الاسم : ....

الرقم الجامعي : ......

تصحيح د/ابرهان

جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	اختبار قصير (1) 487 ريض الفصل الصيفي 1438-1439 هـ

السؤال الأول (5 درجات):

(ا) اوجد قيمة $\sqrt[3]{-1}$ و i^{1+i} . (درجتان)

0,5 $\quad -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$

0,5 $\quad k\in\mathbb{Z} \quad \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = e^{i\left(\frac{(1+2k)\pi}{3}\right)}$

0,5 $\quad (i)^{1+i} = e^{(1+i)\log i}$

0,5 $\quad \log i = \ln|i| + i\arg(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$k\in\mathbb{Z} \quad (i)^{1+i} = e^{(1+i)\,i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$

(ب) بين ان $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ ثم استنتج قيمة $\tan^{-1}(2i)$. (3 درجات)

0,5 $\quad w = \tan^{-1} z \iff z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w}$

$z = \left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right)\left(\frac{2}{e^{iw}+e^{-iw}}\right)$

$i(1+e^{2iw})z = e^{2iw}-1 \iff iz = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} = \frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}$

$iz + ie^{2iw}z - e^{2iw} + 1 = 0$

1,5 $\quad (iz-1)\,e^{2iw} = -1-iz \Rightarrow e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z}\,;\ z\neq\pm i$

$\log\left(e^{2iw}\right) = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$

$2iw = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$

0,5 $\quad w = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$

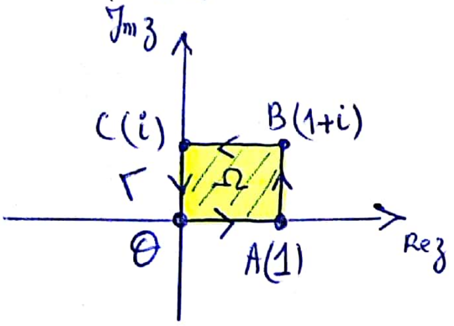
0,5 $\quad \tan^{-1}(2i) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-(2i)}{i+(2i)}\right) = \frac{1}{2i}\log\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\tan^{-1}(2i) = \frac{1}{2i}\left(\ln|-1/3| + i(\pi+2k\pi)\right)$

السؤال الثاني (5 درجات):

ليكن Γ محيط المربع الذي رؤوسه 0 ، 1 ، $1+i$ و i (مقطوعا بهذا الإتجاه).

(1) أوجد تمثيلا وسيطيا لهذا المسار Γ . (.. درجتان)



$$\Gamma = [OA] \cup [AB] \cup [BC] \cup [CO]$$

(0,5) تمثيل وسيطي لـ $[OA]$:

$z(t) = t$ حيث $0 \le t \le 1$

(0,5) تمثيل وسيطي $[AB]$:

$z(t) = 1 + it$ حيث $0 \le t \le 1$

(0,5) تمثيل وسيطي $[BC]$:

$z(t) = (1+i) - t$ حيث $0 \le t \le 1$

(0,5) تمثيل وسيطي $[CO]$: $z(t) = i - it = (1-t)i$ حيث $0 \le t \le 1$

(2) احسب $\oint_\Gamma \bar{z}\, dz$. هل هذا يتناقض مع نظرية كوشي؟ (3 درجات)

(0,5)
$$\oint_\Gamma \bar{z}\, dz = \int_{[OA]} \bar{z}\, dz + \int_{[AB]} \bar{z}\, dz + \int_{[BC]} \bar{z}\, dz + \int_{[CO]} \bar{z}\, dz$$

(1,5)
$$\oint_\Gamma \bar{z}\, dz = \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 (1-it)\, i\, dt + \int_0^1 (1-i-t)(-)dt + \int_0^1 (1+t)\, i(-i)\, dt$$

(0,5)
$$\oint_\Gamma \bar{z}\, dz = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + i\left[t - i\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \left[t - it - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[-t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$\oint_\Gamma \bar{z}\, dz = \frac{1}{2} + i\left[1 - \frac{i}{2}\right] - \left[1 - i - \frac{1}{2}\right] + \left[-1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}} + i + \cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{1} + i + \cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} = 2i$$

(0,5) هذا لا يتناقض مع نظرية كوشي لأن $f(z)=\bar{z}$ ليست تحليلية.

! باستخدام نظرية غرين Green Thm يمكن معرفة قيمة $\oint_\Gamma \bar{z}\, dz$ مباشرة:

$$\oint_{\partial\Omega} f(z,\bar{z})\, dz = 2i \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx\,dy$$

و بالتالي
$$\oint_{\partial\Omega} \bar{z}\, dz = 2i \iint_\Omega 1\, dx\,dy$$

$$\boxed{\frac{1}{2i} \oint_{\partial\Omega} \bar{z}\, dz = \text{مساحة المنطقة } \Omega}$$

Scanned by CamScanner