جامعـــــة الملك سعـــــود كليـــة العلـــــوم قســــم الريـــاضيـــــــــات

الفصل الثاني 1432–1433 هـ/385–ريض/ الاختبار الشهري الأول/ الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأوّل (6 نقاط)

1) أوجد صورة محور السينات تحت تأثيرالدالة $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$, $z\neq i$.

2) استنتج صورة نصف المستوى السفلي $H^{-}=\{z\in\mathbb{C},\ \Im m\ z<0\}$ تحت تأثيرالدالة f .

3) أوجد صورة الشريط $B=\{z\in\mathbb{C},\ 0<\Im m\ z<\pi\}$ بالدالة $g(z)=-e^{z}$.

4) استنتج من خلال الأسئلة السابقة تحويلا من الشريط B إلى القرص الوحدة المفتوح $D=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$.

السؤال الثاني (3 نقاط):

لتكن $Log\ z$ القيمة الأساسية للدالة اللوغاريتمية $\log z$ و لتكن $z_1=2i$, $z_2=e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ فاحسب ما يلي :

$Log\ z_1$, $Log\ z_2$, $Log(z_1z_2)$, $Log\ z_1^{\,2}$, $Log\ z_2^{\,2}$ و $Log\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$.

السؤال الثالث (6 نقاط):

لتكن a,b,c أعداد حقيقية و $P(x,y)=a\ x^2+2b\ xy+c\ y^2$ (كثيرة حدود بمتغيرين حقيقيين x,y متجانسة من الدرجة 2).

1) أوجد شرط لازم وكافي لـ a,b,c بحيث يكون $P=\Re e(f)$ لدالة f كلية (تحليلية على $\mathbb{C}$).

2) نفترض أن هذا الشرط تحقق , فأوجد جميع الدوال الكلية f بحيث $P=\Re e(f)$.

السؤال الرابع (5 نقاط) :

ليكن D نطاق (مجموعة مفتوحة ومترابطة) من المستوى المركب $\mathbb{C}$ و ليكن f و g دالتين تحليليتين على D . فاثبت ما يلي:

1) إذا كان لكل $z\in D$, $f(z)+\overline{g(z)}\in\mathbb{R}$, فإنه يوجد $c\in\mathbb{R}$ بحيث $f(z)=c+g(z)$ لكل $z\in D$.

2) إذا كانت g ليس لها أصفار في النطاق D ولكل $z\in D$, $f(z)\overline{g(z)}\in\mathbb{R}$, فإنه يوجد $c\in\mathbb{R}$ بحيث $f(z)=c\ g(z)$ لكل $z\in D$.

و الله ولي التوفيـــــــق

لا يكتب في هذا الهامش

د. برهان

إصلاح الاختبار الشهري الأول (٣٨٥ ريض
التحليل المركب ١) للفصل الثاني ١٤٣٣/٣٢هـ

السؤال الأول (6 درجات)

① $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z = 0 \}$ محور السينات

نأخذ $z \in \Delta$ إذن $z = x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x+i}{x-i}$$

1 بما أن $|x+i| = |x-i|$ فإن $|f(x)| = 1$ ونستنتج أن

$$f(\Delta) = \{ z \ / \ |z| = 1 \} = \mathcal{C}_{(0,1)}$$

دائرة الوحدة.

② $\mathbb{C} = H^- \cup \Delta \cup H^+$ مترابط

2 $H^- = \{ z \ / \ \operatorname{Im} z < 0 \}$

$H^+ = \{ z \ / \ \operatorname{Im} z > 0 \}$

f متصلة على $\mathbb{C} \setminus \{i\}$

وبما أن $f(-i) = 0$ فإن $f(H^-) = \mathbb{D}(0,1)$

قرص الوحدة المفتوح

③

$$B = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi \}$$

$g(z) = -e^{z}$ دالة متصلة على $\mathbb{C}$.

2 نأخذ $z \in B$ ، $z = x + iy$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $0 < y < \pi$

$$g(z) = -e^{x+iy} = -e^{x}\left[\cos y + i \sin y\right]$$

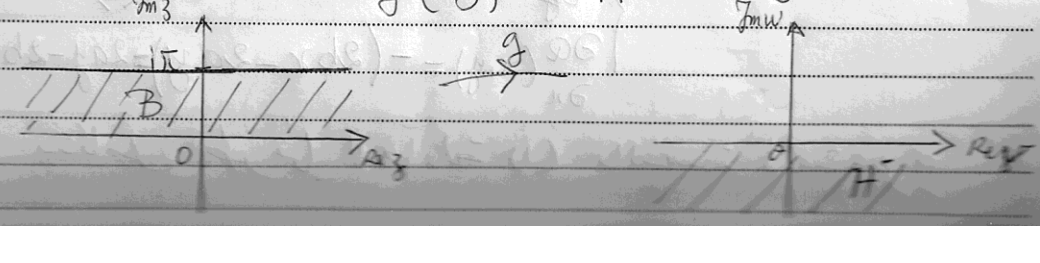
بما أن $0 < y < \pi$ فإن $\sin y > 0$.

$g(z) = w = u + iv$ حيث $u(x,y) = -e^{x}\cos y \in \mathbb{R}$

$v(x,y) = -e^{x}\sin y < 0$

فإن

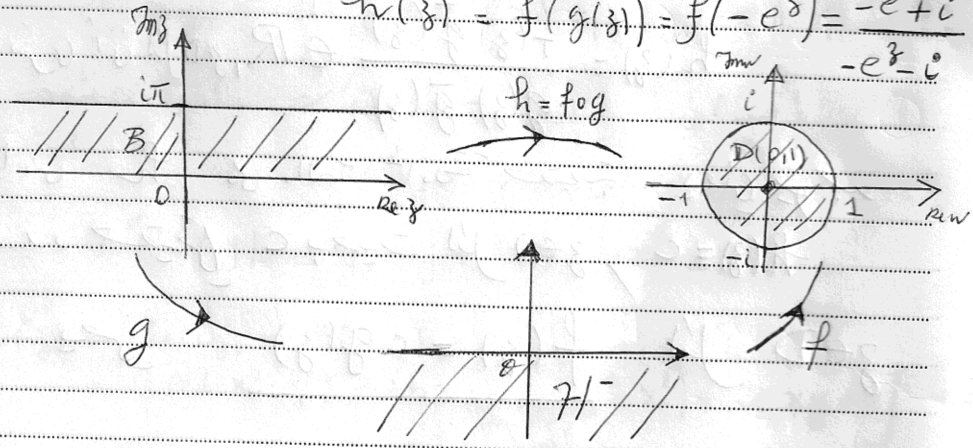
$$g(B) = H^-$$



(4) التحويل من الشريط B إلى قرص الوحدة المفتوح هو

$h = f\circ g$. يعني لكل $z\in B$

$$h(z) = f(g(z)) = f(-e^{z}) = \frac{-e^{z}+i}{-e^{z}-i}.$$



السؤال الثاني: (3 درجات)

* لكل $z\in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ، $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ حيث $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$

$$\operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} 2i = \ln|2i| + i\operatorname{Arg}(2i)$$

- $\operatorname{Log} z_1 = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{Log} z_2 = \operatorname{Log}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = \ln\left|e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right| + i\operatorname{Arg}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$$

- $\operatorname{Log} z_2 = -\frac{3\pi}{4}i$

$$z_1 z_2 = 2i\, e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\pi/2}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{-i\pi/4}$$

- $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \ln 2 - i\frac{\pi}{4}$

$$z_1^2 = (2i)^2 = -4$$

- غير معرف $\operatorname{Log}(-4) = \operatorname{Log}(z_1^2)$

$\log(-4) = \ln 4 + (2k+1)\pi$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)

$$z_2^2 = \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = i$$

- $\operatorname{Log}(z_2^2) = i\operatorname{Arg}\left(e^{-i\frac{3\pi}{2}}\right) = i\frac{\pi}{2}$

هذا الهامش

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln 2 + i\,\mathrm{Arg}\left(2e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln 2 - i\,\frac{3\pi}{4}$$

0,5

السؤال الثالث (6 درجات)

① ليكن $P = \mathrm{Re} f$ حيث f كلية، لابد أن يكون P دالة توافقية يعني $\Delta P \equiv 0$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2bx + 2cy \;;\quad \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2by$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 2c \;;\quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2a.$$

$$\Delta P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 2(a+c) = 0$$

2

إذن الشرط اللازم والكافي هو $a + c = 0$

② إذا كان $a + c = 0$ فإن $c = -a$، إذن $P(x,y) = ax^2 + 2bxy - ay^2$

بما أن P توافقية فإن لـ P مرافق Q بحيث تكون $f = P + iQ$ دالة كلية.

إذن f تحقق معادلتي كوشي-ريمان:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) & (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & (2) \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 2ax + 2by \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -(2bx - 2ay) = 2ay - 2bx \end{cases} \Leftrightarrow$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة للمتغير y:

لا يكتب في هذا الهامش

$$Q(x,y) = 2axy + by^2 + \alpha(x)$$

1

بالاشتقاق بالنسبة لـ x ومقارنة مع (2):

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2ay + \alpha'(x) = 2ay - 2bx$$

نجد أن: $\alpha'(x) = -2bx$ إذن: $\alpha(x) = -bx^2 + \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

يعني أن:

$$Q(x,y) = 2axy + by^2 - bx^2 + \alpha$$

1

$$f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$$
$$= \left[a(x^2-y^2) + 2bxy\right] + i\left[b(y^2-x^2) + 2axy + \alpha\right]$$
$$= a\left[\underbrace{x^2-y^2+2ixy}\right] + b\left[2xy + i(y^2-x^2)\right] + i\alpha$$
$$= a(x+iy)^2 - ib\left[\underbrace{x^2-y^2+2ixy}_{(x+iy)^2}\right] + i\alpha$$

1

$$f(z) = (a-ib)z^2 + i\alpha \;, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ a,b \in \mathbb{R}$$

السؤال الرابع (5 درجات)

① بما أن f و g دالتين تحليليتين على D فإن

0.5

$h = f - g$ هي دالة تحليلية على D.

1

إضافة عن ذلك، نرى أن لكل $z \in D$؛ $h(z) = \underbrace{f(z) + \overline{g(z)}}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\left(\overline{g(z)} + g(z)\right)}_{2\operatorname{Re} g \in \mathbb{R}}$

يعني لكل $z \in D$؛ $h(z) \in \mathbb{R}$ (إذن h دالة حقيقية)

باستخدام معادلتي كوشي ريمان، h هي دالة ثابتة حقيقية

1

إذن لكل $z \in D$، $f(z) - g(z) = c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

يعني $f(z) = c + g(z)$.

لا يكتب في هذا الهامش

② بما أن g ليس لها أصفار في D فإن

$h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ هي تحليلية على D 0.5

كما نرى أن لكل $z\in D$ ، $h(z)=\dfrac{f(z)\,\bar{g}(z)}{g(z)\,\bar{g}(z)}\in\mathbb{R}$ 1

إذن h هي دالة ثابتة حقيقية . يعني يوجد

عدد حقيقي c بحيث لكل $z\in D$ ، $h(z)=c$ 1

يعني $f(z)=c\,g(z)$ لكل $z\in D$