جامعة الملك سعود.	الإ متحان النهائي 209 ريض.	الإثنين 1438/8/26 هـ.
كلية العلوم.	قسم الرياضيات –الفصل الثاني-1438/1437هـ .	الزمن : ثلاث ساعات.

السؤال الأول (8): أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{(-1)^n \frac{3n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{\frac{n^2+e^n}{n+3e^n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{n\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} .$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة وماهو مجموعها : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{4^n}$.

السؤال الثاني (10): أ) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n+1}\right) \quad ، \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+4} .$$

ب) استخدم متسلسلة إلقوى في u : $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ ، حيث $u \in \mathbb{R}$ في ايجاد متسلسلة القوى في x للدالة $\cosh(2x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ وما هي فترة تقاربها؟.

ج) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة : $f(x) = \ln(x+3)$ ، حيث $c = 1$.

السؤال الثالث(5) : أ) ارسم الدالة : $f(x) = \begin{cases} x\ , 0 < x < 1 \\ 1\ , 1 \le x < 2 \end{cases}$.

ب) أوجد متسلسلة فوريية cosine للدالة f على الفترة $(0,2)$.

السؤال الرابع(7) : أ) ارسم الدالة : $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, 0\le x<1\\ 0, x\ge 1\end{cases}$.

ب) أوجد تكامل فوريه للدالة f . 4

ج) استنتج من تكامل فوريه وعند $x=1$ صحة العلاقة : $\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2}$. 2

السؤال الخامس (10) أ) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

4

: $xy^3dx+(y+1)e^{-x}dy=0$ ، حيث $y\neq 0$.

ب) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية :

6

$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0\\ y(\sqrt{3})=1\end{cases}$ ، حيث $x>0$.

السؤال الأول:

(أ)

1) بما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = 3 \neq 0$ ، إذاً $\left\{(-1)^n \frac{3n}{n+2}\right\}$ متباعدة

2

2) $f(x) = \frac{x^2+e^x}{x+3e^x}$ ، $x \geq 1$ ، $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+e^x}{x+3e^x}$

2

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+e^x}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+e^x}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

ومنه $\left\{\frac{n^2+e^n}{n+3e^n}\right\}$ متقاربة وأن $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+e^n}{n+3e^n} = \frac{1}{3}$

2

3) $f(x) = x\sin\frac{2}{x}$

$(\infty \cdot 0)$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x} = \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 2\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 2 \; ; \; \frac{2}{x} = u$$

2

ومنه $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{n} = 2$

(ب)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{4^n} = \sum_{1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{4^n}\right]$$ متقاربة

هندسية هندسية

2

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{4}} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

السؤال الثاني:

(10)

(أ)

1) بما أن $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{3n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$ ، إذاً $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n+1}\right)$ متباعدة

2

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} 5\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{(n)!}} = 0 < 1$ ، إذاً $\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ متقاربة

2

3) $\left|(-1)^n \frac{n}{n^3+4}\right| \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

2

بما أن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة (p-series , $2>1$) ، إذاً $\sum (-1)^n \frac{n}{n^3+4}$ متقاربة مطلقاً

(كما يمكن إيجاد التقارب باستخدام اختبار المتناوبة)

(ب)

$$\cosh(2x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}\right]$$

2

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{2x}{1!} + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} \dots\right) + \left(1 - \frac{2x}{1!} + \frac{2^2x^2}{2!} - \frac{2^3x^3}{3!} \dots\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} + \frac{2^6x^6}{6!} \dots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(x)=\ln(x+3),\quad f(1)=\ln 4$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+3}=(x+3)^{-1},\quad f'(1)=\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(x+3)^2},\quad f''(1)=\frac{1}{16}$$

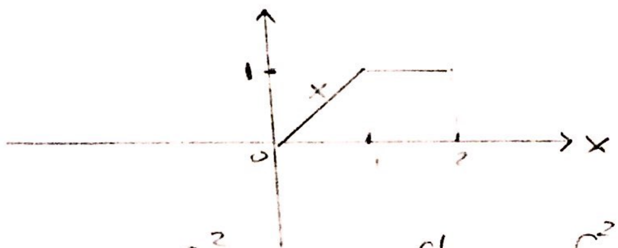
$$f'''(x)=\frac{2}{(x+3)^3},\quad f'''(1)=\frac{2}{64}=\frac{1}{32},$$

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-1)+\frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\dots$$

$$\boxed{f(x)=\ln(x+3)=\ln 4+\frac{(x-1)}{4}-\frac{1}{32}(x-1)^2+\frac{1}{192}(x-1)^3+\dots}$$

السؤال الثالث :

(أ)



$T=2$

(1) $$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}=a_0$$

(2)
$$a_n=\int_0^1 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx+\int_1^2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\left[x\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1-\int_0^1\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}dx+\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_1^2$$

$$=\cancel{\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right]-\cancel{\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

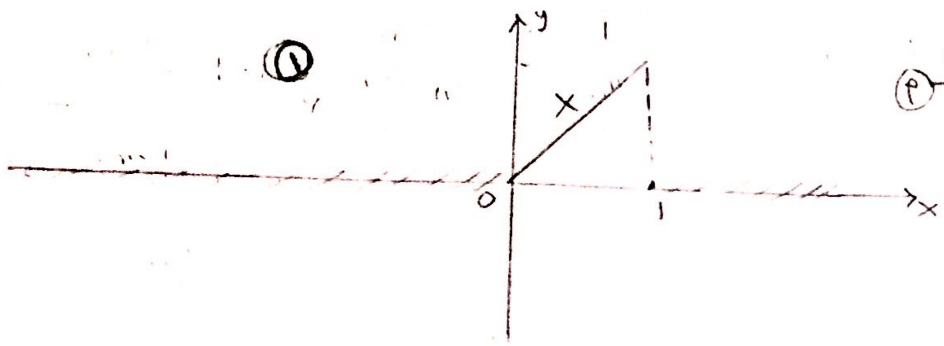
$$\boxed{a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right]}$$

(1) $$f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

السؤال الرابع

(أ)

(1)



(ب)

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = \int_0^1 x\cos\alpha x\,dx$$

$$= \left[x\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\alpha}dx = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\left[\cos\alpha x\right]_0^1$$

(2) $$\boxed{A(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,d\alpha = \int_0^1 x\sin\alpha x\,dx$$

$$= \left[-x\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos\alpha x}{\alpha}dx = -\frac{\cos\alpha}{\alpha} + \left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha^2}\right]_0^1$$

(2) $$\boxed{B(\alpha) = -\frac{\cos\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}}$$

$$\boxed{\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right]\cos\alpha x + \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha^2}\right)\sin\alpha x\right\}d\alpha}$$

(ج) عند $x=1$ نجد

$$\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1)\cos\alpha + (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\sin\alpha}{\alpha^2}d\alpha$$

(2) $$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\cos^2\alpha - \cos\alpha + \sin^2\alpha)\,d\alpha}{\alpha^2}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right)d\alpha}$$

السؤال الخامس : (أ)

$$xy^3dx + (y+1)e^{-x}dy = 0$$

(1) $$\frac{x}{e^{-x}}dx + \left(\frac{y+1}{y^3}\right)dy = 0$$

(1) $$\int e^{x}x\,dx + \int\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)dy = 0$$

(2) $$\int xe^{x}dx + \int y^{-2}dx + \int y^{-3}dy = 0$$

$$\boxed{(xe^{x} - e^{x}) - \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} = c}$$

Scanned by CamScanner

ب

$x>0$ ، حل ، $\begin{cases} \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - x\,dy = 0 \\ y(\sqrt{3}) = 1 \end{cases}$

نفرض هنا $u=\frac{y}{x}$ ، $y=ux$ ، $dy = x\,du + u\,dx$ (2)

$x>0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2}}\right)dx - dy = 0$

$\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\right)dx - dy = 0$

(2) $\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)dx - u\,dx - x\,du = 0$

$\sqrt{1+u^2}\,dx - x\,du = 0$

(1) $\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = 0$

$\ln x - \sinh^{-1}(u) = C$

$\boxed{\ln x - \sinh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = C}$

(1) $y(\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow \boxed{\ln\sqrt{3} - \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = C}$

تعتبر تكملة الجواب ولكنه غير ضروري

$\ln\left(\frac{x}{\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}}\right) = C$

$\ln\left(\frac{x}{\frac{y+\sqrt{y^2+x^2}}{x}}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = C}$

$y(\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{3}{1+\sqrt{1+3}}\right) = \ln\left(\frac{3}{3}\right) = \ln(1) = 0$

$\ln\left(\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \ln 1$ معناه

او $\boxed{x^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}}$ الحل النهائي تم تبسيطه ضروري

Scanned by CamScanner