| جامعة الملك سعود King Saud University | كلية العلوم - قسم الرياضيات | الاختبار النهائي للمقرر ٢٠٩ ريض<br>الفصل الدراسي الأول ١٤٤٣ هـ<br>المدة: ثلاث ساعات |
|---|---|---|

درجات

**السؤال الأول : (٩ درجات)**

[1+1] (١) اختبر تقارب أو تباعد كلٍّ من المتتاليتين التاليتين: $\{\ln(n+1)-\ln n\}$ ، $\{n\, tan\left(\frac{1}{n}\right)\}$.

(٢) اختبر تقارب أو تباعد كلٍّ من المتسلسلات التالية باستخدام الاختبار المقترح (أو غيره):

[1,5] (أ) باستخدام اختبار التكامل $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

[1,5] (ب) باستخدام اختبار المقارنة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.

[1,5] (ج) باستخدام اختبار الجذر النوني $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^{2n}}$.

[1+1,5] (د) باستخدام اختبار المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$.

---

**السؤال الثاني: (٦ درجات)**

[3] (١) أوجد نصف قطر وفترة تقارب متسلسلة القوى التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}x^n$ .

[1,5] (٢) مثل الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x}$ بمتسلسلة قوى.

[1,5] (٣) استخدم متسلسلة ماكلورين لدالة جيب التمام التالية: $\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,t^{2n}+\cdots,\ t\in\mathbb{R}$

لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل التالي: $\int_0^1\cos(x^2)\,dx$.

---

**السؤال الثالث: (٧ درجات)**

(١) لتكن $f$ الدالة المعرفة بـ $f(x)=x$ على الفترة $(-\pi,\pi)$، ولنفرض أنها دورية على $\mathbb{R}$ (أي $f(x+2\pi)=f(x)$).

[3] (أ) جد متسلسلة فورييه (Fourier series) للدالة $f$ على الفترة $(-\pi,\pi)$.

[1] (ب) استنتج من (أ) قيمة المجموع التالي: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

فضلا أقلب الورقة

[2] (٢) أوجد تكامل فوريه (Fourier integral) للدالة: $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 2, & -1<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$ على الفترة $(-\infty,\ \infty)$،

[1] ثم استنتج قيمة التكامل المعتل: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ d\alpha$ .

---

**السؤال الرابع: (١٨ درجة)**

[2] (١) إذا كانت $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$، فبين أن $y\ \frac{\partial f}{\partial x}-x\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$.

(٢) أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

[4] (أ) المعادلة التفاضلية المتجانسة: $(x-y)\ dx+(3x+y)\ dy=0$ .

[5] (ب) المعادلة التفاضلية غير التامة (طريقة العامل المكامل): $(4xy-3y^2-x)dx+x(x-2y)dy=0$ .

[3] (ج) المعادلة التفاضلية الخطية: $xy'+(2x-3)y=4x^4$.

[4] (د) المعادلة التفاضلية لبيرنولي: $y'-y=e^{2x}\ y^3$.

---

تصحيح الاختبار النهائي 209 ريض
للفصل الأول 1443 هـ

السؤال الأول (9 درجات)

① • $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1)-\ln n = \infty-\infty$ IF

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

1

$$\lim_{n\to+\infty} [\ln(n+1)-\ln n] = \ln 1 = 0$$

• $\lim_{n\to+\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(1/n)}{(1/n)} = \frac{0}{0}$

$t = 1/n$ $$= \lim_{t\to0^+} \frac{\tan t}{t} = \lim_{t\to0^+} \frac{\sec^2 t}{1}$$

1

$$\lim_{n\to+\infty} n\tan(1/n) = \lim_{t\to0} \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 = 1$$

ⓒ (f) $\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$ متسلسلة موجبة ، نستخدم اختبار التكامل

نضع $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ لكل $x>2$

$$f'(x) = -\frac{\left[(\ln x)^2 + 2x(\ln x)\frac{1}{x}\right]}{x^2(\ln x)^4} < 0$$

وبالتالي $f$ تناقصية على $(2,\infty)$

1,5

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$u = \ln x$
$du = \frac{dx}{x}$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} > 0$$

فنستنج أن $\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$ متقاربة.

(ب)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$ متسلسلة موجبة

حيث $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} > 0$ لكل $n \geq 0$

نستخدم اختبار المقارنة:

1,5

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} = b_n$ لكل $n \geq 1$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ هي متسلسلة p- حيث

$p = 3/2 > 1$ فهي متقاربة فإن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ متقاربة.

(ج)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{2n}} = \sum_{n=1} a_n$$ متسلسلة موجبة

حيث $a_n = \frac{5^n}{n^{2n}} > 0$ لكل $n \geq 1$

نستخدم اختبار الجذر النوني،

1,5

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5^n}{n^{2n}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0 = L$$

بما أن $L < 1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{2n}}$ متقاربة.

(د)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1} (-1)^n a_n$$ هي متسلسلة متردّدة.

- ندرس $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ موجبة

1

باستخدام اختبار نهاية المقارنة: نأخذ $b_n = \frac{1}{n}$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متسلسلة توافقية متباعدة

فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right|$ متباعدة.

لذا نستخدم لعين اختبار المتسلسلات المتناوبة.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

(2)

. $(a_n)$ متناقصة حتماً $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$x>1$ لكل $f'(x) = \frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$

1,5

فنستنتج أن $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right)$ متقاربة تقاربا شرطيا.

<u>السؤال الثاني</u> (6 درجات)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ متسلسلة القوى.

ندرس $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ ونستخدم اختبار النسبة

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^4} \frac{n^4}{2^n x^n}\right|$$

1,5

$$= 2|x| \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^4$$

لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ $\quad = 2|x| = L$

- إذا كان $L<1 \iff 2|x|<1 \iff |x|<1/2 \iff -1/2 < x < 1/2$
فإن $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} x^n\right)$ متقاربة تقاربا مطلقا.

- إذا كان $L>1$ يعني $x \in \mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]$ فإن $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} x^n\right)$ متباعدة.

- إذا كان $L=1$ يعني $x=-1/2$ أو $x=1/2$.

• عندما $x=-1/2$ فإن المتسلسلة تصبح $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\right)$ متناوبة
ومتقاربة تقاربا مطلقا باستخدام اختبار متسلسلة-p
حيث $p=4>1$

• عندما $x=1/2$ فإن المتسلسلة تصبح $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\right)$
متقاربة باستخدام اختبار متسلسلة - p.

فنستنتج أن فترة التقارب هي $[-1/2, 1/2]$

1,5

ونصف قطر التقارب $R = 1/2$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$ ②

لكل $-1 < x < 1$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

(1,5)

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

③ بتعويض $t$ بـ $x^2$ في متسلسلة ماكلورين لدالة جيب التمام ،

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \cdots$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

(1,5) وبالتالي

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx \approx \int_0^1 \left[1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}\right] dx$$

$$\approx \left[x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{9\times 24}\right]_0^1$$

$$\approx 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{9\times 24}$$

السؤال الثالث (7 درجات)

① (أ) $f$ دالة متصلة على $(-\pi, \pi)$ فهي تحظى بمتسلسلة فورية

لكل $-\pi < x < \pi$ $\quad f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$

(1) بما أن $f(x) = x$ فردية فإن $a_0 = 0$ و $a_n = 0$ لكل $n \geq 1$.

وبالتالي

لكل $-\pi < x < \pi$ $\quad x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

حيث

لكل $n \geq 1$. $\quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\,dx$

$$\begin{aligned} u(x) &= x \\ v'(x) &= \sin(nx) \end{aligned} \implies \begin{aligned} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -\frac{\cos(nx)}{n} \end{aligned}$$

(1)

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n}\left[x \cos(nx)\right]_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{n}\, \pi \cos(n\pi)$$

3/1

وبالتالي فإن : $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

إذاً لكل $-\pi < x < \pi$ ,

1 $$(*) \quad \boxed{x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)}$$

(ب) بتعويض قيمة $x$ بـ $\pi/2$ في $(*)$ ; بما أن

$\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 ; & n = 2k \\ (-1)^k ; & n = 2k+1 \end{cases}$ فإن لدينا

1 $$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1+1}}{(2k+1)} (-1)^k .$$

يعني

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

2 بما أن $f$ متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ فإن تكامل فورية

1 $$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} [A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)]\, d\alpha$$

وبما أن $f$ هي دالة زوجية فإن $B(\alpha) = 0$

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\, dx$$

$$A(\alpha) = \int_{-1}^{1} 2\cos(\alpha x)\, dx = 4\int_0^1 \cos(\alpha x)\, dx$$

1 $$A(\alpha) = 4\,\frac{[\sin(\alpha x)]_0^1}{\alpha} = 4\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

وبالتالي لكل $-1 < x < 1$ , $2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos(\alpha x)\, d\alpha$

بتعويض قيمة $x$ بـ $0$, نجد أن

1 يعني $2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha .$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \pi/2 .$$

السؤال الرابع: ( 18 درجة )

(1)

( قابلة للتفاضل كتحصيل الشيئين دالة أسية و دالة كثيرة حدود ) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\, e^{x^2+y^2}$$

(2)

و بالتالي

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\, e^{x^2+y^2} - 2xy\, e^{x^2+y^2}$$

$$= 0$$

(2) (أ)

$$(*)\quad (x-y)\,dx + (3x+y)\,dy = 0$$

$$(x-y)\,dx = -(3x+y)\,dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{3x+y} = f(x,y)$$

نضع $y = ux$ :

$$f(x,ux) = \frac{ux-x}{3x+ux} = \frac{u-1}{3+u} = F(u)$$

و بالتالي $(*)$ هي معادلة تفاضلية متجانسة.

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u = F(u)$$

$$x\frac{du}{dx} = F(u) - u$$

(4)

$$\frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{du}{\frac{u-1}{3+u} - u} = \frac{(3+u)}{(u-1)-u(3+u)}\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-(3+u)}{(u+1)^2}\,du = \frac{dx}{x}$$

بتكامل طرفي المعادلة

$$3\int \frac{-du}{(1+u)^2} - \int \frac{u+1-1}{(u+1)^2}\,du = \ln|Ax|$$

$$2\int \frac{-du}{(1+u)^2} - \int \frac{du}{u+1} = \ln|Ax|$$

$$\frac{2}{1+u} - \ln|1+u| = \ln|Ax|$$

الحل العام هو: $\dfrac{2x}{x+y} - \ln|1+y/x| = \ln|Ax|$ حيث $A \in \mathbb{R}$

4

ب) $(\star)\ (4xy-3y^2-x)\,dx + x(x-2y)\,dy=0$

تكتب على الشكل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy=0$

حيث $M(x,y) = 4xy-3y^2-x$

كثيرات حدود في متغيرين $N(x,y) = x(x-2y) = x^2-2xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4x-6y$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2x-2y$$

بما أن $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ فان $(\star)$ غير تامة فلنبحث عن عامل تكميلي

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x(x-2y)}(4x-6y-2x+2y)$$

$$f(x) = \frac{1}{x(x-2y)}(2x-4y) = \frac{2(x-2y)}{x(x-2y)} = \frac{2}{x}$$

(العامل التكميلي لـ $\star$) $\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

بضرب طرفي المعادلة $(\star)$ بـ $\mu$، نحصل على:

$$\star\star \quad (4x^3y-3x^2y^2-x^3)\,dx + x^3(x-2y)\,dy=0$$

تكتب على $M_1(x,y)\,dx + N_1(x,y)\,dy=0$ حيث

$$M_1(x,y) = 4x^3y-3x^2y^2-x^3$$
$$N_1(x,y) = x^3(x-2y) = x^4-2x^3y$$

5

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(x,y) = 4x^3-6x^2y.$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial x}(x,y) = 4x^3-6x^2y.$$

بما أن $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$ فان $(\star\star)$ هي تامة و بالتالي يوجد دالة $F(x,y)$

بحيث $dF(x,y) = M_1(x,y)\,dx + N_1(x,y)\,dy$

إذا لدينا

$$\begin{cases} (1)\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M_1(x,y) = 4x^3y-3x^2y^2-x^3. \\ (2)\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N_1(x,y) = x^4-2x^3y. \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ $x$،

$$F(x,y) = \int \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx = \int [4x^3y-3x^2y^2-x^3]\,dx$$

$$F(x,y) = x^4y - x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + \varphi(y)$$

باشتقاق الحسين بالنسبة لـ $y$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^4-2x^3y + \varphi'(y)$$

بالمقارنة مع (2) ، نجد أن $\varphi'(y)=0$ و بالتالي $\varphi=$ ثابت

فان الحل العام لـ (★) هو $F(x,y)=c \Leftrightarrow$ $\boxed{x^4 y - x^3 y^2 - \frac{x^4}{4} = c}$

(ج) المعادلة التفاضلية $xy' + (2x-3)y = 4x^4$ ، $x \neq 0$ تكتب أيضا

$y' + \left(2 - \frac{3}{x}\right) y = 4x^3$ فهي تكتب على الشكل $y' + P(x)y = Q(x)$

حيث $P(x) = 2 - 3/x$ $\quad x \neq 0$

$Q(x) = 4x^3$

يعني معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.

فان العامل التكميلي : $\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int (2-3/x)dx}$

$$\mu(x) = e^{2x - 3\ln x} = e^{2x} \cdot e^{\ln(1/x^3)} = \frac{e^{2x}}{x^3}.$$

و الحل العام هو

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(t)\, Q(t)\, dt$$

$$y(x) = x^3 e^{-2x} \int \frac{e^{2t}}{\cancel{t^3}} (4\cancel{t^3})\, dt$$

3

$$y(x) = 4x^3 e^{-2x} \left[ \frac{e^{2x}}{2} + a \right]$$

$$\boxed{y(x) = \underbrace{C x^3 e^{-2x}}_{y_C} + \underbrace{2x^3}_{y_p}} , \quad c \in \mathbb{R}$$

(د) المعادلة التفاضلية : $y' - y = e^{2x} y^3$ تكتب على الشكل $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

حيث $P(x) = -1$ ، $Q(x) = e^{2x}$ و $n = 3$ هي معادلة بيرنوليو.

بقسمة طرفي المعادلة على $y^3$ ، $y' y^{-3} - y^{-2} = e^{2x}$

نضع $z = y^{1-n} = y^{-2}$ فان $z' = -2 y^{-3} y'$

و بالتالي $-\frac{1}{2} z' - z = e^{2x}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{z' + 2z = -2e^{2x}}$ معادلة تفاضلية خطية

العامل التكميلي : $\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$ فان

4

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(t) \left(-2 e^{2t}\right) dt$$

$$= e^{-2x} \int e^{2t} \left(-2 e^{2t}\right) dt$$

$$= -2 e^{-2x} \left[ \frac{e^{4x}}{4} + a \right]$$

$$z(x) = C e^{-2x} - \frac{e^{2x}}{2} , \quad C \in \mathbb{R}$$

بما أن $z = y^{-2}$ فان

$$\boxed{y(x) = z^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{C e^{-2x} - \frac{e^{2x}}{2}}}}$$