جامعـــة الملك سعـــود كليـــة العلـــوم قســـم الريـــاضيـــــات

الفصل الثاني ١٤٣٠-١٤٣١ هـ/٣٨٥-ريض/ الاختبار الفصلي الأوّل/ الزمن: ٩٠ دقيقة

السؤال الأوّل (٦ نقاط) :

١) حل المعادلة في $\mathbb{C}$ التالية : $z^2 = 3+4i$ ثم استنتج جذور المعادلة: $(1+i)z^2 + iz - 1 = 0$.

٢) أثبت المتطابقات التالية : لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ لدينا:

أ) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z_1 \overline{z_2}\right)$

ب) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ *(متطابقة المتوازي الأضلاع)*.

السؤال الثاني (٤ نقاط):

صف المحل الهندسي النقاط z في المستوى المركَب التي تحقق:

أ) $|z - 2i| = \left| i\bar{z} + 4 \right|$.

ب) $\dfrac{iz - 1}{z - i} \in \mathbb{R}$.

السؤال الثالث (٥ نقاط) :

صنف النقاط الشاذة في $\mathbb{C}$ للدالة: $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(z-1)}$. ما نوع النقطة الشاذة عند ∞ لـ $f(z)$ ؟

السؤال الرابع (٥ نقاط):

بيّن أن : $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ توافقية و أوجد مرافقتها التوافقية. أكتب الدالة f بدلالة z فقط.

و الله ولي التوفيـــــق

الفصل الثاني ١٤٣١/١٤٣٠هـ — إصلاح الاختبار الشهري الأول — د. برهان

٣٨٥ ريض

السؤال الأول: [6]

① $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ، بالتعويض في $z^2 = 3+4i$ ، $(x^2-y^2)+2ixy = 3+4i$

و بما أن $|z^2| = x^2+y^2 = |3+4i| = 5$ فإننا لدينا:

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 & (1)\\ xy=2 & (2)\\ x^2+y^2=5 & (3)\end{cases}$$

$(2)+(1) \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

- وإذا كان $x=2$ ، $(2) \Rightarrow y=1$ يعني $z_1 = 2+i$
- وإذا كان $x=-2$ ، $(2) \Rightarrow y=-1$ يعني $z_2 = -2-i$

② $S_{\mathbb{C}} = \{-2-i \,;\, 2+i\}$

المعادلة: $(1+i)z^2+iz-1=0$ هي معادلة من الدرجة الثانية.

يمكن أن نلاحظ أن (-1) هو حلاً فإن الحل الثاني يكون $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

أو نستخدم المميز: $\Delta = (i)^2+4(1+i)$

$= 3+4i = (2+i)^2$

① $z_2 = \frac{-i+2+i}{2(1+i)} = \frac{1-i}{2}$ ، $z_1 = \frac{-i-(2+i)}{2(1+i)} = -1$

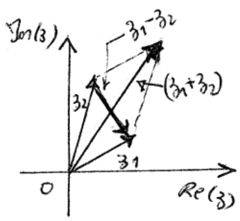
$S_{\mathbb{C}} = \{-1 \,;\, \frac{1}{2}-\frac{i}{2}\}$

أ) لنأخذ $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. لدينا $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$

② $= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)} + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 + 2\,Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2.$



ب) بما أن $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\,Re(z_1\bar{z}_2)$ فإن

و $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2\,Re(z_1\bar{z}_2)$

① لدينا $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

السؤال الثاني: [4]

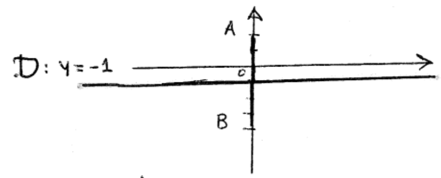
أ) $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2i| = |i\bar{z}+4|\}$

لنأخذ $z \in D$ ، لدينا: $|i\bar{z}+4| = |\overline{i\bar{z}+4}| = |-iz+4|$

① $= |-i(z-4/i)| = |z+4i|$

إذن $|z-2i| = |z+4i|$.(*) بوضع $M(z)$, $A(2i)$ و $B(-4i)$ المعادلة (*)
تصبح $MA = MB$ يعني M تنتمي لمنصف $[A,B]$.

1



$$D:\ y=-1$$

ب) $C = \{ z\in\mathbb{C}\setminus\{i\};\ \frac{iz-1}{z-i}\in\mathbb{R} \}$

نضع $z\neq i$, $Z = \frac{iz-1}{z-i}$, $Z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow Z=\bar{Z}$.

1

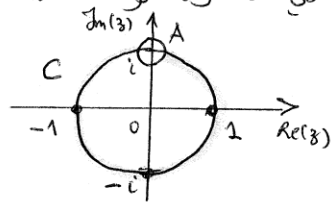
إذن $z\neq i$, $\frac{iz-1}{z-i} = \frac{-i\bar{z}-1}{\bar{z}+i}$

يعني: $(iz-1)(\bar{z}+i) = (z-i)(-i\bar{z}-1) \Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |z| = 1$.

إذن C هي دائرة الوحدة ما عدا النقطة $A(i)$.

1



السؤال الثالث: [5]

النقاط الشاذة للدالة $f(z) = \frac{e^z-1}{z(z-1)}$ هم $z_0=0$ و $z_1=1$. 1

- بما أن $\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z-1} = 0$ فإن $z_0=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة. 2

- بما أن $\lim_{z\to 1}|f(z)| = \lim_{z\to 1}\left|\frac{e^z-1}{z(z-1)}\right| = \infty$ و $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = e-1$
فإن $z=1$ هو قطب بسيط. 1

- لكل $z\neq 0$, $w = f(\frac{1}{z}) = \frac{z^2(e^{1/z}-1)}{z-1}$, $z=0$ نقطة معزولة لـ w

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x(x-1)} = 0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x(x-1)} = \infty$ فإن $\lim_{z\to\infty} f(z)$
غير موجودة فإن $z=\infty$ هي نقطة شاذة أساسية.
1

السؤال الرابع: [5]

- يمكن أن نلاحظ أن لكل $z\neq 0$ ؛ $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ وهي تحليلية على $\mathbb{C}^*$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= u(x,y) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

إذن $v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}+a$ المرافق التوافقي لـ $u(x,y)$ و $f(z)=\frac{1}{z}+a$ $(a\in\mathbb{R})$

بما أن $u(x,y)$ دالة كسرية فهي من الصف C^∞ لكل $(x,y)\neq(0,0)$.

$$u_x(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\quad,\quad u_y=-\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

(2)

$$u_{xx}(x,y)=\frac{2x^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}\quad,\quad u_{yy}=\frac{-2x^3+6x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

إذن $\Delta U = U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0$ يعني الدالة u تحقق معادلة لابلاس لكل $(x,y)\neq(0,0)$ وبالتالي $U(x,y)$ هي دالة توافقية على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

- نضع v مرافقها: باستخدام معادلتي كوشي-ريمان لدينا:

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

يعني

$$\begin{cases}(1)\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ (2)\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}$$

(1)

بتكامل طرفي المعادلة (2) بالنسبة للمتغير x، نجد أن:

$$v(x,y)=\int\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{-y}{x^2+y^2}+\alpha(y)$$

حيث $\alpha(y)$ دالة بالمتغير y.

باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للمتغير y وبالمقارنة مع (1)، نجد أن:

$\alpha'(y)=0$ إذن $\alpha(y)=cst$

يعني $v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}+cst$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$. (1)

- الدالة $f(z)=f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}+a\right)$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

الآن نضع $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ ، فنجد أن $f(z)=\frac{1}{z}+icst$

(1)

لكل $z\neq 0$.