جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات

الفصل الثاني 1433-1434 هـ/487-ريض/ الاختبار الشهري الأول/ الزمن: ساعتان

السؤال الأوّل (5 درجات)

ليكن $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}^*$ حيث $a_1 = \Re e\, a,\ a_2 = \Im m\, a$.

1) حل المعادلة في $\mathbb{C}$ التالية : $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$. ①

2) لتكن z_1, z_2 جذور المعادلة ولتكن A, B النقاط التي تمثل z_1, z_2 في المستوى المركب $(O,\vec{u},\vec{v})$.

أ) أثبت أن : O, A, B تقع على خط مستقيم إذا وفقط إذا كان $a_1 = 0$. ②

ب) أثبت أن : $|a| = 1 \Leftrightarrow \overline{OA} \perp \overline{OB}$. ②

السؤال الثاني (13 درجة)

1) لتكن $z \in \mathbb{C}$ بحيث $\Im m\, z > 0$ فاثبت أن : $\Im m\left(\frac{z}{1+z^2}\right) > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$. ②

2) احسب النهايات التالية (إن وجدت) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\, i^n}{n+1},\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ ③

3) أوجد قيمة $log(-2i)$ ، $L\,og(-2i)$ و $\sqrt{-2i}$. ③

4) بيّن إنه إذا كانت $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة كلية وكانت $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ فإن g أيضا كلية. ②

(إرشاد : ضع $z = \bar{w}$ واستعمل صيغة $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ لمعادلتي كوشي-ريمان).

5) بيّن أن : $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ ثم استنتج قيمة $\tan^{-1} 2i$. ③

السؤال الثالث (8 درجات)

1) إذا كانت $P(x,y)$ دالة توافقية فبيّن أن : $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$ هي أيضا دالة توافقية. ③

2) لتكن F دالة تحليلية بحيث $\Re e\, F = P$. أوجد صيغة الدالة $g(z)$ بحيث $\Re e\, g = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$. ③

3) استخدم 2) لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية : $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ على $\mathbb{C} \,|\, \mathbb{R}_-$. ②

و الله ولي التوفيق

د. برهان

لا يكتب
هذا الهـ

إصلاح الاختبار الشهري الأول ٤٨٧ ريض
للفصل الثاني ١٤٣٣ - ١٤٣٤ هـ

السؤال الأول (5 درجات)

① $a \in \mathbb{C}^*$,
$$z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$$
$$(z-1)^2 + a^2 = 0$$
$$(z-1)^2 = (ia)^2$$
$$z - 1 = \pm ia$$
$$S_{\mathbb{C}} = \{1 \pm ia\}$$

② (أ) O, A, B تقع على خط مستقيم $\Leftrightarrow$ $A\hat{O}B = \{0$ أو $\pi\}$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$$

نضع $Z = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1+ia}{1-ia}$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1-i\bar{a}}{1+i\bar{a}}$$

$$\Leftrightarrow (1+ia)(1+i\bar{a}) = (1-ia)(1-i\bar{a})$$
$$\Leftrightarrow 1 + i\bar{a} + ia - |a|^2 = 1 - ia - i\bar{a} - |a|^2$$
$$\Leftrightarrow 2ia = -2i\bar{a}$$
$$\Leftrightarrow a = -\bar{a} \Leftrightarrow a \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,a = a_1 = 0$$

(ب) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow A\hat{O}B \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow Z = \dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow Z = -\overline{Z} \Leftrightarrow \frac{1+ia}{1-ia} = -\frac{1-i\bar{a}}{1+i\bar{a}}$$

$$\Leftrightarrow (1+ia)(1+i\bar{a}) = (1-ia)(i\bar{a}-1)$$
$$\Leftrightarrow 1 + \cancel{i\bar{a}} + \cancel{ia} - |a|^2 = -1 + \cancel{i\bar{a}} + |a|^2 + \cancel{ia} \Leftrightarrow |a|^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow |a| = 1$$

لا يك

هذا ال

السؤال الثاني (13 درجة)

① لتكن $z \in \mathbb{C}$ بحيث $\operatorname{Im} z > 0$. نضع $Z = \frac{z}{1+z^2}$

$$\operatorname{Im} Z = \frac{Z - \overline{Z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{1+z^2} - \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z(1+\overline{z}^2) - \overline{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\overline{z}^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z + z\overline{z}^2 - \overline{z} - \overline{z}z^2}{1+\overline{z}^2 + z^2 + |z|^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z - \overline{z} + |z|^2(\overline{z} - z)}{1 + 2\operatorname{Re} z^2 + |z^2|^2}\right)$$

$$= \frac{z - \overline{z}}{2i}\left(\frac{1 - |z|^2}{1 + 2\operatorname{Re} z^2 + |z^2|^2}\right)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{1+z^2}\right) = (\operatorname{Im} z)\cdot\left(\frac{1-|z|^2}{|1+z^2|^2}\right) > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

② - نضع $a_n = \frac{n\, i^n}{n+1}$ لكل $n \geq 0$

$$a_{2n} = \frac{2n\,(-1)^n}{2n+1}$$

كلاهما ليس لهما نهاية

$a_{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ لأن : $a_{2n} = \frac{(2n+1)(-1)^n i}{2n+2}$

$a_{4n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

فنستنتج أن $\lim_{n\to\infty} \frac{n\, i^n}{n+1}$ غير موجودة.

- نضع $b_n = n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

$$|b_n| = n\left|\frac{1+i}{2}\right|^n = n\, e^{n \ln\left|\frac{1+i}{2}\right|}$$

$$|b_n| = n\, e^{n \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ ، (لأن $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} < \ln 1 = 0$)

فنستنتج أن $\lim \frac{n\, i^n}{n+1} = 0$

$-2i = 2e^{i(4k+3)\frac{\pi}{2}}$ لأن $k \in \mathbb{Z}$ ③

① فإن $\log(-2i) = \log\left(2e^{i\left(\frac{4k+3}{2}\right)\pi}\right)$

• $\log(-2i) = \ln 2 + i\,\frac{(4k+3)\pi}{2}$

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

حيث $-\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi$

① فإن $\bullet\ \mathrm{Log}(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$

$$\sqrt{-2i} = (-2i)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(-2i)}$$

$$\sqrt{-2i} = e^{\frac{1}{2}\left[\ln 2 + i\left(\frac{4k+3}{2}\right)\pi\right]}$$

$$\sqrt{-2i} = \sqrt{2}\; e^{i\frac{4k+3}{4}\pi}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\begin{cases} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ e^{-i\pi/4}\end{cases}$$

① أو $\bullet\ \sqrt{-2i} = \begin{cases} -1+i \\ 1-i \end{cases}$

④

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\overline{f(\bar{z})}\right)$$

نضع $z = \overline{w}$

2) $$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \overline{\frac{\partial}{\partial w}\left(f(w)\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w)\right)}$$

بما أن f تحليلية على $\mathbb{C}$ فإن $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) \equiv 0$

فنستنتج أن: $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) \equiv 0 \iff g$ هي دالة تحليلية على $\mathbb{C}$

لا يكتب هذا الهامش

(5) بما أن $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ و $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

فإن $\tan z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$

الآن نضع $w = \tan^{-1} z$ فإن لدينا $\tan w = z$

يعني $z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}$

$$iz\left(e^{2iw}+1\right) = e^{2iw}-1$$

(2)

$$iz\,e^{2iw} + iz = e^{2iw}-1$$

$$e^{2iw}\left(iz-1\right) = -iz-1$$

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$1+iz = -i(i-z)$

$$2iw = \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

$$w = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

(1)

$$\tan^{-1} 2i = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-2i}{i+2i}\right) = \frac{1}{2i}\log\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\left[-\ln 3 + i\,(2k+1)\pi\right] \quad , k\in\mathbb{Z}$$

$$\tan^{-1} 2i = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi + i\,\frac{\ln 3}{2}$$

السؤال الثالث (8 درجات)

(1) نضع $\varphi(x,y) = x\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, φ من الصف الثاني

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \varphi_x(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x} + x\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}$$

(1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) = \varphi_{xx}(x,y) = 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 P}{\partial x^2\,\partial y}$$

لأنه
هذا

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_y = x\,\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + y\,\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

1

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varphi_{yy} = x\,\frac{\partial^3 P}{\partial y^2\,\partial x} + 2\,\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + y\,\frac{\partial^3 P}{\partial y^3}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi &= \varphi_{xx} + \varphi_{yy} \\
&= 2\,\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} + y\,\frac{\partial^3 P}{\partial x^2\,\partial y} + x\,\frac{\partial^3 P}{\partial y^2\,\partial x} + 2\,\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + y\,\frac{\partial^3 P}{\partial y^3} \\
&= 2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) + x\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right] + y\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right] \\
&= 2\,\Delta P + x\,\frac{\partial}{\partial x}(\Delta P) + y\,\frac{\partial}{\partial y}(\Delta P)
\end{aligned}$$

1

بما أن $\Delta P = 0$ فإن $\Delta \varphi = 0$ فنستنتج أن

$\varphi = x\,\frac{\partial P}{\partial x} + y\,\frac{\partial P}{\partial y}$ هي دالة توافقية

2 $P = \mathrm{Re}\, F$ حيث F تحليلية.

$F(z) = P(z) + i\, Q(z)$ حيث Q مرافق لـ P

$$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}$$

باستخدام معادلتي كوشي ريمان: لدينا: $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$

3

فإن $F'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} - i\,\frac{\partial P}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
z\,F'(z) &= (x+iy)\left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\,\frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \underbrace{\left(x\,\frac{\partial P}{\partial x} + y\,\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{\mathrm{Re}\, g} + i\left(y\,\frac{\partial P}{\partial x} - x\,\frac{\partial P}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

فنستنتج أن: $g(z) = z\,F'(z)$ وهي دالة تحليلية

لا يك
هذا ال

$$\mathrm{Re}\, g = 1 \iff x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$ (3)

حيث $g(z) = zF'(z)$ ، لذلك يكفي أن نأخذ

$F'(z) = 1/z$. فإن $F(z) = \mathrm{Log}\, z$ على $\mathbb{C}/\mathbb{R}_-$

بما أن $P = \mathrm{Re}\, F$ فنستنتج أن $P(x,y) = \ln|z|$

يعني $P(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{C}/\mathbb{R}_-$

(2)

لدينا

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ لكل $(x,y)\in\mathbb{C}/\mathbb{R}_-$