جامعة الملك سعود
King Saud University

Summary of Math-204

(All material only in 11 pages)

Prepared by:

Lecturer: Fawaz bin Saud Al-Otaibi

Mathematics department-KSU

$y' = \frac{dy}{dx}$ ← تذكر

لا يكتب في هذا الهامش

IVP

Determine ~~Sketch~~ and sketch the largest region of the xy-plane for which the IVP: ..... has unique solution

Solution: $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$ — ١- نكتب المعادلة على شكل

$f(x,y) = \ldots$ — ٢- نسمي

(من ١٠١ ريض) ٣- نحدد $f(x,y)$ is continuous on $\ldots = R_1$

(من ١٠١ ريض) ٤- نحدد $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ is continuous on $\ldots = R_2$

٥- IVP has unique solution $R_1 \cap R_2 = R$

٦- نرسم المنطقة R

٧- نضع النقطة (x_0, y_0) $(y(x_0) = y_0)$ على الرسم وتظلل الـ region التي تقع فيها (x_0, y_0)

region تعني مجموعة مفتوحة ومترابطة

Separable D.E

١- نحول المعادلة في النهاية إلى الشكل: — بعوامل مشتركة أو قسمة أو نقل

$(\ldots\ldots)\,dx = (\ldots\ldots)\,dy$

مقدار فيه x فقط — مقدار فيه y فقط

٢- نكامل الطرفين ونضع الثابت c لأحد الطرفين فقط

Homogeneous D.E

لإثبات أنها Homo: نضع tx بدل x و ty بدل y ← لو اختفت t فهي

طريقة حلها: إما نضع $y = ux$ أو $x = uy$

$dy = u\,dx + x\,du$ | $dx = u\,dy + y\,du$

تتحول إلى D.E بين: u و x نوعها Separable | تتحول إلى D.E بين: u و y نوعها separable

اختيار إحدى الفرضيتين بناءً على:

اللي مضروب بعدد حدود أقل يكون في الفرضية ليسار ($y = \ldots$ أو $x = \ldots$)

Appropriate Substitution

(أ) نضع $u = ax + by + c$

تتحول لمعادلة تفاضلية بين u و x (من الأنواع السابقة)

(ب) أو نضع $u = \ldots\ldots$ (تعويضة مناسبة)

لا يكتب في هذا الهامش

Exact D.E

١- نحولها إلى: $(M)dx + (N)dy = 0$ ٢- تكون Exact إذا: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

٣- نحلها كما يلي:

$$f = \int M\,dx + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\dots) + g'(y)$$

$$N = \dots + g'(y)$$

$$g(y) = \checkmark$$

G.S is $f = c$

Not exact converted to Exact

١- نحولها إلى: $(M)dx + (N)dy = 0$ ٢- تكون not exact إذا $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

٣- نحلها كما يلي:

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) =$ دالة في x فقط → $e^{\int}$

← نضرب μ في المعادلة أعلاه

الجديدة تصبح exact (ونتأكد من ذلك)

← نحل الجديدة بموضوع exact

أو

$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) =$ دالة في y فقط → $e^{\int}$

← نضرب μ في المعادلة أعلاه

الجديدة تصبح exact (ونتأكد من ذلك)

← نحل الجديدة بموضوع exact

Integrating factor

Linear D.E

١- نحول المعادلة إلى ← $y' + P(x)y = Q(x)$: الشكل العام

٢- ~~...~~ نوجد: $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$

~~G.S ... y =~~

٣- نوجد الحل العام:

$$G.S \Rightarrow y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu \cdot Q(x)\,dx + c\right]$$

Bernoulli D.E

١- نحول المعادلة إلى ← $y' + P(x)y = Q(x)y^n$: الشكل العام

٢- نقسم المعادلة على y^n

٣- نضع $w = y^{1-n}$ ← $\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

٤- نعوض بما ذكر في (٣) في المعادلة أعلاه

٥- نحصل على معادلة جديدة بين w و x ونوعها Linear

٦- نحل الجديدة بموضوع Linear

٧- نرجع من w ← y

إستنتاج: $\frac{dN}{dt} \approx \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = k \cdot \frac{1}{N} \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int k\,dt$

لا يكتب في هذا الهامش

$\ln(N) = kt + c_1$

$N = e^{c_1} \cdot e^{kt} = ce^{kt}$

$N(t) = ce^{kt}$

t time

N Population

c و k ثوابت لابد نوجدها (بتطبيق معطيات السؤال)

(*) مفهوم half life ← الزمن الذي تكون يوجد نصف الكمية (التعداد الأصلي)

$T(t) = T_s + ce^{kt}$

T temprature

t time

T_s درجة حرارة المحيط

Surronding

c و K ثوابت لابد نوجدها (بتطبيق معطيات السؤال)

إستنتاج:

~~$T(t) = T_s$~~

$\frac{dT(t)}{dt} \approx T(t) - T_s$

$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_s)$

$\int \frac{dT}{T - T_s} = \int k\,dt$

$\ln(T - T_s) = kt + c_4$

$e^{\ln(T - T_s)} = e^{c_4} e^{kt}$

$T - T_s = ce^{kt}$

$T = T_s + ce^{kt}$

Orthogonal Trajectors of $y = C\sin(x)$

(1) أولاً: نوجد c

$c = \frac{y}{\sin x}$

(2) نشتق الطرفين بالنسبة لـ x

$0 = \frac{\sin x \cdot y' - \cos x \cdot y}{\sin^2 x}$

(3) نوجد y'

$y' = \frac{\cos x \cdot y}{\sin x}$

(4) نقلب y' ونضربها بـ -1

$y' = -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{y}$

(5) نحل الـ D.E الأخيرة

$\int y\,dy = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

O.T → $\frac{y^2}{2} = \ln|\cos x| + C$

Chapter 4

Functions: $f_1, f_2, \dots, f_n$ on Interval I

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$\neq 0 \ \forall x \in I \rightarrow$ Linear Ind

$= 0 \rightarrow$???

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$

$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \rightarrow$ Linear Ind

$c_i \neq 0$ for some $i \rightarrow$ Linear dep

متطابقات:

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Unique Solution of IVP: largest Interval

$$(x-2)y'' + \frac{x}{\sqrt{3-x}}y' + \frac{1}{x^2-4}y = \cos(x)$$

$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

$a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$, $f(x)$

$a_2(x) = x-2$ is continous on $\mathbb{R}$

$a_1(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x}}$ is continous on $(-\infty, 3)$

$a_0(x) = \frac{1}{x^2-4}$ is continous on $\mathbb{R} - \{2,-2\}$

$f(x) = \cos(x)$ is continous on $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cap (-\infty,3) \cap \mathbb{R}-\{2,-2\} \cap \mathbb{R}$

$= (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,3)$

zeros of $a_2(x)$ is $x=2$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \infty$

$1 \in \boxed{(-2,2)}$

Fundemental Set of Solution of D.E: $y_1, y_2, y_3, \dots$

نثبت شيئين

أنه كل واحد منها هو حل للمعادلة (نوجد مشتقاتها ونعوض في المعادلة)

$y_1, y_2, y_3, \dots$ are linearly independent

لا يكتب في
هذا الهامش

Reduction of order : للمعادلة من الرتبة 2

1- Put $y = y_1 \cdot u$ (y_1 حل للمتجانسة معطى في السؤال)

2- تعويض y ومشتقاتها في المعادلة الأصلية ، ولابد تختفي الحدود التي فيها u

3- هدفنا نوجد u
بأننا نفرض $w = u'$

4- نستطيع معادلة من الرتبة الأولى بين w و x ونحلها

5- الآن نوجد u بالمكاملة

(* في التكاملات لا يكتب ثوابت التكاملات c_1 و c_2 *)

جزء من الدرس

Formula :

للمعادلة المتجانسة من الرتبة 2 لإيجاد حل ثان y_2

1- القانون → $y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$; (y_1 يُعطى في السؤال)

$p(x) = \frac{\text{معامل } y'}{\text{معامل } y''}$

2- General solution is $y_G = c_1 y_1 + c_2 y_2$

.... = 0 ← Homogenous high order D.E (المعاملات ثوابت)

auxiliary equation: m^3, m^2, m, a_0
↓ y''', y'', y', y

1- نطلع منها roots

2- Roots:

Complex $a+ib$

3- $y_H = e^{ax}(c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx))$

$a+ib$ مكررة

$y_H = e^{ax}(c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx))$
$+ e^{ax} \cdot x (c_3 \cos(bx) + c_4 \sin(bx))$

real $m_1, m_2, \ldots$

$y_H = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots$

real $m_1 = m_2$ مكررة

$y_H = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$

ملاحظة : إذا كان الجذر مكرر مرتين نزود حداً آخر فيه x^2 ، وهكذا دواليك

ملاحظة : عدد الثوابت في y_H يساوي رتبة D.E

لا يكتب في هذا الهامش

تابع لآخر موضوع

يعطيك مجموعة من الحلول وبطلب المعادلة D.E التفاضلية

مثال (1)

$10\cos(4x)\ ,\ -5\sin(4x)\ ,\ x$

$m = 0+4i$
$= 0-4i$
$(m+4i)(m-4i)$

$m=0$ مكررة
$m^2 = 0$
m^2

$\Rightarrow m^2(m-4i)(m+4i) = 0$
$m^2(m^2+16) = 0$
$m^4 + 16m^2 = 0$
$y'''' + 16y'' = 0$ للتأكد $m=0$ مكررة $, m = \pm 4i$

$y_H = c_1 e^{0\cdot x} + c_2 x e^{0\cdot x} + c_3\cos(4x) + c_4\sin(4x)$

حلول

فقط لك
$c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ و $c_3 = 10$ و $c_4 = -1$

$10\cos(4x)\ ,\ -5\sin(4x)\ ,\ x$ (حلول)

أو بشكل آخر من الأسئلة مثال: أوجد الـ D.E التي جذور المعادلة المميزة لها هي
$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = -1$
$m_4 = 0, m_5 = 0$
الحل:
- - - - - - -
اكملها باتباع أنظر مذكرة التمارين

Cauchy-Euler D.E
$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f$
$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية

Homogenous $(f=0)$: $y_G = y_H$

له إحدى طريقتين:

$x = e^t$; $x > 0$ أو $x = -e^t$ إذا $x < 0$
$dx = e^t\,dt$
ونعوض في D.E
نحصل بين t و y
ذات معاملات ثوابت
ونحلها كما درس المتجانسة (الصفحة السابقة)

$y = x^m$
ونعوض بـ y ومشتقاتها في D.E ونوجد قيم m

المرتبة الثانية: $a_2 m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 = 0$

$\Rightarrow y_H = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \dots$ لو في تكرار نضرب بـ $\ln x$ ، $m_1, m_2, \dots \in \mathbb{R}$

$y_H = c_1 x^a \cos(b\ln x) + c_2 x^a \sin(b\ln x)$
$m = a \pm ib$

Non-Homogenous: $y_G = y_H + y_p$

نوجدها بطريقة y_p
Variation of parameters (انظر الصفحة القادمة)

$$\boxed{y_G = y_H + y_p}$$

لا يكتب في هذا الهامش

لازم معاملات المشتقات ثوابت هنا حسب

(Undetermined Coefficients method) هدفها إيجاد y_p

١- نكتب شكل y_p بناءً على الطرف الأيمن الذي يلزم يكون من الأنواع التالية: e^{3x} أو كثيرة حدود أو $\cos(ax)$ أو $\sin(ax)$ أو ضربها ببعض أو جمع حدود من أشكالها

وكذلك بناءً على جذور المعادلة المساعدة المستخرجة لإيجاد y_H

٢- لكتابة y_p نستعمل الجدول التالي:

الطرف الأيمن	شكل y_p
$x^n e^{ax}$	$e^{ax}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0)$
$\cos(bx)\, e^{ax}$ or $\sin(bx)\, e^{ax}$	$e^{ax}(A\cos(bx) + B\sin(bx))$
$x^n e^{ax}\cos(bx)$ or $x^n e^{ax}\sin(bx)$	$e^{ax}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0)\cos(bx) + e^{ax}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_0)\sin(bx)$
لو كان a مكرر مرة في جذر المعادلة المساعدة	multiply by x
〃 〃 〃 مرتين 〃	〃 〃 x^2
لو كان $a+ib$ من المعادلة المساعدة	〃 〃 x
... + ...	$y_{p_1} + y_{p_2}$

٣- نوجد الثوابت التي في y_p: بأن نعوض بـ y_p ومشتقاتها في المعادلة الأصلية ونقارن المعاملات

(Variation of Parameters) هدفها إيجاد y_p

معاملات المشتقات أي شي حسب

وتستخدم في حالة: الطرف الأيمن ليس من الأنواع في الطريقة السابقة

أو في حالة: معادلة كوشي - أويلر غير المتجانسة

١- نوجد y_H: مثلاً $y_H = c_1 \underbrace{e^{3x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{-3x}}_{y_2}$

٢- نكتب y_p: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 e^{3x} + u_2 e^{-3x}$

والآن المطلوب إيجاد $u_1 = ?$ و $u_2 = ?$

٣- $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \dots$ ، $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$ ، $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$

$f(x)$ هي: الطرف الأيمن للمعادلة الأصلية بعد جعل أعلى رتبة معاملها 1

٤- $u_1' = \frac{W_1}{W}$; $u_2' = \frac{W_2}{W}$

٥- نكامل

٦- نرجع نعوض في y_p ← ولا نكتب ثوابت التكامل

Power Series (about $x=0$ ordinary point)

(أكثر الأسئلة $x=0$ ، ويمكن يعين غير ٥ لكن نادر)

1 - Put $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

2 - $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

3 - نعوض بـ y و y' و y'' في D.E

4 - نضع كل أس x تساوي : K بنعمل العراد

4.5 K هو العراد

5 - نوحد بداية العراد K إلى 2 مثلا (الأكبر عدد)

6 - نعمل مقارنة المعاملات

حتى نوجد صيغة لـ $a_{K+2} = \dots$

7 - نضع $K=2$ ، $K=3$ ، $K=4$ ، .....

(حسب الطلب في السؤال)

8 - نكتب الحل العام y بدلالة c_0 و c_1 فقط

9 - لو الطرف الأخير ثم نكتبها e^x $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

أو $\sin(x) \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ، وهكذا

System of D.E's → أوجد x و y

هنا في هذا الدرس: تذكر : x دالة متغيرها t و y دالة متغيرها t

1 - نحول النظام في السؤال إلى operators

← $x' \to Dx$, $x'' \to D^2x$, $y' \to Dy$, $y'' \to D^2y$

2 - نرتب النظام كالتالي :

العمود الأول : العمود الثاني

لـ x : لـ y

3 - نحذف إما x أو y (أيهما أسهل)

4 - تظهر لنا معادلة تفاضلية نحلها بالدروس السابقة

5 - الذي أوجدناه نعوض به في إحدى المعادلتين (أيهما أفضل) لإيجاد الآخر

لا يكتب في
هذا الهامش

Orthogonal set of functions:

$\{f_n ; n \in N\}$ orthogonal if : $\int_a^b f_n(x) f_m(x)\,dx = 0$ on $[a,b]$, $n \neq m$

Norm of $f_n(x)$ is : $\|f_n(x)\| = \left[\int_a^b f_n^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$

Corresponding orthonormal of $\{f_n(x)\}$ is :

$$\left\{\frac{f_n(x)}{\|f_n(x)\|} ; n \in N\right\}$$

انتبه: انظر للدالة $f(x)$ هل هي زوجية أو فردية لان ذلك يسهل الحسابات

$f(x+2p) = f(x)$

Fourier Series

Fourier series of f defined on interval $(-P,P)$ is:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx$$

نذكر

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ← odd

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ← even

Remark: (1) At the points x where f is not continuous, the Fourier Series converges to $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

$f(x^+) = \lim_{x \to x^+} f(x)$

$f(x^-) = \lim_{x \to x^-} f(x)$

(2) Also for $x = \pm P$, the Fourier Series Converges to : $\dfrac{f(-T)^+ + f(T)^-}{2}$, $f(-T)^+ = \lim_{x \to -T^+} f(x)$

$f(T)^- = \lim_{x \to T^-} f(x)$

نذكر

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\sin(n\pi) = 0$

on $(0,P)$ is ~~$2T = \frac{2P}{2}$~~

$$a_0 = \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)dx$$

Fourier Cosine Series

f is even function on $(-p,p)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

Fourier Sine Series

f is odd function on $(-p,p)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

on ~~(-p,p)~~ $(0,p)$

نفس القوانين أعلاه

لاحظ في الاختبار عكسه

لا يكتب في هذا الهامش

لابد لأنه ↓ تكتب

Fourier Integral

Fourier integral of function $f(x)$ on $(-\infty, \infty)$ is:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos(\alpha x) + B(\alpha) \sin(\alpha x)] \, d\alpha$$

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) \, dx$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) \, dx$$

__Remark:__ ~~f(x) conv~~ If x is point of discontinuity, then ~~so~~ fourier Integral converges to: $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$