جامعـــة الملك سعـــود كليـــة العلـــوم قســم الريـاضيـات	
الفصل الثاني 1432-1433 هـ/385-ريض/ الاختبار الثاني/ الزمن: ساعة ونصف	

السؤال الأوّل (5 درجات) :

(**1**) لتكن $z = x + iy$ و $f\left(z,\bar{z}\right)=U\left(x,y\right)+iV\left(x,y\right)$ دالة متصلة ومشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى متصلة عل نطاق محدود D حافته المنحنى البسيط والمغلق Γ . اثبت أن :

$$\oint_\Gamma f\left(z,\bar{z}\right)\ dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z,\bar{z}\right)\ dxdy$$

إرشاد : استخدم نظرية غرين مع العلم أن $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

(**2**) أثبت أن مساحة المنطقة D هي : $\frac{1}{2i}\oint_\Gamma \bar{z}\ dz$.

(**3**) احسب التكامل: $\oint_\Gamma \bar{z}\ \ dz$, إذا كان المنحنى Γ :

أ) هو دائرة مركزها $z_0 = 2$ ونصف قطرها 3 .

ب) هو مربع رؤوسه $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 2i, z_4 = 2+2i$

السؤال الثاني (5 درجات):

استخدم صيغة كوشي التكاملية لحساب التكامل التالي : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\ dt$.

السؤال الثالث (4 درجات): احسب قيمة التكامل $\oint_\gamma \frac{dz}{z}$ حيث $\gamma(t) = a\cos t + i\ b\sin t$ $(t\in[0,2\pi],\ a>0,\ b>0)$ ثم استنتج قيمة التكامل : $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

السؤال الرابع (6 درجات) :

(**1**) لتكن f دالة تحليلية على نطاق (مفتوح و مترابط) محدود $\Omega \subset \mathbb{C}$, متصلة على المغلق $\bar{\Omega}$, غير ثابتة , بحيث $|f| = cst$ على الحافة $b\Omega$. فاثبت أن f لها صفر داخل Ω .

(**2**) لتكن f دالة تحليلية على نطاق (مفتوح و مترابط) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ يحتوي على القرص المغلق $\overline{D(z_0,r)}$ بحيث $f(z) \in \mathbb{R}$ لكل z على الدائرة $|z-z_0| = r$. اثبت أن f هي دالة ثابتة على Ω.

إرشاد : ادرس الدالة e^{if}.

للفصل الثاني ١٤٣٢ - ١٤٣٣هـ

السؤال الأول (5 درجات)

① بما أن f متصلة ومشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى متصلة على نطاق D محدود فإن كلاً من الدوال $U = Re f$ و $V = Im f$ متصلة ومشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى متصلة على D

نستخدم نظرية غرين.

(1)

$$\oint_{\Gamma} f(z,\bar{z})\,dz = \oint_{\Gamma} [U + iV](dx + i\,dy)$$

$$= \left(\oint_{\Gamma} U(x,y)\,dx - V(x,y)\,dy\right) + i\left(\oint_{\Gamma} V(x,y)\,dx + U(x,y)\,dy\right)$$

$$\oint_{\Gamma} U(x,y)\,dx - V(x,y)\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial(-V)}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\oint_{\Gamma} V(x,y)\,dx + U(x,y)\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy$$

إذن

$$\oint_{\Gamma} f(z,\bar{z})\,dz = -\iint_{D} \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy + i\iint_{D} \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

$$\oint_{\Gamma} f(z,\bar{z})\,dz = 2i\iint_{D} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] dx\,dy$$

(1)

$$\oint_{\Gamma} f(z,\bar{z})\,dz = 2i\iint_{D} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\right] dx\,dy$$

$$\oint_{\Gamma} f(z,\bar{z})\,dz = 2i\iint_{D} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(U + iV)}_{f} + i\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(U + iV)}_{f}\right] dx\,dy$$

$$\oint_{\Gamma} f(z,\bar{z})\,dz = 2i\iint_{D} \frac{\partial f(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy.$$

لا يكتب في
هذا الهامش

حيث $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

② نعلم أن مساحة منطقة مستوية محدودة D هي $A(D) = \iint_D dxdy$ ، باستخدام ①

① يعني أخذنا $f(z,\bar{z}) = \bar{z}$ لأن $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z,\bar{z}) = 1$

إذن
$$\oint_{\Gamma = bD} \bar{z}\, dz = 2i \iint_D dxdy = 2i\, A(D)$$

يعني مساحة D هي $A(D) = \frac{1}{2i}\oint_\Gamma \bar{z}\, dz$

③ باستخدام السؤال ② : $\oint_\Gamma \bar{z}\, dz = 2i\, A(D)$

① أ) D هي قرص مركزه 2 ونصف قطره 3 ، ومساحة هذا القرص هي $A(D) = \pi(3)^2$

إذن
$$\oint_{|z-2|=3} \bar{z}\, dz = 2i \times 9\pi = 18\pi i$$

① ب) مساحة المربع D هي $A(D) = 4$

إذن
$$\oint_{\text{حافة المربع}} \bar{z}\, dz = 2i \times 4 = 8i$$

⚠ يمكن استخدام التمثيل الوسيطي للدائرة و المربع وحساب مباشرة $\oint_\Gamma \bar{z}\, dz$.

السؤال الثاني: (5 درجات)

نعلم أن $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ لكل $t \in \mathbb{R}$.

إذن
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3 - 2\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{2\cos^2 t - 1}{3 - 2\cos t}\, dt$$

الآن نستخدم التكامل المساري: نضع $z(t) = e^{it}$

حيث $0 \le t \le 2\pi$ (المسار هو دائرة الوحدة $|z|=1$)

فإن $dz = ie^{it}dt$

يعني $dz = iz\,dt$ $\quad dt = \dfrac{dz}{iz}$ 1

نعلم أن $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. إذن $\cos t = \dfrac{z + 1/z}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\,dt = \oint_{|z|=1} \frac{2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2 - 1}{3 - 2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\,dt = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^2 - 2z^2}{[6z^2 - 2z(z^2+1)]} \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\,dt = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2[z^2-3z+1]}\,dz$$ 1

نضع $I = \oint_{|z|=1} \dfrac{z^4+1}{z^2[z^2-3z+1]}\,dz = \oint_{|z|=1} f(z)\,dz$

$$f(z) = \frac{z^4+1}{z^2[z^2-3z+1]} = 1 + \underbrace{\frac{3z^3 - z^2+1}{z^2[z^2-3z+1]}}$$

f تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \left\{0, \dfrac{3-\sqrt5}{2}, \dfrac{3+\sqrt5}{2}\right\}$

$z^2 - 3z + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$

$z_1 = \dfrac{3-\sqrt5}{2}$

بما أن $z_1 z_2 = 1$ و $|z_2| > 1$ فإن $|z_1| < 1$

$z_2 = \dfrac{3+\sqrt5}{2}$

$$f(z) = 1 + \underline{\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} + \frac{\lambda}{z-z_1} + \frac{\gamma}{z-z_2}}$$ 1

نضع $g(z) = \dfrac{3z^3 - z^2+1}{z^2(z^2-3z+1)} = \dfrac{\alpha}{z} + \dfrac{\beta}{z^2} + \dfrac{\lambda}{z-z_1} + \dfrac{\gamma}{z-z_2}$

$$\beta = \lim_{z\to 0} z^2 g(z) = 1$$

$$\lambda = \lim_{z\to z_1} (z-z_1)\,g(z) = \frac{3z_1^3 - z_1^2+1}{z_1^2\,(z_1-z_2)}\ ;\ \gamma = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)g(z) = \frac{3z_2^3 - z_2^2+1}{z_2^2\,(z_2-z_1)}$$

$$3 = \lim_{z\to\infty} z\,g(z) = \alpha + \lambda + \gamma \implies \boxed{\alpha = 3 - (\lambda+\gamma)}$$

باستخدام الآن صيغة كوشي التكاملية

$$I=\oint_{|z|=1} f(z)\,dz=\oint_{|z|=1}\left(1+\frac{\alpha}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{\lambda}{z-z_1}+\frac{\gamma}{z-z_2}\right)dz$$

$$=\oint_{|z|=1} dz+\alpha\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}+\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2}+\lambda\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z-z_1}+\gamma\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z-z_2}$$

$$=0+\alpha\,2\pi i+0+\lambda\,2\pi i+\gamma\,0$$

$$=2\pi(\alpha+\lambda)\,i$$

فنستنتج أن

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\,dt=\pi(\alpha+\lambda)$$
$$=\pi(3-\gamma)$$
$$=\pi\left(3-\frac{49+21\sqrt5}{15+7\sqrt5}\right)=\frac{-4\pi}{15+7\sqrt5}$$

حيث

1 $\gamma=\dfrac{3z_2^3-z_2^2+1}{z_2^2(z_2-z_1)}$; $z_2=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$; $z_1=\dfrac{3-\sqrt5}{2}$

$$z_2-z_1=\frac{3+\sqrt5-3+\sqrt5}{2}=\sqrt5$$

$$\gamma=\frac{3(9+4\sqrt5)-\left(\frac{7+3\sqrt5}{2}\right)+1}{\left(\frac{7+3\sqrt5}{2}\right)(\sqrt5)}$$

$$z_2^2=\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{9+5+6\sqrt5}{4}=\frac{7+3\sqrt5}{2}$$

$$=\frac{49+21\sqrt5}{15+7\sqrt5}$$

$$z_2^3=\left(\frac{7+3\sqrt5}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)=\frac{21+15+16\sqrt5}{4}$$

$$z_2^3=9+4\sqrt5$$

1

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\,dt=\left(\frac{15-7\sqrt5}{5}\right)\pi}$$

السؤال الثالث (4 درجات)

بما أن الصفر موجود داخل القطع الناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ يمكن تشويه هذا القطع الناقص

1 بصفة متصلة ليصبح دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها 1 (دائرة الوحدة)

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$z(t) = \gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$$

$$z'(t) = \gamma'(t) = (-a\sin t + ib\cos t)\,dt$$

$$\underset{i\mathbb{R}}{2\pi i} = \oint_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a\cos t + ib\sin t)}(-a\sin t + ib\cos t)\,dt$$

تكامل تخيلي بحت

(2)

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t - ib\sin t)(-a\sin t + ib\cos t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

تكامل حقيقي بحت ←

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{-a^2\cos t\sin t + b^2\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt}_{=0} + i\int_0^{2\pi} \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$$

فنستنتج أن

(1) $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

السؤال الرابع: (6 درجات)

(1) نفترض أن f ليس لها أصفار على Ω (مترابط + مفتوح محدود)

إذن $\frac{1}{f}$ تحليلية على نطاق Ω. باستخدام مبدأ القيمة العظمى للمقياس والقيمة الصغرى

$$\max_{\Omega} \left|\frac{1}{f}\right| = \max_{\Omega} \frac{1}{|f|} = \max_{b\Omega} \frac{1}{|f|} = \frac{1}{cst}$$

(2) أيضاً $$\min_{\Omega} \left|\frac{1}{f}\right| = \min_{\Omega} \frac{1}{|f|} = \min_{b\Omega} \frac{1}{|f|} = \frac{1}{cst}$$

يعني $\left|\frac{1}{f}\right|$ هي دالة ثابتة على Ω لأن $\frac{1}{f}$ تحليلية

(1) فنستنتج أن f هي دالة ثابتة على Ω وهذا يتناقض مع المعطى أن f هي دالة غير ثابتة.

إذن f لديها على الأقل صفر في Ω.

(2) $f = U + iV$ حيث $Re\, f = U$

$Im\, f = V$

نرى أن

$$|e^{if}| = |e^{i(U+iV)}| = |e^{iU-V}| = e^{-V}$$

يعني $|e^{if}| = e^{-Im f}$ (1)

بما أن f تحليلية على Ω فإن e^{if} هي أيضا

تحليلية على Ω (كتحصيل دالتين تحليليتين).

وبما e^{if} لا تأخذ قيم صفرية و Ω نطاق

باستخدام مبدأ القيمة العظمى للمقياس للدالة e^{if}

على القرص $\overline{D(z_0,r)}$

$$\max_{\overline{D(z_0,r)}} |e^{if}| = \max_{|z-z_0|=r} e^{-Im f} = 1$$ (1)

لأن $f(z) \in \mathbb{R}$ لكل $z \in \mathcal{C}(z_0,r)$

أيضا مبدأ القيمة الصغرى للمقياس لأن e^{if} ليس صفري

$$\min_{\overline{D(z_0,r)}} |e^{if}| = \min_{|z-z_0|=r} e^{-Im f} = 1$$

فنستنتج أن e^{if} هي دالة ثابتة على $\overline{D(z_0,r)}$

هذا يؤدي أن f هي دالة ثابتة على $\overline{D(z_0,r)}$ (1)

باستخدام الامتداد التحليلي، نستنتج أن f هي

دالة ثابتة على Ω (مترابط)