جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات
الفصل الصيفي 1434-1435 هـ/ 487 ريض/ الاختبار الشهري الأول /الزمن: ساعة ونصف

الجزء الأول (18 درجة) :

1) أوجد القيم التالية: $(1+i)^i$, $\sqrt{i-1}$, $\frac{2+i}{3-i}-\frac{4+i}{1+2i}$.

2) ارسم المنحنيات التالية :

أ) $z(t)=2e^{it}+i$ حيث $0\le t\le 2\pi$.

ب) $z(t)=2\cos t+3i\sin t$ حيث $0\le t\le 2\pi$.

ج) $z(t)=\cosh t+i\sinh t$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

3) لتكن $z\in\mathbb{C}$ بحيث $\Im m\, z>0$ فاثبت أن : $|z|<1 \Leftrightarrow \Im m\left(\frac{z}{1+z^2}\right)>0$.

4) أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد المركب $\omega=1-i$.

5) بيّن أن: $\sinh z=-i\sin(iz)$ لكل $z\in\mathbb{C}$.

6) جد عبارة لوغاريتميّة للدالة $\cos^{-1}z$ ثمّ احسب $\frac{d\cos^{-1}z}{dz}$ موضحا كل خطوات الحل.

الجزء الثاني (7 درجات)

لتكن $u(x,y)=e^x\sin y$

1) بيّن أن $u(x,y)$ هي دالة توافقيّة على $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد مرافقة توافقيّة $v(x,y)$ لها.

2) استنتج وجود دالّة كليّة $f(z)$ جزؤها الحقيقي $\Re e\ f(x+iy)=u(x,y)$. أوجد عبارة لـ $f(z)$ بدلالة z ثمّ اكتب f على الصيغة القطبيّة.

و الله ولي التوفيـــــق

لا يكتب في هذا الهامش

د. برهان

إصلاح الاختبار الشهري الأول
للفصل الصيفي ٣٤/١٤٣٥هـ
ريض ٤٨٧

السؤال الأول: (18 درجة)

$$\frac{2+i}{3-i} - \frac{4+i}{1+2i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} - \frac{(4+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \quad 1$$

$$= \frac{6-1+5i}{9+1} - \frac{4+2-7i}{1+4}$$

2 $$= \frac{5+5i}{10} - \frac{6-7i}{5}$$

$$= \frac{5+5i-12+14i}{10} = -\frac{7}{10} + \frac{19}{10}i$$

$$\sqrt{i-1} = (i-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(i-1)}$$

$$\log(i-1) = \ln|i-1| + i\arg(i-1)$$

$$|i-1| = \sqrt{2}$$

$$\cos(\arg(i-1)) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin(\arg(i-1)) = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \arg(i-1) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

1.5 $$\log(i-1) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\sqrt{i-1} = e^{\frac{1}{4}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{4}\ln 2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)}$$

$$= 2^{1/4}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)}$$

1.5 $$= \pm 2^{1/4}\, e^{i\,3\pi/8}.$$

$$(1+i)^{i} = e^{i\log(1+i)}$$

5 $$\log(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i)$$

$$|1+i| = \sqrt{2}$$

$$\cos(\arg(1+i)) = 1/\sqrt{2}$$

$$\sin(\arg(1+i)) = 1/\sqrt{2} \quad ; \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$(1+i)^{i} = e^{i\left[\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$$

5 $$(1+i)^{i} = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} e^{i\frac{\ln 2}{2}} \quad , k\in\mathbb{Z}$$

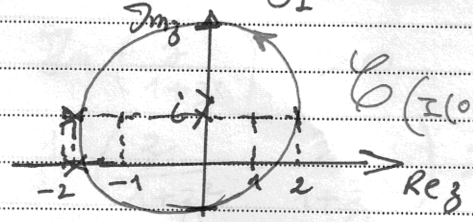
2 أ $$z(t) = i + 2e^{it} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$z - i = 2e^{it}$$

$$|z-i| = |2e^{it}| = 2$$

1 إذن $z(t)$ هو التمثيل الوسيطي لدائرة
مركزها $z_I = i$ ونصف قطرها 2.

(Circle)



$\mathcal{C}(I(0,1)\,;2)$

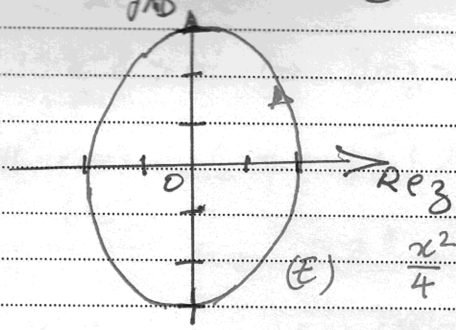
(ب) $$z(t) = 2\cos t + 3i\sin t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$= x(t) + i\,y(t)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ y/3 = \sin t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

بما أن $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ فإن $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ وهي

معادلة قطع ناقص (Ellipse)

1



(E) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

ج) $z(t) = \cosh t + i \sinh t \;\; , \;\; t \in \mathbb{R}$

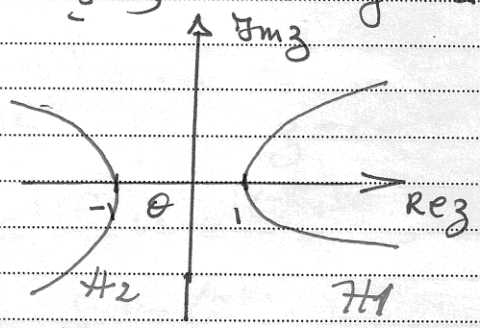
$= x(t) + i\,y(t)$

إذن $\begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases}$ وبما أن $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

فإن $x^2 - y^2 = 1$ وهي معادلة قطع زائد.

(Hyperbola)

1



$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$

3 أجد $z \in \mathbb{C}$ بحيث $\operatorname{Im} z > 0$.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{1+z^2}\right) > 0$$

1

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{|1+z^2|^2}\right) > 0$$

1

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[z + z\bar{z}^2 - \bar{z} - \bar{z}z^2\right] > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[(z - \bar{z}) + z\bar{z}(\bar{z} - z)\right] > 0$$

لا تكتب في هذا الهامش

(3)

$$\sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$

$$-i\sin(iz) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

(6)

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$2w = e^{iz} + e^{-iz}$$

$$(e^{iz})^2 - 2w\,(e^{iz}) + 1 = 0$$

نضع $U = e^{iz}$

معادلة من الدرجة الثانية

$$U^2 - 2w\,U + 1 = 0$$

$$a = 1 \;;\; b = -2w \;;\; c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4w^2 - 4$$

$$e^{iz} = U_{1,2} = \frac{2w - 2\sqrt{w^2-1}}{2}$$

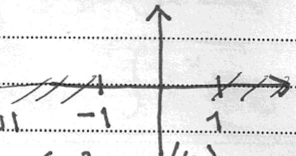
$$iz = \log\left(w - \sqrt{w^2-1}\right)$$

(2)

$$z = \frac{1}{i}\log\left(w - \sqrt{w^2-1}\right)$$

متعدد القيم

$$\boxed{\cos^{-1} z = -i\log\left(z - (z^2-1)^{1/2}\right)}$$



نعرف الشعبة $\mathbb{C} \setminus (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ على الاساسية :

وهي تحليلية على $\cos^{-1} z = -i\,\mathrm{Log}\left(z - (z^2-1)^{1/2}\right)$

(1) $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = -i\left[\frac{1 - \frac{1}{2}(z^2-1)^{-1/2}\,2z}{z - (z^2-1)^{1/2}}\right] = -i\left[\frac{1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}}{z - (z^2-1)^{1/2}}\right]$$

$$= i\,\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$

$\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z^2-1)}$

حيث

لا يكتب في
هذا الهامش

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\left(1-z\bar{z}\right)>0$$

بما أن $\operatorname{Im} z>0 \Leftrightarrow \frac{z-\bar{z}}{2i}>0$ فإن

(1) $(1-z\bar{z})>0 \Leftrightarrow 1>z\bar{z}=|z|^2$

$\Leftrightarrow 1>|z|$

(4) $z^3=1-i=\omega$

$$\omega=1-i=|1-i|\,e^{i\arg(1-i)}$$

$$|1-i|=\sqrt{2}$$

$\cos(\arg(1-i))=1/\sqrt{2}$
$\sin(\arg(1-i))=-1/\sqrt{2}$ $\Rightarrow \arg(1-i)=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$

$k\in\mathbb{Z}$

(1) $$\omega=(1-i)=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$$

نضع $z=re^{i\theta}$ فإن $z^3=r^3e^{i3\theta}$

إذن $r^3e^{i3\theta}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)}$

$$\begin{cases} r=(2^{1/2})^{1/3} \\ 3\theta_k=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \text{(1)} \begin{cases} r=2^{1/6} \\ \theta_k=\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

الجذور التكعيبية لـ ω هي حيث $k=0,1,2$

$$z_k=2^{1/6}\,e^{i\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$$ حيث $k=0,1,2$

(1)

(5) لكل $z\in\mathbb{C}$ ، نعلم أن

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

ولكل $w\in\mathbb{C}$ ، $\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$ فإن $\sin(iz)=\frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i}$

السؤال الثاني (7 درجات)

① $u(x,y) = e^x \sin y$ ناعمة على R^2.

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$; $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \sin y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = e^x \sin y$

فإن $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$

1 $= 0$

فإن الدالة u هي توافقية على R^2.

باستخدام النظرية , $f = u + iv$ تحليلية على $\mathbb{C}$

حيث v هي المرافقة لـ u.

بما أن f تحليلية على $\mathbb{C}$ فهي تحقق معادلتي كوشي ريمان،

1
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y \end{cases}$$

إذن
1
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos y & (1) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y & (2) \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ x:

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x}\, dx = -\int e^x \cos y \, dx$$

$$v(x,y) = -e^x \cos y + \varphi(y)$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ y فإن،

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \sin y + \varphi'(y)$$

بالمقارنة مع (2) فنستنتج أن $\varphi'(y) = 0$ إذن $\varphi = cst$

لا يكتب في هذا الهامش

(1) فنستنتج أن $v(x,y) = -e^{x}\cos y$

(2) $f = U + iv$

$\therefore f(x+iy) = e^{x}\sin y + i(-e^{x}\cos y)$

$= e^{x}[\sin y - i\cos y]$

$= -i\, e^{x}[\underbrace{\cos y + i\sin y}]$

$= -i e^{x}\, e^{iy}$

(1,5)

$= -i\, e^{x+iy}$

إذن $f(z) = -i\, e^{z}$ لكل $z \in \mathbb{C}$

$z = re^{i\theta}$, $r = |z| > 0$, $\theta = \arg z$

$f(r,\theta) = -i\, e^{re^{i\theta}}$

$= -i\, e^{r[\cos\theta + i\sin\theta]}$

$= -i\, e^{r\cos\theta}\, e^{ir\sin\theta}$

(1,5)

$= -i\, e^{r\cos\theta}[\cos(r\sin\theta) + i\sin(r\sin\theta)]$

$= e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta) - i\, e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta).$