التحليل الحقيقي

إبراهيم العليان

جامعة الملك سعود

المحتويات

توبولوجي الأعداد الحقيقية

نقاط التراكم والنقاط المعزولة

تعريف

نقول إن $x \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عنصرا $a \in A$ و $a \neq x$ يرمز لنقاط تراكم A بالرمز $\widehat{A}$.

نقاط التراكم والنقاط المعزولة

تعريف

نقول إن $x \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عنصرا $a \in A$ و $a \neq x$ يرمز لنقاط تراكم A بالرمز $\widehat{A}$.

أي لكل جوار V للنقطة x ، فإن

$$V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

نقاط التراكم والنقاط المعزولة

تعريف

نقول إن $x \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عنصرا $a \in A$ و $a \neq x$ يرمز لنقاط تراكم A بالرمز $\widehat{A}$.

أي لكل جوار V للنقطة x ، فإن

$$V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

إذا كانت $x \in A \setminus \widehat{A}$ ، فإن x تسمى نقطة معزولة من نقاط A.

أمثلة

حدد نقاط التراكم والنقاط المعزولة في المجموعات التالية

1. $\{1, 2, 3\}$

أمثلة

حدد نقاط التراكم والنقاط المعزولة في المجموعات التالية

1. $\{1, 2, 3\}$
2. $[0, 1)$

أمثلة

حدد نقاط التراكم والنقاط المعزولة في المجموعات التالية

1. $\{1, 2, 3\}$
2. $[0, 1)$
3. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

ملاحظات

1. من التعريف يتضح أن نقطة التراكم للمجموعة A ليست بالضرورة تنتمي إلى A، بينما النقطة المعزولة تنتمي للمجموعة A.

ملاحظات

1. من التعريف يتضح أن نقطة التراكم للمجموعة A ليست بالضرورة تنتمي إلى A، بينما النقطة المعزولة تنتمي للمجموعة A.
2. $A \ni x$ نقطة معزولة ، إذا وفقط إذا وجد جوار V للنقطة x لا يتقاطع مع A إلا في x ، أي

$$V \cap A = \{x\}$$

ملاحظات

1. $x \in \widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad 0 < |x-a| < \varepsilon$$

2. $x \in \widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان كان كل جوار V للنقطة x يحتوي عددا غير منته من عناصر A .

أمثلة

حدد نقاط التراكم للمجموعات التالية

1. (a, b)

أمثلة

حدد نقاط التراكم للمجموعات التالية

1. (a, b)
2. $\mathbb{Z}$

أمثلة

حدد نقاط التراكم للمجموعات التالية

1. (a, b)
2. $\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Q}$

نقاط التراكم والمتتاليات

نظرية

إذا كانت $x \in \widehat{A}$ فإننا نستطيع اختيار متتالية (x_n) في A ذات عناصر مختلفة بحيث $x_n \to x$. 1

نظرية

1. إذا كانت $x \in \widehat{A}$ فإننا نستطيع اختيار متتالية (x_n) في A ذات عناصر مختلفة بحيث $x_n \to x$.
2. إذ كانت (x_n) متقاربة من x والمجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير منتهية ، فإن $x \in \widehat{A}$.

ملاحظات

1. المجموعة المنتهية ونقاط التراكم
2. المجموعة غير المنتهية ونقاط تراكم.

الفترات المتداخلة

$$I_{n+1} \subset I_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

الفترات المتداخلة

$$I_{n+1} \subset I_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

مبرهنة كانتور للفترات المتداخلة

مبرهنة

لتكن $I_n = [a_n, b_n]$ متتالية من الفترات المتداخلة المحدودة المغلقة، بحيث

$$I_{n+1} \subset I_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

فإن $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

مبرهنة كانتور للفترات المتداخلة

مبرهنة

لتكن $I_n = [a_n, b_n]$ متتالية من الفترات المتداخلة المحدودة المغلقة، بحيث

$$I_{n+1} \subset I_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

فإن $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

إذا كان $\inf\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$ ، حيث $|I_n|$ طول الفترة I_n ، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ يحوي نقطة واحدة فقط

مبرهنة كانتور للفترات المتداخلة

مبرهنة

لتكن $I_n = [a_n, b_n]$ متتالية من الفترات المتداخلة المحدودة المغلقة، بحيث

$$I_{n+1} \subset I_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

فإن $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

إذا كان $\inf\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$ ، حيث $|I_n|$ طول الفترة I_n ، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ يحوي نقطة واحدة فقط

تمرين

1. ماذا لو كانت الفترات مفتوحة؟

تمرين

1. ماذا لو كانت الفترات مفتوحة؟
2. ماذا لوكانت الفترات غير محدودة؟

نظرية بولزانو فايرشتراس للمجموعات المحدودة وغير المنتهية

نظرية

إذا كانت A مجموعة محدودة وغير منتهية، فإن لها نقطة تراكم واحدة على الأقل.

المجموعات المفتوحة والمغلقة

المجموعة المفتوحة

تعريف: الجوار

إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن $V \subset \mathbb{R}$ جوار للنقطة x إذا وجد جوار-ε
$V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ بحيث $V_\varepsilon(x) \subset V$

المجموعة المفتوحة

تعريف: الجوار

إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن $V \subset \mathbb{R}$ جوار للنقطة x إذا وجد جوار-ε $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ بحيث $V_\varepsilon(x) \subset V$

تعريف: المجموعة المفتوحة

نقول إن المجموعة $A \subset \mathbb{R}$ مفتوحة، إذا كان لكل $x \in A$ يوجد جوار V للنقطة x بحيث $V \subset A$

أمثلة

1. (a, b)

أمثلة

1. (a, b)
2. $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ حيث $y \in \mathbb{R}$

أمثلة

1. (a, b)
2. $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ حيث $y \in \mathbb{R}$
3. $[a, b)$

أمثلة

1. (a, b)
2. $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ حيث $y \in \mathbb{R}$
3. $[a, b)$
4. $\mathbb{Z}$

أمثلة

1. (a, b)
2. $\mathbb{R}\backslash\{y\}$ حيث $y \in \mathbb{R}$
3. $[a, b)$
4. $\mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Q}$

نظرية

1. $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مفتوحتان
2. إذا كانت G_λ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda \in \Lambda$ ، فإن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ مجموعة مفتوحة.
3. إذا كانت $G_1, G_2, \ldots, G_n$ مجموعات مفتوحة، فإن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ مجموعة مفتوحة.

النظرية السابقة تبين أن المجموعات المفتوحة تمثل تبولوجي على $\mathbb{R}$.

ملاحظة

المجموعات $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ مجموعات مفتوحة لكل $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n =$$

نظرية

المجموعة غير الخالية $G \subset \mathbb{R}$ مفتوحة، إذا وفقط إذا كانت اتحادا لعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة.

نظرية

المجموعة غير الخالية $G \subset \mathbb{R}$ مفتوحة، إذا وفقط إذا كانت اتحادا لعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة.

المجموعة المغلقة

المجموعة F مغلقة، إذا وفقط إذا كانت متممتها F^c مفتوحة.

أمثلة

1. $[a, b], [a, \infty), (-\infty, b]$
2. $[a, b)$
3. $\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Q}$

نظرية

1. $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مغلقتان .
2. إذا كانت F_λ مجموعة مغلقة لكل $\lambda \in \Lambda$ ، فإن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ مجموعة مغلقة.
3. إذا كانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ مجموعات مغلقة، فإن $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مجموعة مغلقة.

نظرية

1 $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مغلقتان .

2 إذا كانت F_λ مجموعة مغلقة لكل $\lambda \in \Lambda$ ، فإن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ مجموعة مغلقة.

3 إذا كانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ مجموعات مغلقة، فإن $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مجموعة مغلقة.

ملاحظة $F_n = \left[\frac{1}{n}, 2\right]$ مغلقة لكل $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n =$$

نظرية

التقارير الثلاثة متكافئة :

1. F مغلقة.
2. $F \subset \widehat{F}$.
3. F تحتوي نهايات متتالياتها المتقاربة، أي إن

$$x_n \in F, \;\; x_n \longrightarrow x \quad \Longrightarrow \;\; x \in F$$

نظرية

التقارير الثلاثة متكافئة :

1. F مغلقة.
2. $\widehat{F} \subset F$.
3. F تحتوي نهايات متتالياتها المتقاربة، أي إن

$$x_n \in F,\ \ x_n \longrightarrow x \quad \Longrightarrow \ \ x \in F$$

مثال أثبت أن المجموعة $A = (0, 1)$ ليست مغلقة.

مجموعة كانتور الثلاثية

$$F_0 = [0, 1]$$

نستبعد الثلث الأوسط $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ، فنحصل على

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

ثم نستبعد الثلث الأوسط من كل فترة ناتجة، وهكذا فنحصل على

$$F_0, F_1, F_2, \ldots$$

نعرف مجموعة كانتور بأنها

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

ملاحظات

1. F مغلقة.

ملاحظات

1. F مغلقة.
2. $F \sim [0,1]$ وبالتالي فإن مجموعة كانتور غير قابلة للعد.

ملاحظات

1. F مغلقة.
2. $F \sim [0,1]$ وبالتالي فإن مجموعة كانتور غير قابلة للعد.
3. طول الفترات المستبعدة يساوي 1.

ملاحظات

1. F مغلقة.
2. $F \sim [0,1]$ وبالتالي فإن مجموعة كانتور غير قابلة للعد.
3. طول الفترات المستبعدة يساوي 1.
4. كل نقطة في F نقطة تراكم.

تمرين

هل $\frac{1}{4}$ تقع في حدود أحد الفترات المفتوحة؟

تمرين

هل $\frac{1}{4}$ تقع في حدود أحد الفترات المفتوحة؟

هل $\frac{1}{4} \in F$

تعريف

1 نعرف داخل (interior) A بأنه أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A ويرمز له بالرمز A° .

2 نعرف إنغلاق (closur) A بأنه أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A ويرمز له بالرمز $\overline{A}$.

3 نعرف حدود (boundary) A بأنها المجموعة $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

مثال

لتكن $A = (0,1]$ ، فإن

$$A^\circ =$$

$$\overline{A} =$$

$$\partial A =$$

المجموعات المتراصة

الغطاء المفتوح

تعريف

إذا كانت D مجموعة في $\mathbb{R}$، فإن المجموعة $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ حيث $G_\lambda \subset \mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda \in \Lambda$ تسمى غطاء مفتوحا للمجموعة D، إذا كانت

$$D \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

أمثلة

1. $\{(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للفترة $(0,\infty)$.

أمثلة

1. $\{(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للفترة $(0,\infty)$.
2. $\{(n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للأعداد الطبيعية.

أمثلة

1. $\{(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للفترة $(0,\infty)$.
2. $\{(n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاء مفتوح للأعداد الطبيعية.
3. $\{\mathbb{R}\}$ غطاء مفتوح لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

المجموعة المتراصة

تعريف

المجموعة $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، إذا كان كل غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة D يحوي مجموعة جزئية منتهية $\{G_{\lambda_1}, \ldots G_{\lambda_n}\}$ تغطي D.

أمثلة

1. $\mathbb{R}$

أمثلة

1. $\mathbb{R}$
2. $(0,2)$

أمثلة

1. $\mathbb{R}$
2. $(0,2)$
3. $[0,1]$

أمثلة

1. $\mathbb{R}$
2. $(0,2)$
3. $[0,1]$
4. $\{x_1,\dots,x_n\}$

نظرية

نظرية

إذا كانت المجموعة D متراصة، فإنها محدودة.

نظرية

نظرية

الفترة $I = [a, b]$ متراصة.

نظرية هايني بوريل

نظرية

المجموعة D متراصة، إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

نظرية

نظرية

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ ، فإن التقارير التالية متكافئة:

1. المجموعة D متراصة.
2. المجموعة D مغلقة ومحدودة.
3. لكل متتالية عناصرها في D، يوجد متتالية جزئية متقاربة نهايتها في D.