Quiz 2 تصحيح

الاسم :	جامعة الملك سعود King Saud University
الرقم الجامعي :	كلية العلوم - قسم الرياضيات
الدرجة :	اختبار قصير (2) 487 ريض
	الفصل الصيفي 1438-1439 هـ

السؤال الأول (5 درجات):

(أ) جد متسلسلة تايلور للدالة $f(z) = Log\, z$ عند النقطة $z_0 = 1$. (درجتان)

طريقة أولى:

$$f(z) = Log\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

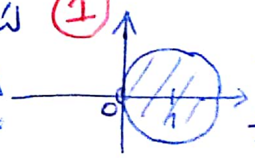
لكل z في جوار 1

$Log\, 1 = 0$

$$Log\, z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

لكل z في جوار 1 (1)

⚠ نرى أن المتسلسلة متقاربة في $|z-1|<1$



$f'(z) = \frac{1}{z}$

$f''(z) = -1/z^2$

$f'''(z) = \frac{2}{z^3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}$

$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

(1)

طريقة ثانية:

نعلم أن $Log(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$ في جوار الصفر لكل $|u|<1$

نضع $z = 1+u \Leftrightarrow u = z-1$

فإن $Log\, z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ في جوار 1

(ب) أوجد قرص التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5^n}(z-i)^{n-1}$ ثم جد مجموعها. (3 درجات)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5^n}(z-i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$$

نستخدم اختبار النسبة لـ $\sum_n |a_n(z)|$

$$\left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(z-i)^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(-1)^n n (z-i)^{n-1}}\right|$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)|z-i|$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z-i|}{5} = \rho$$

إذا كان $\rho<1 \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{5}<1 \Leftrightarrow |z-i|<5$

فإن المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا (0,5)

أما إذا كان $\rho>1$ يعني $|z-i|>5$ فإن المتسلسلة متباعدة . (0,5)

وبالتالي قرص التقارب مركزه i ونصف قطره 5 .

- نرى أن

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} n (z-i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-i)^{n-1}$$

حيث $a_n = \frac{(-1)^n}{5^n}$ (1)

يعني $(*)$ هي مشتقة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{5^n}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-z}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{i-z}{5}\right)}$$

(2) $\left|\frac{z-i}{5}\right|<1$ متسلسلة هندسية

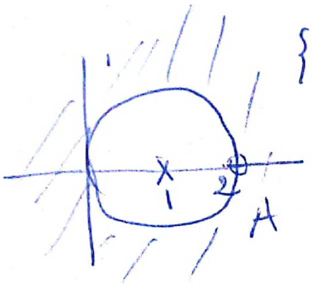
وبالتالي

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5^n}(z-i)^{n-1} = \frac{d}{dz}\left[\frac{5}{5-i+z}\right]$$

لكل $|z-i|<5$

السؤال الثاني (5 درجات):

(1) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z^2-2z+3}{z-2}$ على المنطقة المفتوحة $A=\{z\in\mathbb{C};\ |z-1|>1\}$.



f تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{2\}$ و $\{2\}\notin A$

فإن f تحظى بمفكوك لورانت على A (1)

لكل $|z-1|>1$ $\quad f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-1)^n$

$$z^2-2z+3=(z-1)^2-1+3=(z-1)^2+2. \quad (1)$$

بما أن $|z-1|>1$ فإن $\dfrac{1}{|z-1|}<1$:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{1}{z-1}\right)}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \quad (1)$$

إذن $f(z)=\left[(z-1)^2+2\right]\left[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]$

لكل $|z-1|>1$ $\quad f(z)=(z-1)+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(z-1)^n} \Rightarrow a_n=\begin{cases}1; & n=0,1\\ 0; & n\geq 2\\ 3; & n<0\end{cases}$

(2) صنّف الأصفار و النقاط الشاذة للدالة $g(z)=\sin\left(1-z^{-1}\right)$. (درجتان)

• نعلم أن $\sin w=0$ إذا وفقط $w_k=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي $1-\frac{1}{z_k}=k\pi \Leftrightarrow 1-k\pi=\frac{1}{z_k}$ يعني $z_k=\dfrac{1}{1-k\pi}$ (1)

أصفار g عند النقاط $z_k=\dfrac{1}{1-k\pi}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وهي أصفار بسيطة

• g تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. إذن g لديها نقطة شاذة عند الصفر

لكل $w\in\mathbb{C}$ $\quad \sin w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1}=w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\cdots$

وبالتالي لكل $|z|>0$ $\quad g(z)=\sin\left(1-\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{2n+1}$

مفكوك لورانت $\leftarrow$ $(1-z^{-1})^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}z^{-k}$

فنستنتج أن $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية. (1)