانت (x_n) من نوع كوشي، فإنها محدودة.

مبرهنة

المتتالية (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت من نوع كوشي.

مثال

1. إذا كان $x_1 = 1, x_2 = 2$ ،

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن (x_n) متقاربة.

مثال

1. إذا كان $x_1 = 1, x_2 = 2$,

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن (x_n) متقاربة.

$$x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = \frac{7}{4}, \quad x_5 = \frac{13}{8}$$

مثال

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

تمرين

أثبت أن المتتالة $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ من نوع كوشي.