جامعـــــة الملك سعـــــود كليـــة العلـــــوم قســـم الريـــاضيـــــــات	
الفصل الأول 1432–1433 هـ/385–ريض/ الاختبار الثاني/ الزمن: ساعة ونصف	

السؤال الأوّل (6 درجات) : ليكن Γ المسار الممثل وسيطيا كما يلي :

$$z(t)=\begin{cases} t \;;\; 0\le t\le 1 \\ e^{\frac{3\pi}{2}i(t-1)} \;;\; 1\le t\le 2 \\ i(t-3) \;;\; 2\le t\le 3 \end{cases}$$

1) ارسم هذا المسار موضحا التوجيه.

2) أوجد طول هذا المسار (يمكن حسابه دون اللجوء إلى التكامل).

3) احسب التكامل التالي على Γ : $I=\int_\Gamma y\;dz$ حيث $z=x+iy$. هل هذه النتيجة تتناقض مع نظرية كوشي.

السؤال الثاني (5 درجات): استنتج صيغة واليس ($Wallis\ 's\ formula$) :

$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\;d\theta=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}2\pi.$ وذلك بمكاملة $f(z)=\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$ على $|z|=1$.

السؤال الثالث (4 درجات): لنفترض أن $P(z)$ كثيرة حدود ليس لها جذور على مسار مغلق موجب موجه. أثبت أن عدد جذور P (بحساب التكرر) التي تقع داخل Γ يعطى بواسطة التكامل : $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$.

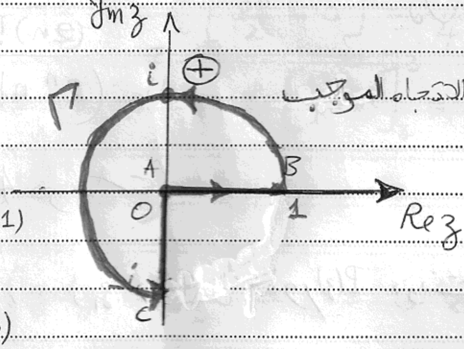
إرشاد : بين أولا أن : $\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}$ حيث $z_1,\dots,z_n$ هي كل جذور P دونت طبقا للتكرار.

السؤال الرابع (5 درجات) : لتكن $f(z)$ دالة تحليلية على القرص المغلق $|z|\le 1$ بحيث $|f|=1$ على دائرة الوحدة $|z|=1$ و $f(z)$ لا تقبل أصفارا داخل $|z|\le 1$. بين أن $f(z)\equiv c$ (ثابتة) على $|z|\le 1$.

اصلاح الاختبار الشهري الثاني
للفصل الأول ١٤٣٢ - ١٤٣٣ هـ

السؤال الأول : (6 درجات)

(1)



$[A,B] : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\quad t \longmapsto t$

(2) $\widehat{BC} : [1,2] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\quad t \longmapsto e^{\frac{3\pi}{2} i (t-1)}$

$[C,A] : [2,3] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\quad t \longmapsto i(t-3)$

Γ موجه في الاتجاه الموجب

(2) هذا المسار Γ متكون من قطعتين مستقيمتين $[A,B]$ و $[C,A]$ و $1/4$ دائرة نصف قطرها 1 . فإن طول المنحنى Γ هو

$$\ell(\Gamma) = \ell([A,B]) + \ell([C,A]) + \ell(\widehat{BC})$$

(1)
$$\ell(\Gamma) = 1 + 1 + \left(\frac{3}{4} \times 2\pi\right)$$

$$\ell(\Gamma) = 2 + \frac{3\pi}{2} = \frac{4+3\pi}{2}$$

(3) $I = \int_\Gamma y \, dz$ حيث $z = x + iy$

$$I = \int_{[AB]} y \, dz + \int_{\widehat{BC}} y \, dz + \int_{[C,A]} y \, dz$$

(1)
- $\int_{[AB]} y \, dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(t) \, dt = 0$

(1)
- $\int_{\widehat{BC}} y \, dz = \int_1^2 \operatorname{Im}\left(e^{\frac{3\pi i}{2}(t-1)}\right) \frac{3\pi i}{2} e^{\frac{3\pi i}{2}(t-1)} \, dt$

$$= \frac{3\pi i}{2} \int_1^2 \left(\sin\left[\frac{3\pi}{2}(t-1)\right]\right)\left[\cos\left[\frac{3\pi}{2}(t-1)\right] + i \sin\left[\frac{3\pi}{2}(t-1)\right]\right] dt$$

$$= \frac{3\pi i}{2} \int_1^2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}(t-1)\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2}(t-1)\right) dt - \frac{3\pi}{2} \int_1^2 \sin^2\left[\frac{3\pi}{2}(t-1)\right] dt$$

نضع $u = \frac{3\pi}{2}(t-1)$ فإن $du = \frac{3\pi}{2} dt \Leftarrow dt = \frac{2}{3\pi} du$

عندما $t=1$, $u=0$ و عندما $t=2$ فإن $u = \frac{3\pi}{2}$

$$\int_{\widehat{BC}} y \, dz = \frac{3\pi i}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3\pi} \int_0^{3\pi/2} \sin u \cos u \, du - \frac{\cancel{3\pi}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3\pi}} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 u \, du$$

$$\int_{BC} y\,dz = \frac{i}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2u\,du - \int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{1-\cos 2u}{2}\right]du$$

$$= \frac{i}{2}\left[-\frac{\cos 2u}{2}\right]_0^{3\pi/2} - \frac{1}{2}\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{3\pi/2}$$

$$= -\frac{i}{4}\left[-1-1\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{3\pi}{2} - 0\right] = \frac{-3\pi}{4} + \frac{i}{2}$$

- $\int_{[CA]} y\,dz = \int_2^3 (t-3)\,i\,dt = i\left[\frac{t^2}{2} - 3t\right]_2^3 = i\left[\frac{9}{2} - 9 - 2 + 6\right] = -\frac{i}{2}$

$z(t) = i(t-3)$

1 $\frac{dz}{dt} = z'(t) = i$

نستنتج أن $\int_\Gamma y\,dz = \frac{-3\pi}{4}$. وهذا لا يتعارض

مع نظرية كوشي رغم أن المسار Γ هو مغلق لأن الدالة

$f(z) = \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} = y$ ليست تحليلية.

السؤال الثاني: (5 درجات)

نعلم أن $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

التمثيل الوسيطي للدائرة الوحدة $|z| = 1$ هو أن $z(\theta) = e^{i\theta}$

لكل $0 \le \theta < 2\pi$

1 إذن $\cos\theta = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$; $dz = i e^{i\theta} d\theta = iz\,d\theta$ يعني:

$d\theta = \frac{dz}{iz}$. بالتعويض:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta = \oint_{|z|=1} \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n} \cdot \frac{dz}{iz}$$

1
$$= -i \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n} dz$$

$$= \frac{-i}{2^{2n}} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^{2n+1}} \cdot (z^2+1)^{2n}\,dz$$

1 باستخدام الآن قاعدة نيوتن: $(z^2+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} z^{2k}$

1
$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{-i}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \left(\oint_{|z|=1} \frac{z^{2k}}{z^{2n+1}}\,dz\right)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{2k}}{z^{2n+1}}\,dz = \oint_{|z|=1} z^{2k-2n-1}\,dz = \begin{cases} 0\ ; & k \neq n \\ 2\pi i\ ; & k = n \end{cases}$$

(1)

إذن:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{-i}{2^{2n}}\,\frac{(2n)!}{n!\,n!}\,2\pi i$$

$$= \frac{(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\,2\pi$$

السؤال الثالث: (4 درجات)

نفترض أن $z_1, \dots, z_n$ هي كل جذور $P(z)$ دون أخذ التكرار

فإنه يوجد $\lambda \in \mathbb{C}$ بحيث $P(z) = \lambda(z-z_1)\cdots(z-z_n)$

(1)

$$\log P(z) = \log\lambda + \log(z-z_1) + \cdots + \log(z-z_n)$$

باشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ z:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z-z_k}$$

(1)

بتكامل طرفي المعادلة،

$$\oint_\Gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \sum_{k=0}^{n}\left(\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_k}\right)$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_k} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } z_k \text{ يقع خارج } \Gamma \\ 2\pi i & \text{إذا كان } z_k \text{ يقع داخل } \Gamma \end{cases}$$

(1)

فنستنتج أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = m$$

(1)

حيث m هو عدد جذور P التي تقع داخل المسار Γ.

السؤال الرابع (5 درجات)

بما أن $f(z)$ لا تقبل أصفاراً على القرص الواحدي المغلق $|z| \leq 1$

فإن $\frac{1}{f(z)}$ هي دالة تحليلية على $|z| \leq 1$.

(1)

لا يكتب في هذا الهامش

باستخدام مبدأ القيمة العظمى للمقياس على كل من الدالتين $f(z)$ و $\frac{1}{f(z)}$ فإنه (باعتبار أن $|f|=1$ على $|z|=1$) 1

$$\max_{|z|\le 1}|f(z)| = \max_{|z|=1}|f(z)| = 1$$

و 1

$$\min_{|z|\le 1}\left|\frac{1}{f(z)}\right| = \min_{|z|=1}\left|\frac{1}{f(z)}\right| = 1$$

ومنه $|f(z)|\le 1$ و $\left|\frac{1}{f(z)}\right|\le 1$ لكل $|z|\le 1$. لهذا 1

$1\le |f(z)|\le 1$ لكل $|z|\le 1$. فنستنتج أن

$|f(z)|=1$ لكل $|z|\le 1$. إذن يوجد $\psi\in\mathbb{R}$ بحيث 1

$f(re^{i\theta}) = e^{i\psi}$ لكل $0\le r\le 1$ ، $\theta\in\mathbb{R}$ (يعني: $f(z)=c$ لكل $|z|\le 1$ حيث $|c|=1$)