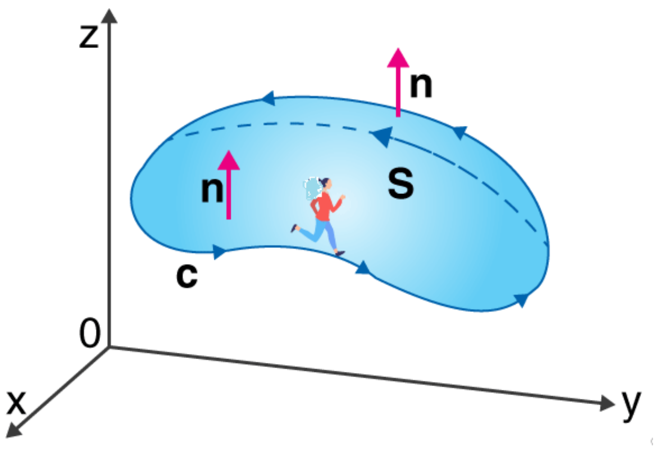
Summary of Math-203

(All material only in 7 pages)

Prepared by:

Lecturer: Fawaz bin Saud Al-Otaibi

Mathematics department-KSU



$\{a_n\}$ Diverges If $\lim_{n\to\infty} \begin{cases} \to \infty \\ \to -\infty \\ \to \text{D.N.E} \end{cases}$

لا تكتب في هذا الهامش

8.1 (Sequences) : [حالات عدم التعيين: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞} , 0^{0} , $0 \cdot \infty$]

① L'Hôpital's rule : $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$ (فقط)

② Sandiwch Theorem : $-1 \leq \sin(\quad) \leq 1$, $-1 \leq \cos(\quad) \leq 1$

$-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}(\quad) \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq |\sin(\quad)| \leq 1$

في حالة التناوب $(-1)^n$ ③ – $|a_n| \begin{cases} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0 \\ \not\to 0 \Rightarrow a_n \text{ div} \end{cases}$

④ – الضرب في المرافق، توحيد المقامات، فرق بين مربعين أو مكعبين، ....

r عدد ثابت ⑤ – $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{if } |r|<1 \\ \infty & \text{if } |r|>1 \\ 1 & \text{if } r=1 \\ \text{D.N.E} & \text{if } r=-1 \end{cases}$

⑥ – مثال: $(1-n)^{\ln(n)} \Rightarrow y = (1-n)^{\ln n}$ آخذ ln للطرفين .... ثم نكمل

8.2 (Convergent and divergent series) : $(\sum a_n)$

N-term test : $\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ div} \\ = 0 \Rightarrow \sum a_n \ (??) \end{cases}$

$1^n = 1$ Geometric series $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \begin{cases} |r|<1 \Rightarrow \text{conv} \Rightarrow \text{sum} = \frac{\text{أول حد}}{1-r} \\ |r|>1 \Rightarrow \text{div} \end{cases}$

Partial sum : $\sum a_n \to S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

(لكتابة S_n نطبق الكسور الجزئية على a_n) $\lim_{n\to\infty} S_n \begin{cases} \to \text{div} \Rightarrow \sum a_n \text{ div} \\ \to \text{conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \Rightarrow \text{sum} = \lim_{n\to\infty} S_n \end{cases}$

ولاحظ $\begin{cases} \sum(\text{conv} \pm \text{div}) = \text{div} \ ; \ \sum(\text{conv} \pm \text{conv}) = \text{conv} \ ; \\ \sum(\text{div} \pm \text{div}) = ?? \end{cases}$

p عدد ثابت P-series : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p>1 \Rightarrow \text{conv} \\ p \leq 1 \Rightarrow \text{div} \end{cases}$, $\sum \frac{1}{n}$ harmonic div

الأسس:

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(n+1)! = (n+1)\,n!$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

الأس سالب ننزل له ← تحت

إذا المقام فيتحول الأس إلى موجب

لا يكتب في هذا الهامش

8.4+8.3 : (Postive-term series) : $\sum a_n$ (في السؤال)

1- Integral Test: $f(x)$ → ≥ 0, continuous, decreasing $\Rightarrow \int^{\infty} f(x)\,dx$ → conv $\Rightarrow \sum a_n$ conv ; → div $\Rightarrow \sum a_n$ div

2- Basic Comparison Test: $\sum a_n \leq \sum b_n$ (conv) $\Rightarrow \sum a_n$ conv

or

$\sum a_n \geq \sum b_n$ (div) $\Rightarrow \sum a_n$ div

معلومة: $\ln(n) \leq n$

a_n أكبر درجة في البسط ÷ أكبر درجة في المقام $= \frac{a_n}{b_n}$

3- Limit Comparison Test: Give us $\sum b_n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0 \Rightarrow \sum a_n$ نفس حكم $\sum b_n$

$n!$ 4- Ratio Test: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ → $<1 \Rightarrow \sum a_n$ conv ; $>1 \Rightarrow \sum a_n$ div ; $=1 \Rightarrow$ يفشل الاختبار

5- Root Test: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ → نفس الحالات ← في حالة وجود أس n

8.5 : (Alternating series and absolute convergence) $\sum (-1)^n a_n$

a_n → ≥ 0 ; $\lim a_n = 0$; a_n is decreasing $\xrightarrow{AST} \sum (-1)^n a_n$ conv

(إذا اختل أحد الشروط) $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ div

AC, CC, D : $\sum (-1)^n a_n$:

$\sum |(-1)^n a_n|$ → conv $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ AC $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ conv

→ div → $\sum (-1)^n a_n$ conv $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ is CC

→ $\sum (-1)^n a_n$ div $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ is D

8.6 : Power Series

interval of convergence of Power Series: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dots = < 1$ → تطلع فترة التقارب

(وكذلك نشتغل على طرفي الفترة)

radius $= \frac{b-a}{2}$

8.7 : power series representation of functions: at $a = |u| < 1$

قوانين: $(-1, 1)$

$\frac{1}{1-u} = \sum_0^\infty u^n$; $|u|<1$ (تعويض) ; (للاشتقاق) $\cos(u) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$; $u \in \mathbb{R}$

$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+u) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}$; $|u|<1$; (للاشتقاق) $\sin(u) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $u \in \mathbb{R}$

(للاشتقاق) $e^u = \sum_0^\infty \frac{u^n}{n!}$; $u \in \mathbb{R}$; $\tan^{-1}(u) = \int_0^u \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)}$; $u \in [-1, 1]$

8.8: Maclaurin and Taylor Series

$$f^{(0)} = f$$

Maclaurin series: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Taylor Series: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$

ملاحظة : Power series في القسم السابق 8.7

هي نفسها Maclaurin Series

ch13: Multiple Integrals

$dA = \begin{cases} dy\,dx \\ \text{or } dx\,dy \\ \text{or } r\,dr\,d\theta \text{ (Polar Coordinates)} \end{cases}$

مع حالة الدوائر $x^2+y^2=r^2$ أفضل

توصيات: عند استحالة التكامل نعمل reverse

- حدود التكامل الداخلي هي طرق الشرك

Area: $A = \iint_R 1\, dA$ (area of region R)

Volume: $V = \iint_R z\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA$ (R is projection of $z=f(x,y)$ into xy-plane)

Surface area: $S = \iint_R \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\, dA$, $z = f(x,y)$

إسقاط الـ z في xy-plane solid

mass of solid: $m = \iiint_Q \delta(x,y,z)\, dV$ (δ: density)

mass of lamina: $m = \iint_R \delta(x,y)\, dA$ (δ: density)

Moment M_x: $M_x = \iint_R y\,\delta(x,y)\, dA$

Moment M_y: $M_y = \iint_R x\,\delta(x,y)\, dA$

Volume (of Q) by triple integral

$$V = \iiint_Q 1\, dV$$

Center of mass $(\bar{x},\bar{y})$ lamina: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$

Q منطقة في 3D

$dV = \begin{cases} dx\,dy\,dz \\ dy\,dz\,dx \\ \vdots \\ dz\,r\,dr\,d\theta \\ \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \end{cases}$

أسطواني ← $dz\,r\,dr\,d\theta$

نجيب حدوده من xy-plane

كروي ← $\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

Moments of interia of lamina:

$I_x = \iint_R y^2\,\delta(x,y)\, dA$

$I_y = \iint_R x^2\,\delta(x,y)\, dA$

$I_0 = \iint_R (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\, dA$

$\boxed{\text{centroid} = \text{center of mass}, \ \delta = 1}$

Moments ~~of~~ and Center of mass in 3-D $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$m = \iiint_Q \delta(x,y,z)\, dV$

$M_{xy} = \iiint_Q z\,\delta(x,y,z)\, dV$

$M_{xz} = \iiint_Q y\,\delta(x,y,z)\, dV$

$M_{yz} = \iiint_Q x\,\delta(x,y,z)\, dV$

$\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \dfrac{M_{xz}}{m}$

$\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{m}$

من 3D z حدودها xy plane

لا يكتب في
هذا الهامش

moments of interia of solids:

بالنسبة لمحور z

$$I_z = \iiint_Q (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dV$$

$$I_x = \iiint_Q (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV$$

الإحداثيات الكروية

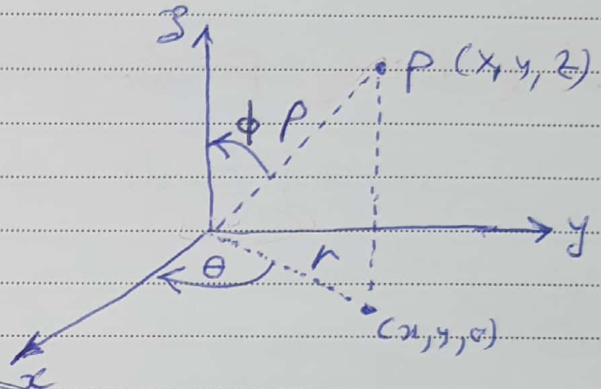
spherical coordinates : (ρ, ϕ, θ)

$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$

$\rho^2 = x^2+y^2+z^2$

0 لما أقل فتحة ϕ ملاصقة

π لما أكبر فتحة عكسية



density $\delta(x,y)$ or $\delta(x,y,z)$

تعطى صريح

لا تعطى صريح

$\delta(x,y) = \checkmark$

$\delta(x,y,z) = \checkmark$

sphere: $x^2+y^2+z^2 = k^2$ or $\rho = k$

Cone: $z^2 = x^2+y^2$ or $\phi =$ زاوية

Cylinder: $x^2+y^2 = r^2$

Parabolid: $z = x^2+y^2$

Plane: $x+3y+z=5$

$P(x,y)$ or $P(x,y,z)$

density ~ distance $P \to y$-axis

$\delta = k|x|$

~ distance $P \to x$-axis

$\delta = k|y|$

density ~ distance of $P \to xy$-plane

$\delta = k|z|$

~ distance of $P \to xz$-plane

$\delta = k|y|$

density ~ distance of $P \to yz$-plane

$\delta = k|x|$

density ~ أكثر بعيد z-axis

$\delta = k\sqrt{x^2+y^2}$

خطأ

وخلاها الأخرين

density ~ مربع المسافة بين P ونقطة الأصل

$\delta = k(x^2+y^2)$

$d = k(x^2+y^2+z^2)$

Chapter 14
Vector Calculus

$F(x,y,z)$ is conservative iff $F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$, for some $f(x,y,z)$

$$\text{curl } F = \underset{\text{vector}}{\nabla \times F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}, \quad \text{where } F = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$$

$$\text{div } F = \underset{\text{scalar}}{\nabla \cdot F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\boxed{\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}}$$

Work done by F along C:

$$W = \int_C F \cdot dr, \quad r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$dr = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

line integral

$\int_C F \cdot dr$ is "independent of Path iff $F(x,y) = \nabla f(x,y)$ for some $f(x,y)$ potential

and $\int_C F \cdot dr = \int_C (M\,dx + N\,dy) = f(x,y)\Big]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$

$\int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ is independent of Path ~~on~~ in D iff $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

عكس تعميم : x و y و z

Green's Theorem: $\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$ C R

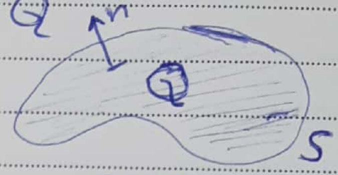
Area of R: $A = \oint_C x\,dy \overset{\text{or}}{=} -\oint_C y\,dx \overset{\text{or}}{=} \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$ C R

Surface integral $= \iint_S g(x,y,z) = \iint_{R_{xy}} g(x,y,f(x,y))\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA$

Flux of $F(x,y,z)$ over surface S: $\iint_S F \cdot n\,dS$, متجه وحده n عمودي على السطح S خارجا

لا يكتب في هذا الهامش

Divergence Theorem : $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_Q \nabla\cdot F\,dV$



S : Surface

Q : المنطقة في الفراغ التي داخل S

n : متجه عمودي على السطح S خارجاً وحدة

STOKE's Theorem : $\oint_C F\cdot dr = \oint_C F\cdot T\,ds = \underbrace{\iint_S (\text{curl}\,F)\cdot n\,ds}_{\text{surface integral}}$

line integral

$$n = \frac{\nabla g(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|}$$

و g نجعل معادلة السطح صفرية

كيفية حساب surface integral

$$\iint_{R_{xy}} \text{curl}\,F \cdot \ldots \qquad \underbrace{dA}_{ds}$$

اسقاط السطح في المستوى xy (أي نضع z=0 في معادلة السطح)

(وحتى في) الواقع $z = 0$

$$\oint_C f(x,y,z)\,ds$$

$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$

$$ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$