جـامـعـة
الملك سعود
King Saud University

الاختبار الشهري للمقرر ٢٠٩ ريض للفصل الثاني ١٤٤٣ هـ
مدة الاختبار: ساعتان

السؤال الأول (٤ درجات):

اختبر تقارب المتتاليتين التاليتين: $\left\{\dfrac{3^{n+1}}{2^n+3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\left\{ne^{-n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

السؤال الثاني (٦ درجات):

اختبر تقارب المتسلسلتين التاليتين: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (اختبار الجذر)، $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ (اختبار المقارنة، أو اختبار نهاية المقارنة).

السؤال الثالث (٥ درجات):

أوجد نصف قطر تقارب و فترة تقارب متسلسلة القوى التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}(x-3)^n$.

السؤال الرابع (٧ درجات):

(١) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x)=\dfrac{x}{2-x^2}$ ، وعين فترة تقاربها.

(٢) باستخدام الفقرة (١) مع نظرية التكامل، استنتج متسلسلة القوى للدالة $g(x)=\ln(2-x^2)$.

(٣) باستخدام الفقرة (٢)، استنتج مجموع المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,2^n}$.

السؤال الخامس (٨ درجات):

(١) باستخدام متسلسلة القوى لدالة الجيب $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ لكل $x\in\mathbb{R}$, أوجد ما يلي:

(أ) قيمة تقريبية للتكامل المعتل $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x}\,dx$ ، وذلك بمكاملة الحدود الثلاثة الأولى لمتسلسلة القوى للدالة $\dfrac{\sin x}{x}$.

(ب) قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin\left(x^2\right)}{x^6}$ ، وذلك باستخدام متسلسلة القوى للدالة $\sin(x^2)$.

(٢) جد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ عند النقطة $c=1$.

تصحيح الاختبار الشهري للمقرر 209 ريض للفصل الثاني 1443 هـ

السؤال الأول (4 درجات)

• $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{3^n}\,3}{\cancel{3^n}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}$$

(2) $$= 3$$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (متتالية هندسية $-1 < r = 2/3 < 1$)

• $$\lim_{n\to+\infty} n e^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = \frac{\infty}{\infty} \quad IF$$

(2) $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\text{قاعدة لوبيتال}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

السؤال الثاني (6 درجات)

• $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة.

نستخدم اختبار الجذر النوني:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

(3) ضع $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 0$

$$\ln b_n = n \ln(1-1/n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1-1/n)}{1/n} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1-t)}{t}$$

$$\underset{\text{قاعدة لوبيتال}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{-1}{1-t} = -1$$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$

فنستنتج أن $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)$ متقاربة

2)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة

حيث $a_n = \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} > 0$ لكل $n \geq 0$. نستخدم اختبار

نهاية المقارنة. نأخذ $b_n = \frac{2^4 n^4}{7^3 n^6} = \frac{2^4}{7^3} \frac{1}{n^2}$

3

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2^4}{7^3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)$ متسلسلة-p حيث $p=2>1$

فهي متقاربة

لدينا $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ فنستنج أن $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \right)$ متقاربة.

السؤال الثالث (5 درجات)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} (x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. متسلسلة القوى

- ندرس $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ ونستخدم اختبار النسبة:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} (x-3)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{2^n (x-3)^n} \right|$$

$$= 2|x-3| \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} \right)^2$$

2

$$= 2|x-3|$$

- إذا كان $L<1 \Leftrightarrow 2|x-3|<1 \Leftrightarrow |x-3|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -1/2 < x-3 < 1/2$

يعني $5/2 < x < 7/2$ فإن $\left[\sum \frac{2^n}{n^2} (x-3)^n \right]$ متقاربة تقاربا مطلقا.

- إذا كان $L>1$ فإن $x > 7/2$ أو $x < 5/2$

1

عندئذ $\left[\sum_n \frac{2^n}{n^2} (x-3)^n \right]$ متباعدة.

1

- إذا كان $L=1$ يعني $x = 5/2$ أو $x = 7/2$.

3)

• عندما $x=5/2$ باستبدالها في المتسلسلة، نحصل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\left(\frac{5}{2}-3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$ وهي متسلسلة متردّدة

متقاربة تقاربًا مطلقًا.

1

• عندما $x=7/2$ ، بتعويض قيمة x في المتسلسلة، نحصل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\left(\frac{7}{2}-3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ وهي متسلسلة-p حيث

$p=2>1$

متقاربة.

فنستنتج أن فترة التقارب هي $[5/2, 7/2]$ ونصف

قطر التقارب $R = \frac{7/2-5/2}{2} = \frac{1}{2}$.

السؤال الرابع (7 درجات)

1 $f(x) = \frac{x}{2-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (f معرفة في جوار الصفر)

نعلم أن: $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ لكل $-1<u<1$

$$\frac{1}{2-x^2} = \frac{1}{2\left[1-\frac{x^2}{2}\right]} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n}$$

لكل $-1<\frac{x^2}{2}<1$

3

وبالتالي

$$f(x) = \frac{x}{2-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n+1}$$ (دالة فردية)

لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

2 $g(x) = \ln(2-x^2) = \ln 2 + \int_0^x \frac{-2t}{2-t^2}\,dt$ لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

$$\ln(2-x^2) = \ln 2 - 2\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$$

باستخدام مبرهنة التكامل للمتسلسلات القوية، لدينا لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} t^{2n+1}\right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\int_0^x t^{2n+1} dt\right)$$

(3) $$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2n+2} x^{2n+2}$$

وبالتالي لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$،

(دالة زوجية) $$\ln(2-x^2) = \ln 2 - \cancel{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{2}(n+1)2^{n+1}} x^{2(n+1)}\right)$$

(3) باستبدال قيمة x بـ $1 \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$، نجد أنّ:

$\ln(2-1^2) = \ln 2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)$. ولذا يؤدي

(1) $$\ln 2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n}}\right)$$

السؤال الخامس (8 درجات)

(1) (أ) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ لكل $x\in\mathbb{R}$

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)$$

$x\neq 0$ $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots$$

(2) $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right] dx$$

$$\approx \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right]_0^1$$

$$\approx \left[1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}\right]$$

5) (ب

لكل $u \in \mathbb{R}$ $\quad \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots$

إذن $\quad \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots$

$$\sin(x^2) - x^2 = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots$$

$$x^2 - \sin(x^2) = x^6\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \cdots\right)$$

$x \neq 0$
$$\frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6} = \frac{1}{6} - \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

1

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6} = \lim_{x \to 0}\left[\frac{1}{6} - \frac{x^4}{5!} + \cdots\right] = \frac{1}{6}$$

2 الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ معرفة ومتصلة وقابلة للاشتقاق

حسب مرات عند $x = 1$. باستخدام مبرهنة تايلور

لكل x في جوار 1 $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

4

- $f(1) = \sqrt{1} = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$
- $f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$
- $f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2} \rightarrow f'''(1) = 3/8$

لكل x في جوار 1 $\quad \sqrt{x} = \underbrace{1}_{a_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1}(x-1) \underbrace{-\frac{1}{8}}_{a_2}(x-1)^2 + \underbrace{\frac{1}{16}}_{a_3}(x-1)^3 + \cdots$