جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات

الفصل الثاني 1433-1434 هـ/487-ريض/ الاختبار الشهري الثاني/ الزمن: ساعتان

السؤال الأوّل (6 درجات)

ليكن Γ المسار المغلق المشكل من القطع المستقيمة الأربع التالية : من 2 إلى i, من i إلى $-\frac{1}{2}$, من $-\frac{1}{2}$ إلى $-i$ و من $-i$ إلى 2.

1) ارسم Γ وبيّن فيما إذا كان موجّه موجبا أم سالبا. ما هو طول Γ ؟

2) احسب التكامل التالي : $\oint_{\Gamma} \frac{z^5}{(z-1)^3} dz$.

السؤال الثاني (5 درجات):

استنتج صيغة واليس ***Wallis formula*** : لكل $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} 2\pi$

وذلك بمكاملة $f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$ على دائرة الوحدة $|z| = 1$.

السؤال الثالث (7 درجات):

1) باستخدام صيغة كوشي التكاملية, احسب التكامل : $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$.

2) لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة كلية و لنفترض أنه يوجد عدد حقيقي موجب $M > 0$ الذي يحقق:
لكل $z \in \mathbb{C}$, $\Im m\, f(z) \le M$. برهن أن f هي دالة ثابتة على $\mathbb{C}$.

(إرشاد : ادرس الدالة e^{-if}).

السؤال الرابع (7 درجات):

1) على ماذا ينصّ مبدأ القيمة العظمى للمقياس ؟

2) بيّن أنه إذا كان $z = x + iy \in \mathbb{C}$ فإن $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

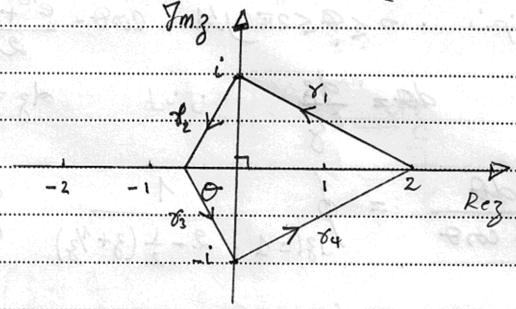
3) استخدم 1) و 2) لإيجاد القيمة العظمى لمقياس الدالة $f(z) = \sin z$ على المنطقة المستطيلة $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} / 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1\}$.

و الله ولي التوفيق

في هذا الهامش

إصلاح الاختبار الشهري الثاني ٤٨٧ ريض
للفصل الثاني ١٤٣٣ - ١٤٣٤هـ

السؤال الأول (6 درجات)



① ②

Γ موجه موجبا ومغلق.

①

$$L(\Gamma) = 2L(\gamma_1) + 2L(\gamma_2)$$
$$= 2\sqrt{4+1} + 2\sqrt{1^2+(1/2)^2} = 2\left(\sqrt{5}+\sqrt{\tfrac{5}{4}}\right)$$
$$= 2\sqrt{5}\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = 3\sqrt{5}$$

$$\oint_\Gamma \frac{z^5}{(z-1)^3}\,dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$ ②

حيث $f(z)=z^5$, $z_0=1$, $n=2$

③ باستخدام قاعدة تعميم صيغة كوشي التكاملية

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$f'(z)=5z^4$; $f''(z)=20z^3$

فإن
$$\oint_\Gamma \frac{z^5}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1)$$
$$= \pi i \; 20 = 20\pi i$$

السؤال الثاني :

لتكن $n\in\mathbb{N}$.
نضع
$$W_{2n} = \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta$$

نعلم أن $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$

① نضع الآن : $z(\theta) = e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$

$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ إذن $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$

هذا الهامش

$$\cos^{2n}\theta = \left(\frac{z + 1/z}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\left(z + 1/z\right)^{2n}$$

1 $$W_{2n} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2^{2n}}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$W_{2n} = \frac{-i}{2^{2n}} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz$$

باستخدام قاعدة ذي الحدين:

1 $$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k!}{(2n)!\,(2n-k)!}\, z^{k}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k}$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k!}{(2n)!\,(2n-k)!}\, z^{2k-2n}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k!}{(2n)!\,(2n-k)!}\, z^{2k-2n-1}$$

1 $$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = \oint_{|z|=1}\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{k!}{(2n)!\,(2n-k)!}\, z^{2k-2n-1}\right) dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2n)!\,(2n-k)!}\left(\oint_{\Gamma} z^{2k-2n-1} dz\right)$$

نعلم أن: $\oint_{|z|=1} z^{l} dz = \begin{cases} 2\pi i, & l=-1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$ فإن $\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = \frac{\cancel{n!}\, 2\pi i}{(2n)!\, \cancel{n!}}$

1

$$W_{2n} = \frac{-i}{2^{2n}} \cdot \frac{2\pi i}{(2n)!} = \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} = \frac{(2n)!\, 2\pi}{(2^{n}\, n!)^{2}}$$

$$W_{2n} = \frac{1\times 3\times 5\times \dots \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \dots \times 2n} \cdot 2\pi$$

<u>السؤال الثالث</u> (7 درجات):

$$\int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \int_{0}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$ حيث $f(\theta) = \frac{1}{2-\cos\theta}$ 1

بما أن $f(-\theta) = f(\theta)$ (دالة زوجية) فإن:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$ (1)

نعلم أن $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ لأن $0 \le \theta \le 2\pi$ ، نضع $z(\theta) = e^{i\theta}$

فإن $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\, d\theta$ أي أن $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2-\frac{1}{2}(z+1/z)} \frac{dz}{iz}$$ (1)

$$= -i \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-\frac{1}{2}(z^2+1)} = 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1}$$

$$z^2-4z+1=0$$

$$\Delta = 16-4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$$

$$z_1 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$z_1 - z_2 = -2\sqrt{3}$

$$z_2 = 2+\sqrt{3}$$

بما أن $|z_1 z_2| = 1$ و $|z_2|>1$ فإن $|z_1|<1$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{(z-z_2)}}{(z-z_1)} dz$$ (1)

باستخدام صيغة كوشي التكاملية $\oint_\Gamma \frac{g(z)}{(z-z_1)} dz = 2\pi i\, g(z_1)$

حيث $g(z) = \frac{1}{z-z_2}$ ، $\Gamma : |z|=1$

و هي تحليلية داخل قرص الوحدة؛

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1} = 2\pi i \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{-\pi i}{\sqrt{3}}$$ (1)

إذن $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ فنستنتج أن $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

② بما أن f هي دالة كلية فإن e^{-if} هي أيضا دالة كلية،

$$|e^{-if}| = \left|e^{-i(\operatorname{Re}f + i\operatorname{Im}f)}\right| = \left|e^{\operatorname{Im}f} \cdot e^{-i\operatorname{Re}f}\right|$$

$$= e^{\operatorname{Im}f} \leq e^{M} < \infty$$ ①

(لأن $\operatorname{Im} f(z) \leq M$ لكل $z \in \mathbb{C}$ و الدالة الأسية الحقيقية تزايدية)

إذن $|e^{-if}|$ هي دالة محدودة على $\mathbb{C}$. باستخدام نظرية <u>ليوفيل</u> نستنتج أنه يوجد $c \in \mathbb{C}$ بحيث $e^{if(z)} = c$ لكل $z \in \mathbb{C}$ ②

فنستنتج أن $f(z) \equiv \lambda$ لكل $z \in \mathbb{C}$ يعني f هي دالة ثابتة

<u>السؤال الرابع</u>: (7 درجات)

① ينص مبدأ القيمة العظمى للمقياس على أنه:
إذا كانت f دالة تحليلية داخل وعلى المسار البسيط والمغلق Γ
فإن القيمة العظمى لمقياسها $|f(z)|$ لا تكون إلا على الحدود Γ ②
إلا إذا كانت f ثابتة ففي هذه الحالة مستثناة.

② ليكن $z = x+iy \in \mathbb{C}$، إذن $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$|\sin z|^2 = (\sin z)\overline{(\sin z)}$$

$$|\sin z|^2 = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i}\right)$$

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}\left[e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})} + e^{i(\bar{z}-z)}\right]$$

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}\left[e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-i2x} + e^{2y}\right]$$ ②

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}\left[e^{2y} + e^{-2y} - (e^{2ix} + e^{-2ix})\right]$$

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}\left[2\cosh 2y - 2\cos 2x\right] = \frac{1}{2}\left[\cosh(2y) - \cos 2x\right]$$

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2}\left[\cosh^2 y + \sinh^2 y - \cos 2x\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + 2\sinh^2 y - \cos 2x\right] = \frac{1}{2}\left[2\sinh^2 y + 1 - \cos 2x\right]$$
$$= \sinh^2 y + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = \sinh^2 y + \sin^2 x.$$

③ $f(z) = \sin z$ تحليلية على R باستخدام مبدأ

القيمة العظمى للمقياس فان $|\sin z|$ تأخذ قيمتها

العظمى على الحافة. يعني على إحدى القطع المستقيمة

$[0,\pi]$, $[0,i]$, $[\pi, \pi+i]$ أو $[i, \pi+i]$.

② القيمة القصوى للدالة $\sin x$ تكون عند $x=\frac{\pi}{2}$ وتساوي

في حين القيمة القصوى للدالة $\sinh y$ تتحقق لما y تأخذ

قيمتها العظمى عند $y=1$ أي ح .

وبالتالي القيمة العظمى للدالة $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

تكون عند $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ وهي:

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)\right|^2 = 1 + \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2$$

① $$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)\right|^2 = 1 + \frac{1}{4}\left[e^2 + e^{-2} - 2\right]$$

$$\max_{z\in R} |\sin z| \leq \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[e^2 + \frac{1}{e^2}\right].$$