جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات.	الامتحان الفصلي الأول ٢٠٩ ريض الفصل الثاني ١٤٣٩/١٤٤٠ هـ،	يوم الخميس ١٤٤٠/٦/١٦ هـ الزمن : ساعة ونصف.

السؤال الأول (8): اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{(-1)^n \frac{-n+2}{3n-4}\right\}_{n=1}^{\infty} ، \left\{\frac{Sin(3n)+3}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty} ، \left\{(1+n)^{\frac{1}{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty} ،$$

$$.\left\{\frac{n^2+n+2}{ln(2n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

السؤال الثاني (5) : أ) أوجد الثابتين A ، B بحيث تكون العلاقة التالية محققة :

$$.\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ متقاربة و ما هو مجموعها؟

(استفد من الفقرة أ)).

ج) برهن أن المتسلسلة التالية متباعدة : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}+n} + \frac{3}{4^n}\right)$.

السؤال الثالث (9): بين فيما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة ، متباعدة ، متقاربة شرطيا" ، أو متقاربة مطلقا" .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2n^2+3} ، \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{tan^{-1}(n)}{n^3+2} ، \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}+2}{n+2} ،$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{lnn}\right)^n$$

السؤال الرابع (3): أوجد فترة ونصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى التالية :

$$.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+2)3^n}$$

<u>س٤</u>

$$\left\{(-1)^n \frac{-n+2}{3n-4}\right\}_{n=1}$$

نضع $a_n = (-1)^n \dfrac{-n+2}{3n-4}$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +1/3 \neq 0$$

(2) فان $\{a_n\}$ متباعدة

$$\left\{\frac{\sin(3n)+3}{3^n}\right\}$$

نستخدم نظرية الحصر

$$-1 \le \sin 3n \le 1$$

$$\frac{2}{3^n} \le \frac{\sin(3n)+3}{3^n} \le \frac{4}{3^n}$$

بما أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(3n)+3}{3^n} = 0$ (2)

$$\left\{(1+n)^{\frac{1}{2n}}\right\}$$

نضع $a_n = (1+n)^{1/2n} > 0$

$$\ln a_n = \frac{1}{2n} \ln(1+n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 0$$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} a_n = e^0 = 1$ (2)

$$\left\{\frac{n^2+n+2}{\ln(2n+1)}\right\}_{n=1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{\ln(2n+1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

تطبيق لوبيتال

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{\frac{2}{2n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(2n+1)^2 = \infty \quad (2)$$

س٤ (٣)

$$g(n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$

(1)
$$A = \lim_{n\to-1} (n+1)\, g(n) = \lim_{n\to-1} \frac{1}{n+2} = 1$$

$$B = \lim_{n\to-2} (n+2)\, g(n) = \lim_{n\to-2} \frac{1}{n+1} = -1$$

(٣)

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N+1}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1/2$$

(2) فان $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ متقاربة ومجموعها $1/2$

ح)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{n}+n}+\frac{3}{4^n}\right]=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+n}\right)-3\left(\sum_{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

• $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+n}$ (اختبار نهاية المقارنة
مع $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة) ①

• $\sum\left(\frac{1}{4}\right)^n$ متسلسلة هندسية
$-1<r=\frac{1}{4}<1$ ①
• بالتالي متقاربة.

فنستنتج أن $\sum\left(\frac{2}{\sqrt{n}+n}+\frac{3}{4^n}\right)$ متباعدة.

Extend Page

س٣

$\sum_{n=1} \frac{5n+1}{2n^2+3}$ متسلسلة موجبة

نستخدم اختبار نهاية المقارنة:

(2) $a_n = \frac{5n+1}{2n^2+3}$ و $b_n = \frac{5n}{2n^2} = \frac{5}{2n}$

بما أن $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ و بما أن $\sum b_n = \frac{5}{2} \sum \frac{1}{n}$ متباعدة (p- متسلسلة حيث $p=1$)

فينتج أن $\sum a_n$ هي متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1}(n)}{n^3+2}$$

ندرس $\sum |a_n| = \sum \frac{|\tan^{-1}(n)|}{n^3+2}$

نعلم $|\tan^{-1} n| \le \frac{\pi}{2}$

$$\sum \frac{|\tan^{-1} n|}{n^3+2} \le \frac{\pi}{2} \sum \frac{1}{n^3}$$

وبما أن $\sum \frac{1}{n^3}$ متقاربة (متسلسلة p حيث $p=3>1$)

فينتج أن $\sum a_n$ متقاربة تقاربًا مطلقًا. (2)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+2}{n+2}$ متبادلة.

بما أن $\sum \frac{\sqrt{n}+2}{n+2}$ متباعدة باستخدام اختبار نهاية المقارنة مع $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة

نستخدم اختبار المتسلسلة المترددة.

$a_n = \frac{\sqrt{n}+2}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{x+2}$; $\{a_n\} \downarrow$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2) - (\sqrt{x}+2)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}(x+2)^2} = \frac{-x-4\sqrt{x}+2}{(\quad)} < 0$$

فإن $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}+2}{n+2}$ متقاربة تقاربًا شرطيًا (2)

$= \sum_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{\ln n}\right)^n$.

(3) نستخدم اختبار الجذر

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty > 1$ قاعدة لوبيتال

فهي متباعدة

Scanned by CamScanner

درس ٤

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+2)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

نستخدم اختبار النسبة:

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+3)3^{n+1}} \cdot \frac{3^n(n+2)}{(x+2)^n}\right|$$

$$= \frac{|x+2|}{3} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \frac{|x+2|}{3} = L$$

Extend Page

3

• إذا كان $L<1$ $\Leftrightarrow$ $\frac{|x+2|}{3}<1$ $\Leftrightarrow$ $|x+2|<3$ $\Leftrightarrow$

0,5 $-3<x+2<3$ $\Leftrightarrow$ $-5<x<1$

فهي متقاربة تقاربا مطلقا

• إما إذا كان $L>1$ $\Leftrightarrow$ $x>1$ أو $x<-5$ 0,5

فهي متباعدة

• إذا كان $L=1$ يعني $x=1$ أو $x=-5$.

عندما $x=1$; نحصل $\sum \frac{1}{n+2}$ متباعدة

عندما $x=-5$ نحصل $\sum \frac{(-1)^n}{n+2}$ متقاربة تقاربا شرطيا

0,5

0,5

خلاصة: فترة التقارب $[-5,1)$

نصف قطر التقارب $R=\frac{1-(-5)}{2}=3$