جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات.	الإمتحان الفصلي الثاني 209 ريض الفصل الثاني 1439/1438 هـ,	يوم الخميس 1439/7/19 هـ الزمن : ساعة ونصف.

السؤال الأول (9) : أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة : $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ ثم استنتج متسلسلة القوى في x للدالة : $g(x)=\dfrac{2x}{(2-x)^2}$ وماهي فترة تقاربها؟.

ب) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة : $f(x)=\ln(x+1)$ ،حيث $c=2$.

السؤال الثاني (9) : أ) باستخدام المتسلسلة $\cos u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{(2n)!}$ لكل $u\in\mathbb{R}$ احسب القيمة التقريبية للتكامل : $\int\limits_0^1\cos(x^2)dx$ وذلك بمكاملة الحدود الثلاثة الأولى في المتسلسلة .

ب) أوجد متسلسلة فورييه cosine للدالة $f(x)=1-x$ على الفترة $[0,3]$

ثم استنتج عند $x=3$ صحة العلاقة التالية : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

السؤال الثالث(7): أوجد متسلسلة فورييه للدالة : $f(x)=\begin{cases}0\,, -1<x\le 0\\ 2,\, 0<x<1\end{cases}$ ، حيث $f(x+2)=f(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ ثم استنتج عند $x=\dfrac{1}{2}$ صحة العلاقة التالية :

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}=\dfrac{\pi}{4}$ (مع العلم أن $\sin(\dfrac{2n-1}{2}\pi)=(-1)^{n-1}$).

تصحيح الاختبار الشهري الثاني 209 ريض

للفصل الثاني 1439/38هـ

السؤال الأول: (9 درجات)

(أ) نعلم أن لكل $-1<u<1$ ، $\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$ (1)

(0,5) $f(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2(1-x/2)}$

بتعويض u ب $x/2$ ،

(1,5) لكل $-2<x<2$ $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x/2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n$

باستخدام مبرهنة الاشتقاق لمتسلسلة القوى.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}$$

(1) لكل $-2<x<2$ $\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}$

وبالتالي

(1) لكل $-2<x<2$ $g(x)=\frac{2x}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$

(ب) نعلم أن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ لكل x في جوار c

فإن

(1) $f(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$

لكل x في جوار 2 $\ln(1+x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4+\cdots$

$f(2)=\ln 3$ ، $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ فإن $f'(2)=\frac{1}{3}$

$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ فإن $f''(2)=-\frac{1}{9}$

(2) $f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ فإن $f'''(2)=\frac{2}{27}$

$f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$ فإن $f^{(4)}(2)=\frac{-6}{81}=\frac{-2}{27}$

عندئذٍ:

$$\ln(1+x)=\ln 3+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{18}(x-2)^2+\frac{1}{81}(x-2)^3-\frac{1}{364}(x-2)^4+\cdots$$

لكل x في جوار 2 (1)

السؤال الثاني (9 درجات)

أ) لكل $u\in\mathbb{R}$،

$$\cos u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}$$

بتعويض u بـ x^2 ، نجد أن:

(1)

$$\cos(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}$$

باستخدام مبرهنة التكامل للمتسلسلات القوى:

$$\int_0^1\cos(x^2)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\int_0^1 x^{4n}\,dx\right)$$

(2)

$$\int_0^1\cos(x^2)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\frac{1}{(4n+1)}$$

فنستنتج أن

(1) (قيمة تقريبية) $\int_0^1\cos(x^2)\,dx\approx 1-\frac{1}{10}+\frac{1}{24\times 9}$

ب) $f(x)=1-x$ دالة متصلة على $[0,3]$ فإننا نحصل على بمتسلسلة جيب التمام فورية.

لكل $0<x<3$؛

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

حيث

(1) $$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (1-x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{2}{3}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left[3-\frac{9}{2}\right] = -1$$

ولكل $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$$

$$\begin{array}{ll} u(x) = 1-x & \\ v'(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \end{array}$$

$$\int_0^3 (1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{3}{n\pi}\left[\underbrace{\left[(1-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3}_{=0} + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right]$$

$$= -\frac{9}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3 = \frac{-9}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi)-1\right]$$

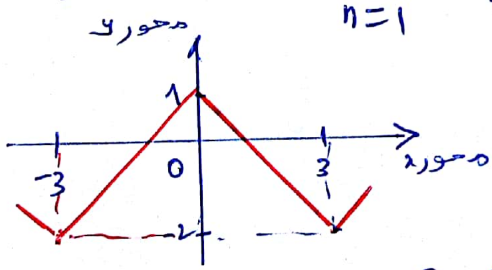
$$a_n = \frac{-18}{6n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$ و بالتالي

(2) $$\boxed{a_n = \frac{-6}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]}$$

لكل $0 < x < 3$,

(1) $$1 - x = -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

(*)



بتعويض قيمة x ب (3) في (*):

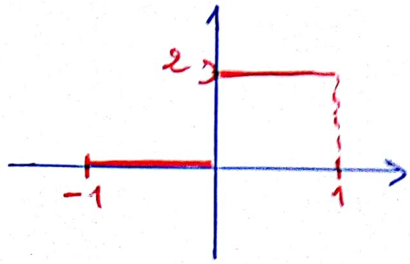
$$-2 = -1/2 + \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

(1) $$\frac{3}{2} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)^2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{12}{\pi^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$ وبالتالي

السؤال الثالث (7 درجات)

$T=1$



بما أن f منتظمة على $(-1,1)\setminus\{0\}$ فإن f تحظى بمتسلسلة فورية

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right]$$ لكل $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$

حيث

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 2\,dx$$

1 $$\boxed{a_0 = 2}$$

لكل $n \geq 1$;

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx$$

2 $$a_n = \int_{0}^{1} 2\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\pi x)\right]_0^1 = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1$$

2 $$\boxed{b_n = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]}$$

لكل $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n}\sin(n\pi x)$$

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)}\sin((2k+1)\pi x)$$

نأخذ $x = 1/2$ لدينا

1 $$2 = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4$$