جامعـــة الملك سعـــود	كلية العلـــوم	قســم الرياضيــــات

الفصل الأول 1432-1431 هـ/385ريض/ الإختبـــار الفصلي الأول /الزمن: ســــاعة و نصف

السؤال الأول(4 نقاط):

لتكن z_1 و z_2 عددين مركبين بحيث $z_1 z_2 \neq -1$ ، $|z_1| = |z_2| = 1,$ ولتكن $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

أ) أثبت أن Z هوعدد حقيقي بحت.

ب) أكتب Z بدلالة $\theta_1 = \arg z_1$ و $\theta_2 = \arg z_2$.

السؤال الثـــاني (6 نقاط):

1) أوجد مجموعة الحل في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ للنظام التالي: $\begin{cases} u + v = -\dfrac{1}{2} \\ uv = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

2) نضع $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

أ) أثبت أن: $\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

ب) استنتج أن: $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}$ ثم أوجد قيمة $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

السؤال الثـــالث (10نقاط):

1) لتكن f دالة تحليلية على نطاق $D \subset \mathbb{C}$ (مترابط ومفتوح) . استخدم معادلتي كوشي_ريمان لاثبات أن الدالة f ثابتة إذا تحقق ما يلي:

أ) $f(z) = f(\bar{z})$

ب) $\Re e f = cst$

ج) $\Im m f = cst$

د) $|f| = cst$.

2) لنفترض أن المعاملات لكثيرة الحدود: $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ تحقق: $|a_0| \geq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

أثبت أن $P(z)$ لا يوجد لها جذور في قرص الوحدة: $|z| < 1$.

إرشاد: لاحظ أن : $|P(z)| \geq |a_0| - \left[|a_1||z| + \ldots + |a_n||z^n|\right]$.

3) أثبت أن: $\sin^{-1} z = -i \log\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

و الله ولي التوفيـــــق

لا يكتب في هذا الهامش

إصلاح الاختبار الشهري الأول للفصل الأول

١٤٣١ / ١٤٣٢ هـ

٣٨٥ ريض (التحليل المركب)

السؤال الأول:

أ) $$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}}$$

بما أن $|z_1|=1$ فإن $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$.

و $|z_2|=1$ فإن $\overline{z_2} = 1/z_2$

(2) إذن $$\overline{Z} = \frac{1/z_1+1/z_2}{1+1/z_1\cdot\frac{1}{z_2}} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = Z$$

بما أن $\overline{Z} = Z$ فإن: Z هو عدد حقيقي.

ب) نضع $z_1 = e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = e^{i\theta_2}$ حيث $\theta_1 = \arg z_1$
$\theta_2 = \arg z_2$

$$Z = \frac{e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}}{1+e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}\right]}{e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\left[e^{-i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\right]}$$

(2) $$Z = \frac{2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

السؤال الثاني:

1) u و v هما جذران للمعادلة: $z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}=0$

المميز: $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2$

$$z_1 = \frac{-1/2-\sqrt5/2}{2} = -\frac{(1+\sqrt5)}{4} < 0$$

(3) $$z_2 = \frac{-1/2+\sqrt5/2}{2} = \frac{\sqrt5-1}{4} > 0$$

إذن مجموعة الحل هي:

$$\underset{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}{S} = \left\{\left(-\frac{1+\sqrt5}{4};\frac{\sqrt5-1}{4}\right),\left(\frac{\sqrt5-1}{4};-\frac{1+\sqrt5}{4}\right)\right\}.$$

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$ ②

أ) نضع $S = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$

$$= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$$

$$= 1 + \omega(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3)$$

$$= 1 + \omega(S - \omega^4) = 1 + \omega S - \omega^5$$

إذن

1 $$(1-\omega)S = 1 - \omega^5$$

بما أن $\omega^5 = e^{i2\pi} = 1$ وبما أن $\omega \neq 1$ فإن $S = 0$

يعني $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ (متتالية هندسية منتهية)

ب) $Re(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) = 0$

$$(*) \quad 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

بما أن $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{6\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5}$

$$\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{8\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}$$

إذن نجد أن ، $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$

1 يعني : $(1) \quad \boxed{\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -1/2}$

- بما أن $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$ لكل $a, b \in \mathbb{R}$

إذن $\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right]$$

يعني $(2) \quad \boxed{\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}}$

من خلال (1) و (2) نرى أن $\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\cos\frac{4\pi}{5}$

هما حل للنظام $\begin{cases} u + v = -1/2 \\ u \cdot v = -1/4 \end{cases}$

1 باستخدام ① , نستخرج أن : $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} > 0}$

و $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 0$.

السؤال الثالث :

بما أن f تحليلية ، $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ①

$u = Re f \quad , \quad v = Im f$

على D فإن معادلتي كوشي-ريمان تحققت:

① $$(I)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

أ) نفترض أن $f(z) = f(\bar{z})$. إذن

$u(x,y) = u(x,-y)$ (*) و $v(x,y) = v(x,-y)$ (**)

باشتقاق (*) بالنسبة للمتغير y ، نجد أن $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y)$

لكن $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ و $-\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)$

$= \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.

إذن نجد أن $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ يعني $\boxed{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0}$

وبنفس الطريقة نجد أن $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0$.

إذن $v = cst$. ومن خلال (I) $u = cst$

فنحصل على أن: f هي دالة ثابتة.

① ب) $Re f = u = cst$ إذن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ فإننا نستخرج من (I)

أن $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ يعني $v = cst$. إذن الدالة f ثابتة.

① ج) $Im f = v = cst$ إذن $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ، فإننا نستنتج من (I)

أن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. يعني $u = cst$. هذا يؤدي إلى أن

الدالة f ثابتة.

د) $|f| = cst \iff |f(z)|^2 = c \quad , \quad c \geq 0$ ثابت حقيقي موجب

$$f(z)\cdot\overline{f(z)} = c$$

نقوم باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة لـ z :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z)\cdot\overline{f}(z) + f(z)\cdot\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z) \equiv 0 \quad , \quad \forall z \in D.$$

لكن $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \bar{0} = 0$ لأن f تحليلية على D

إذن $\frac{\partial f}{\partial z}(z)\,.\,\overline{f}(z)=0$ لكن إذا كان $f \not\equiv 0$ فنستنتج أن

(1) $\frac{\partial f}{\partial z}\equiv 0$ (مع العلم أن $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$). وهذا يؤدي إلى

أن f هي دالة ثابتة.

(2) نستخدم المتباينة المثلثية: $|z_1|+|z_2| \geq |z_1+z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$ لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

إذن

$$|P(z)| = |a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n| .$$
$$= |a_0 - (-a_1 z - a_2 z^2 - \cdots - a_n z^n)| .$$
$$\geq \big| |a_0| - |a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| \big| .$$

بما أن $|a_1 z| + \cdots + |a_n z^n| \geq |a_1 z + \cdots + a_n z^n|$.

فإن $-(|a_1 z| + \cdots + |a_n z^n|) \leq -|a_1 z + \cdots + a_n z^n|$.

إذن

$$|P(z)| \geq \big| |a_0| - [|a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n] \big| .$$

عندما تكون $|z|<1$ ، فإن $|a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n < |a_1| + \cdots + |a_n|$

فنجد أن $|P(z)| > \big| |a_0| - [|a_1| + \cdots + |a_n|] \big|$

(2) وبما أن $|a_0| \geq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

فإن $|P(z)| > 0$.

يعني $P(z)$ ليس له جذور في قرص الوحدة المفتوح.

(3) نضع $w = \sin^{-1} z$. فإن $z = \sin w$
$$= \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

إذن $2iz = e^{iw} - e^{-iw}$. بضرب طرفي المعادلة بـ e^{iw} ، نحصل

على $(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$. نضع $U = e^{iw}$

$$U^2 - 2izU - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2iz)^2 + 4 = 4 - 4z^2 = 2^2(1-z^2).$$

$$U = e^{iw} = \frac{2iz + 2(1-z^2)^{1/2}}{2}$$

(1) $$iw = \log\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right) \Rightarrow \boxed{w = \sin^{-1} z = -i\log\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right)}.$$